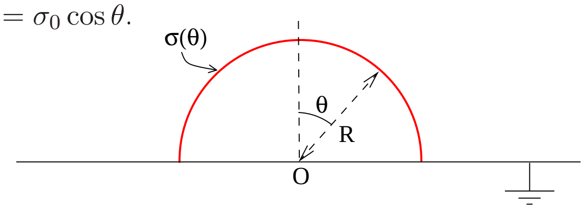
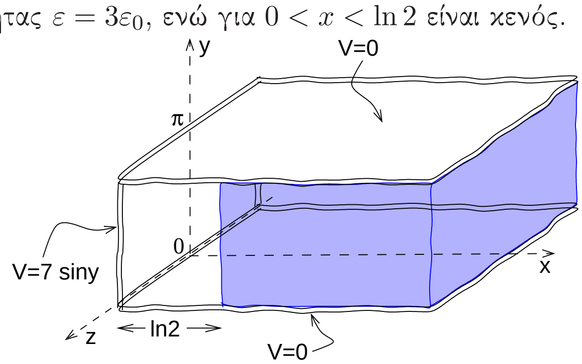
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Ηλεκτρομαγνητισμού Ι, 26 Φεβρουαρίου 2013
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα $1^{\mathbf{o}}$:
Λεπτό ημισφαιρικό κέλυφος ακτίνας R από μονωτικό υλικό τοποθετείται πάνω σε άπειρη γειωμένη πλάκα. Το κέλυφος φέρει φορτίο επιφανειακής πυκνότητας $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$.



(α) Να βρεθεί το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο μέσα και έξω από το κέλυφος.
(β) Να βρεθεί η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην πλάκα και το ολικό επαγόμενο φορτίο.
Δίνεται η κλίση σε σφαιρικές συντεταγμένες $\vec{\nabla} f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$ και το πολυώνυμο Legendre $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$.

Θέμα $2^{\mathbf{o}}$:
Δύο ημιάπειρες γειωμένες μεταλλικές πλάκες εκτείνονται παράλληλα στο επίπεδο xz, η μία στη θέση $y = 0$ και η άλλη στη θέση $y = \pi$. Το αριστερό άκρο στο $x = 0$, είναι κλεισμένο με μια άπειρη ταινία που διατηρείται σε δυναμικό $V|_{x=0} = 7\sin y$. Ο χώρος μεταξύ των πλακών για $x > \ln 2$ είναι γεμάτος με γραμμικό διηλεκτρικό διαπερατότητας $\varepsilon = 3\varepsilon_0$, ενώ για $0 < x < \ln 2$ είναι κενός.



(α) Δείξτε ότι στους χώρους $\{0 < x < \ln 2\,,\ 0 < y < \pi\}$ και $\{\ln 2 < x < \infty\,,\ 0 < y < \pi\}$ το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.
(β) Δείξτε ότι λύση της Laplace με τη μορφή

$$V = \begin{cases} (c_1 e^{x} + c_2 e^{-x})\sin y\,, & \text{αν } \begin{cases} 0 \le x \le \ln 2 \\ 0 \le y \le \pi \end{cases} \\ c_3 e^{-x}\sin y\,, & \text{αν } \begin{cases} x \ge \ln 2 \\ 0 \le y \le \pi \end{cases} \end{cases}$$

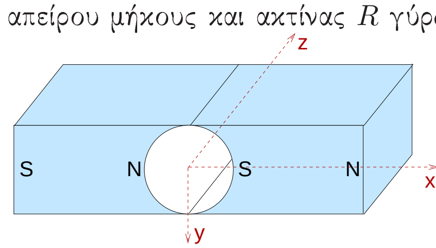
ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες, προσδιορίζοντας ταυτόχρονα τις σταθερές c_1, c_2 και c_3.

Θέμα $3^{\mathbf{o}}$:
Το διανυσματικό δυναμικό για κυκλικό βρόχο ακτίνας ρ που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I είναι $\vec{A} = A_\phi(r\,,\theta)\hat{\phi}$ (σε σφαιρικές συντεταγμένες), όπου, για $r > \rho$,

$$A_\phi(r\,,\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty} I\frac{\rho^{n+1}}{r^{n+1}}\int_0^{2\pi} P_n(\sin\theta\sin\phi')\sin\phi' d\phi'.$$

Να γραφεί η αντίστοιχη έκφραση για το διανυσματικό δυναμικό ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου ακτίνας R με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ, που περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω (η έκφραση ζητείται για $r > R$). Υπολογίστε τους δυο πρώτους όρους της σειράς. Δίνονται $P_0(u) = 1$, $P_1(u) = u$.
Υπόδειξη: Χωρίστε το δίσκο σε δακτυλίους πάχους $d\rho$ και ολοκληρώστε από $\rho = 0$ ως $\rho = R$.

Θέμα $4^{\mathbf{o}}$:
Βρείτε το μαγνητικό πεδίο στην κεντρική περιοχή του παρακάτω μαγνήτη, το υλικό του οποίου είναι ομογενώς μαγνητισμένο με μαγνήτιση $\vec{M} = M\hat{x}$. Θεωρήστε ότι το μαγνητισμένο υλικό γεμίζει το χώρο $-\infty < x < \infty$, $-R < y < R$, $-\infty < z < \infty$, εκτός της κυλινδρικής κοιλότητας απείρου μήκους και ακτίνας R γύρω από τον άξονα z.



Ένας τρόπος βασίζεται στην αναλογία ηλεκτρισμού/μαγνητισμού απουσία ελεύθερων φορτίων/ρευμάτων που συνοψίζεται στον παρακάτω πίνακα.

ηλεκτρισμός με $\rho_f = 0$	μαγνητισμός με $\vec{J}_f = 0$
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$	$\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}/\varepsilon_0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$
$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$	$\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_m$
$\vec{\nabla}^2 V = \vec{\nabla}\cdot\vec{P}/\varepsilon_0$	$\vec{\nabla}^2\Phi_m = \vec{\nabla}\cdot\vec{M}$
$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$	$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$
$V_1 = V_2$	$\Phi_{m1} = \Phi_{m2}$
$D_{1\perp} = D_{2\perp}$	$B_{1\perp} = B_{2\perp}$

Επομένως το πεδίο $\vec{H}$ που δημιουργεί μια μαγνήτιση $\vec{M}$ βρίσκεται όπως το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί μια πόλωση, με τις αντιστοιχίες $\vec{P} \leftrightarrow \vec{M}$, $\varepsilon_0\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$, $\varepsilon_0 V \leftrightarrow \Phi_m$, $\vec{D} \leftrightarrow \vec{B}/\mu_0$.
(α) Βρείτε την πυκνότητα χωρικού ($\rho_m = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$) και επιφανειακού ($\sigma_m = \vec{M}\cdot\hat{n}$) «μαγνητικού φορτίου» – όπου αυτό υπάρχει – και δείξτε ότι το δυναμικό Φ_m ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στους χώρους $r < R$ και $R < r < \infty$.
(β) Η κατάλληλη λύση της εξίσωσης Laplace είναι

$$\Phi_m = \begin{cases} a_1 r\cos\phi\,, & r \le R\,, \\ b_1 r^{-1}\cos\phi\,, & r \ge R\,. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες βρείτε τις σταθερές a_1 και b_1. Δίνεται $\vec{\nabla}\Phi_m(r\,,\phi) = \dfrac{\partial\Phi_m}{\partial r}\hat{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi_m}{\partial\phi}\hat{\phi}$.
(γ) Βρείτε το πεδίο $\vec{H}$ και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ στο εσωτερικό της κυλινδρικής κοιλότητας.