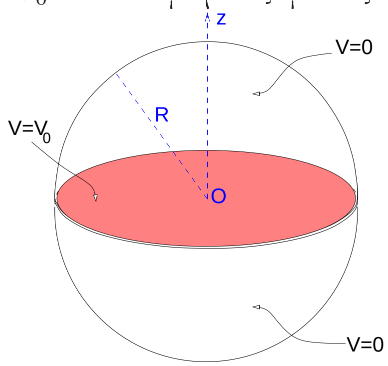
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Ηλεκτρομαγνητισμού Ι, 9 Σεπτεμβρίου 2013
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα 1ο:

Το εσωτερικό λεπτού σφαιρικού αγώγιμου φλοιού, ακτίνας R, χωρίζεται σε δύο ημισφαίρια από λεπτό αγώγιμο δίσκο, ίδιας περίπου ακτίνας, που φέρει στην περιφέρειά του λεπτή μόνωση. Ο δίσκος φορτίζεται σε δυναμικό V_0 ενώ ο σφαιρικός φλοιός γειώνεται.



(α) Δικαιολογήστε γιατί το δυναμικό στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού είναι της μορφής $V_0\left[1-\sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta)\right]$ για $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ και $V_0\left[1+\sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta)\right]$ για $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, όπου n περιττός.

(β) Εφαρμόστε τη συνοριακή συνθήκη $V|_{r=R}=0$ για να υπολογίσετε τους συντελεστές a_n.

Για τα πολυώνυμα Legendre δίνονται

$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$,

$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_\ell(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{n\ell}$,

$\int_{0}^{1} P_n(x)dx=\frac{1}{n\,(n+1)}P'_n(0)$ για $n\neq 0$

(τα $P'_n(0)$ θεωρούνται γνωστά).

Θέμα 2ο:

Κύβος από διηλεκτρικό υλικό καταλαμβάνει τον όγκο $-a\leq x\leq a$, $-a\leq y\leq a$, $0\leq z\leq 2a$ και φέρει μόνιμη πόλωση $\vec{P}=k\vec{r}=k(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})$.

(α) Βρείτε τα χωρικά και επιφανειακά δέσμια φορτία.

(β) Ποια η συνολική διπολική ροπή του κύβου;

(Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει μέσω του ορισμού της πόλωσης.)

(γ) Ποιο το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο $\vec{r}=100\,a\hat{z}$;

Θέμα 3ο:

Κυλινδρικός φλοιός απείρου μήκους και ακτίνας R διαρρέεται από επιφανειακό ρεύμα $\vec{K}=K(\phi)\hat{z}$, παράλληλο στον άξονά του. Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο φλοιός είναι $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial A(r\,,\phi)}{\partial\phi}\hat{r}-\frac{\partial A(r\,,\phi)}{\partial r}\hat{\phi}$, όπου $\vec{A}=A(r\,,\phi)\hat{z}$ είναι το διανυσματικό δυναμικό, το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$.

(α) Θεωρώντας γνωστές τις σχέσεις $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}\Leftrightarrow\oint\vec{A}\cdot d\vec{\ell}=\Phi_{\varepsilon\gamma\kappa}$, $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}\Leftrightarrow\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I_{\varepsilon\gamma\kappa}$ και επιλέγοντας κατάλληλους βρόχους, δείξτε ότι οι οριακές συνθήκες για το διανυσματικό δυναμικό είναι $A|_{r=R^+}=A|_{r=R^-}$ και $\left.\frac{\partial A}{\partial r}\right|_{r=R^+}-\left.\frac{\partial A}{\partial r}\right|_{r=R^-}=-\mu_0 K$.

(β) Αν $K(\phi)=K_0\sin(3\phi)$ να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο μέσα και έξω από το φλοιό.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι η συνάρτηση A είναι αρμονική μέσα και έξω από το φλοιό.

Δίνεται η γενική λύση της εξίσωσης Laplace σε πολικές συντεταγμένες $\vec{\nabla}^2 f(r\,,\phi)=0\Leftrightarrow$

$$f(r\,,\phi)=a_0+b_0\ln r+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k r^k+\frac{b_k}{r^k}\right)\cos(k\phi)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k r^k+\frac{d_k}{r^k}\right)\sin(k\phi).$$

Θέμα 4ο:

Ένα κυλινδρικό καλώδιο απείρου μήκους και ακτίνας R αποτελείται από γραμμικό, μη-ομογενές μαγνητικό υλικό του οποίου η διαπερατότητα είναι συνάρτηση της απόστασης από τον άξονα $\mu=\mu_0+2\mu_0 r/R$. Το καλώδιο διαρρέεται από ελεύθερο ρεύμα σταθερής πυκνότητας $\vec{J}_f$ παράλληλης στον άξονά του.

(α) Ποιο το πεδίο $\vec{H}$;

(β) Ποια η μαγνήτιση που αποκτά το καλώδιο;

(γ) Ποια τα δέσμια ρεύματα (χωρικά και επιφανειακά);

Δίνεται ο στροβιλισμός σε κυλινδρικές $\vec{\nabla}\times\vec{v}=$

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\phi}-\frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{r}+\left[\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r}\right]\hat{\phi}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r}-\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right]\hat{z}\,.$$