Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Ηλεκτρομαγνητισμού Ι, 22 Μαΐου 2013
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα 1$^{\text{ο}}$:

Δύο μεταλλικά ημισφαιρικά κελύφη ακτίνας R προσκολλώνται με λεπτή μόνωση, δημιουργώντας έτσι ένα σφαιρικό κέλυφος. Το δυναμικό του ενός ημισφαιρίου είναι V_0 και του άλλου 0.

(α) Να βρεθεί το δυναμικό στην κεντρική περιοχή του κελύφους, παραλείποντας όρους που φθίνουν πιο γρήγορα από $(r/R)^2$.

(β) Ποιο το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο του κελύφους;

Δίνονται για τα πολυώνυμα Legendre $\int_0^\pi P_\ell(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int_{-1}^1 P_\ell(x)P_n(x)dx = \dfrac{2}{2n+1}\delta_{\ell n}$, $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\dfrac{3x^2-1}{2}$ και $\cos\theta\,\hat{r}-\sin\theta\,\hat{\theta}=\hat{z}$.

Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

Στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας R από γραμμικό διηλεκτρικό υλικό διαπερατότητας ε τοποθετούμε ιδανικό ηλεκτρικό δίπολο ροπής $\vec{p}=p\hat{z}$.

(α) Δείξτε ότι το δυναμικό σε αποστάσεις $r \ll R$ από το κέντρο είναι $V \approx \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}$.

(β) Στους χώρους $0<r<R$ και $r>R$ το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και έχει τη μορφή $\dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2} - c_1 r\cos\theta$ και $\dfrac{c_2\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, αντίστοιχα. Προσδιορίστε τις σταθερές c_1 και c_2.

(γ) Ποια η φυσική σημασία των c_1 και c_2; Ποιας μορφής ηλεκτρικό πεδίο προκύπτει μέσα και έξω από τη σφαίρα;

Θέμα 3$^{\text{ο}}$:

Μια πλάκα μεγάλων διαστάσεων και πάχους $2a$ είναι παράλληλη στο επίπεδο xy και έχει τις βάσεις τις στα $z=+a$ και $z=-a$. Η πλάκα είναι ομογενώς μαγνητισμένη με μαγνήτιση $\vec{M}=M\hat{y}$.

(α) Βρείτε τα δέσμια ρεύματα και τα πεδία $\vec{B}$, $\vec{H}$ μέσα και έξω από την πλάκα.

(β) Βρείτε σε όλο το χώρο το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ που μηδενίζεται στο $z=0$ και ικανοποιεί τη βαθμίδα Coulomb ($\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$).

Θέμα 4$^{\text{ο}}$:

Δακτύλιος ακτίνας R διαρρέεται από ρεύμα I. Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί πάνω στον άξονά του, σε απόσταση z από το κέντρο του, έχει τη διεύθυνση του άξονα και μέτρο $B=\dfrac{\mu_0 I R^2}{2\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$. Πάνω στον άξονα του δακτυλίου μπορεί να κινείται μαγνητικό δίπολο με ροπή $\vec{m}$ παράλληλη στον άξονα. Ποια η δύναμη που ασκείται στο δίπολο; Σε ποια απόσταση είναι μέγιστη και ποια η μέγιστη τιμή της;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

	Καρτεσιανές (x,y,z)	Κυλινδρικές (r,ϕ,z)	Σφαιρικές (r,θ,ϕ)
$\vec{\nabla} f$	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (v_\theta\sin\theta)}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$
$\vec{\nabla}\times\vec{v}$	$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{x}+$ $\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{y}+$ $\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{z}$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi}-\frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{r}+$ $\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\hat{\phi}+$ $\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r}-\frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right]\hat{z}$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial (v_\phi\sin\theta)}{\partial \theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{r}+$ $\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r}\right]\hat{\theta}+$ $\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi}$
$\vec{\nabla}^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
$d\vec{r}$	$dx\,\hat{x}+dy\,\hat{y}+dz\,\hat{z}$	$dr\,\hat{r}+r d\phi\,\hat{\phi}+dz\,\hat{z}$	$dr\,\hat{r}+r d\theta\,\hat{\theta}+r\sin\theta d\phi\,\hat{\phi}$