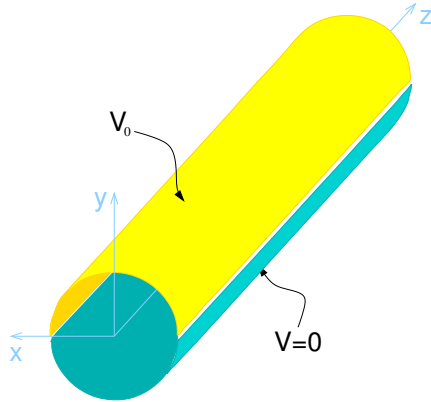




Θέμα 1^ο:

Δύο μεταλλικά ημικυλινδρικά κελύφη ακτίνας R προσκολλώνται με λεπτή μόνωση, δημιουργώντας έτσι ένα κυλινδρικό κέλυφος. Το δυναμικό του ενός ημικυλίνδρου είναι V_0 και του άλλου 0 όπως στο σχήμα.



(α) Να βρεθεί το δυναμικό στην κεντρική περιοχή του κελύφους, παραλείποντας όρους που φθίνουν πιο γρήγορα από $(r/R)^2$.

(β) Ποιο το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα του κελύφους;

Δίνεται η γενική λύση της εξίσωσης Laplace σε πολικές συντεταγμένες $V(r, \phi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^n} \right) \cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n r^n + \frac{d_n}{r^n} \right) \sin(n\phi)$ και η σχέση $r \sin \phi = y$.

Θέμα 2^ο:

Διηλεκτρική σφαίρα ακτίνας R και σταθεράς ϵ_1 είναι πλήρως βυθισμένη μέσα σε διηλεκτρικό λάδι σταθεράς $\epsilon_2 \neq \epsilon_1$. Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ εφαρμόζεται σε όλο το σύστημα.

(α) Να βρεθούν τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{D}$ σε όλο το χώρο, θεωρώντας ότι το δυναμικό περιέχει μόνο όρους ανάλογους του $\cos \theta$.

(β) Εάν $\epsilon_1 = 4\epsilon_2$ να σχεδιάσετε τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου. Που οφείλεται ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στη σφαίρα είναι μικρότερο του E_0 ;

Δίνεται η κλίση σε σφαιρικές συντεταγμένες $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$.

Θέμα 3^ο:

Η γενική λύση της εξίσωσης $\nabla^2 \vec{A} = 0$ με $\vec{A} =$

$$A(r, \theta) \hat{\phi} \text{ είναι } \vec{A} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_{\ell} r^{\ell} + \frac{b_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) \frac{dP_{\ell}(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\phi}.$$

Οι συναρτήσεις $\frac{dP_{\ell}(\cos \theta)}{d\theta}$ είναι ανεξάρτητες (λέγονται προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre $P_{\ell}^1(\cos \theta)$ και ικανοποιούν τη σχέση ορθογωνιότητας

$$\int_0^{\pi} \frac{dP_{\ell}(\cos \theta)}{d\theta} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \sin \theta d\theta = \frac{2\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \delta_{\ell n}.$$

Οι πρώτες τέτοιες συναρτήσεις είναι $\frac{dP_0(\cos \theta)}{d\theta} = 0$,

$$\frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta} = -\sin \theta, \quad \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta} = -3 \sin \theta \cos \theta.$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω βρείτε διανυσματικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο για μια ομογενώς μαγνητισμένη σφαίρα ακτίνας R με μαγνήτιση $\vec{M}$, ακολουθώντας τα επόμενα βήματα:

(α) Βρείτε τα δέσμια ρεύματα και δείξτε ότι υπάρχει μόνο επιφανειακό $\vec{K}_b = -M \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\phi}$ για $r = R$.

(β) Αφού αιτιολογήσετε γιατί $\vec{A} = A(r, \theta) \hat{\phi}$ και στους χώρους $r > R$, $r < R$ ισχύει $\nabla^2 \vec{A} = 0$, γράψτε τη μορφή του δυναμικού χρησιμοποιώντας τη γενική λύση που δόθηκε παραπάνω και κρατώντας μόνο όρους με $\ell = 1$.

(γ) Προσδιορίστε τις σταθερές από την απαίτηση να μην απειρίζεται το διανυσματικό δυναμικό, τη συνέχεια του $\vec{A}$ και την ασυνέχεια της παραγώγου του.

(δ) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο μέσα και έξω από τη σφαίρα.

Δίνεται ο στροβιλισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(v_{\phi} \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r v_{\phi})}{\partial r} \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r v_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}.$$

Θέμα 4^ο:

Σφαίρα ακτίνας R φέρει ομογενή μαγνήτιση $\vec{M}$, οπότε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό της είναι $\vec{B}_s = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$.

Στο εσωτερικό της σφαίρας σμιλεύουμε κυλινδρική κοιλότητα μικρής ακτίνας $R' \ll R$, παράλληλη στην $\vec{M}$. Αν η κοιλότητα έχει μήκος $L \gg R'$ να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο στην κεντρική περιοχή της.

