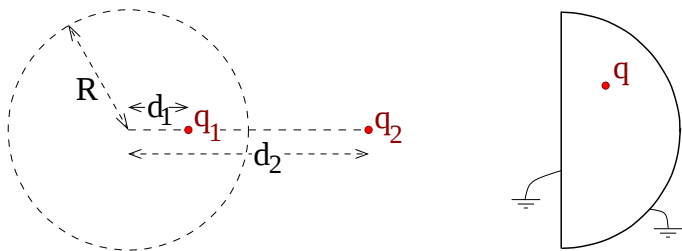




### Θέμα 1<sup>ο</sup>:

Όπως ξέρουμε από τη μέθοδο ειδώλων τα φορτία  $q_1$  και  $q_2$  του αριστερού σχήματος δημιουργούν μηδενικό δυναμικό στην σφαιρική επιφάνεια ακτίνας  $R$  αν ισχύει  $q_2 = -q_1 \frac{R}{d_1}$  και  $d_2 = \frac{R^2}{d_1}$ .

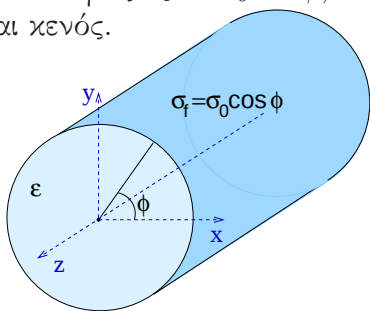


Χρησιμοποιώντας αυτό σαν δεδομένο βρείτε το δυναμικό στο εσωτερικό του γειωμένου ημισφαιρικού αγωγίου κελύφους του δεξιού σχήματος (και η βάση είναι αγωγίμη και γειωμένη), στο οποίο υπάρχει φορτίο  $q$  σε κάποια θέση μέσα στο κέλυφος. Ζητούνται δηλαδή η θέση και το φορτίο των ειδώλων που απαιτούνται ώστε να μηδενίζεται το δυναμικό τόσο στην ημισφαιρική επιφάνεια, όσο και στη βάση του κελύφους.

Ποιό το συνολικό φορτίο που επάγεται στο κέλυφος;

### Θέμα 2<sup>ο</sup>:

Συμπαγής κύλινδρος ακτίνας  $R$  και απείρου μήκους αποτελείται από ομογενές γραμμικό διηλεκτρικό υλικό διαπερατότητας  $\epsilon$ . Στην επιφάνεια του κυλίνδρου έχουμε τοποθετήσει κατάλληλα ελεύθερο φορτίο επιφανειακής πυκνότητας  $\sigma_f = \sigma_0 \cos \phi$ , ενώ για  $r > R$  ο χώρος είναι κενός.



(α) Δείξτε ότι το δυναμικό στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι  $V = \frac{\sigma_0}{\epsilon + \epsilon_0} x$ , θεωρώντας  $V|_{r=0} = 0$ .

(β) Ποιό το ηλεκτρικό πεδίο και η πόλωση για  $r < R$ ;  
(γ) Ποιά η επιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου στην επιφάνεια του κυλίνδρου;

Δίνεται η γενική λύση της εξίσωσης Laplace σε πολικές συντεταγμένες  $\nabla^2 V(r, \phi) = 0 \Leftrightarrow$

$$V(r, \phi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k r^k + \frac{b_k}{r^k} \right) \cos(k\phi) +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( c_k r^k + \frac{d_k}{r^k} \right) \sin(k\phi).$$

### Θέμα 3<sup>ο</sup>:

Έστω μαγνητικό πεδίο με μορφή σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \rho \omega}{15} \left[ (5R^2 - 3r^2) \cos \theta \hat{r} + (6r^2 - 5R^2) \sin \theta \hat{\theta} \right], & r \leq R \\ \frac{\mu_0 \rho \omega R^5}{15r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}), & r \geq R \end{cases}$$

όπου  $\rho, \omega, R$  σταθερές.

(α) Βρείτε τα ρεύματα που δημιουργούν το πεδίο, χωρικά και επιφανειακά, και δείξτε ότι αντιστοιχούν σε μία ομογενώς φορτισμένη σφαίρα που περιστρέφεται γύρω από μία διάμετρό της.

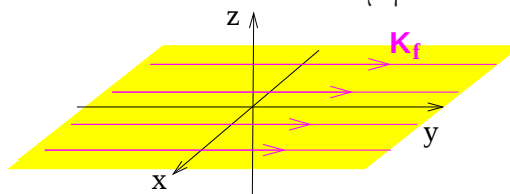
(β) Βρείτε διανυσματικό δυναμικό για το δοσμένο πεδίο, της μορφής  $\vec{A} = A(r, \theta) \hat{\phi}$ .

(γ) Δείξτε ότι μια μαγνητισμένη σφαίρα θα μπορούσε να δημιουργήσει το ίδιο πεδίο για συγκεκριμένη μαγνήτιση της μορφής  $\vec{M} = M(r, \theta) \hat{r}$  την οποία και να βρείτε.

Δίνεται ο στροβιλισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες  $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(v_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r} \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$ .

### Θέμα 4<sup>ο</sup>:

Έστω φύλλο ρεύματος στο επίπεδο  $z = 0$ , με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα  $\vec{K}_f = K_f \hat{y}$ . Στο χώρο λίγο κάτω από το φύλλο ( $z \lesssim 0$ ) τόσο το μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  όσο και το πεδίο  $\vec{H}$  είναι μηδενικά.



(α) Χρησιμοποιώντας οριακές συνθήκες βρείτε το μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  στο χώρο λίγο πάνω από το φύλλο ( $z \gtrsim 0$ ) αν αυτός είναι κενός.

(β) Ποιό είναι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το φύλλο ρεύματος και ποιό το πεδίο  $\vec{B}_{\text{αλλα}}$  που δημιουργούν στην περιοχή  $z \approx 0$  άλλα ρεύματα εκτός του φύλλου;

Ποιά η δύναμη ανά επιφάνεια που δέχεται το φύλλο ρεύματος;

(γ) Αν ο χώρος λίγο πάνω από το φύλλο ( $z \gtrsim 0$ ) είναι γεμάτος από γραμμικό μαγνητικό υλικό με μαγνητική διαπερατότητα  $\mu$ , ποιά είναι τα πεδία  $\vec{H}$  και  $\vec{B}$  στο χώρο αυτό;

Ίσως χρειαστείτε τη διανυσματική ταυτότητα  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$ .