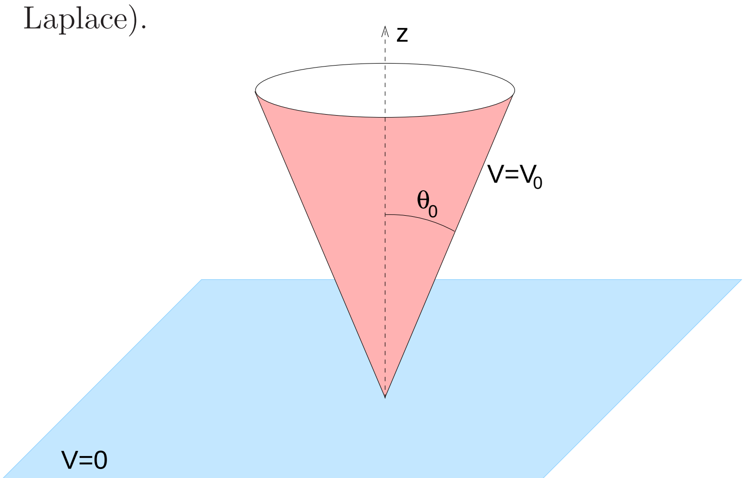
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Ηλεκτρομαγνητισμού Ι, 1 Οκτωβρίου 2012
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα 1$^{\text{o}}$:

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$V(\theta) = A\ \ln\left[\cot(\theta/2)\right] + B$$

(σε σφαιρικές συντεταγμένες), όπου A και B σταθερές, είναι αρμονική (δηλ. ικανοποιεί την εξίσωση Laplace).



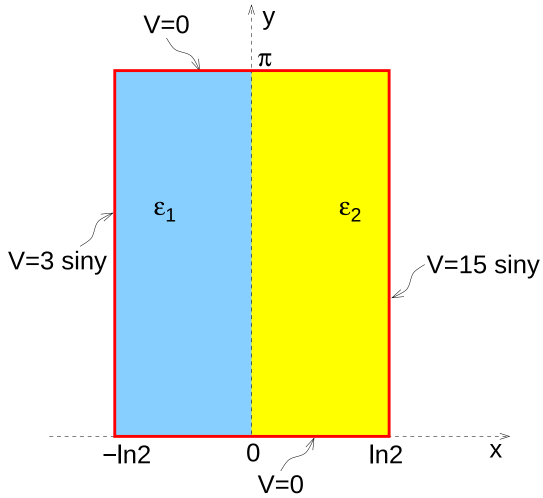
(β) Βρείτε το ηλεκτροστατικό δυναμικό στο χώρο μεταξύ της επιφάνειας κώνου και άπειρης γειωμένης πλάκας. Ο κώνος έχει τον άξονά του κάθετο στην πλάκα, την κορυφή του σε μονωμένη επαφή με την πλάκα και έχει φορτιστεί σε σταθερό δυναμικό V_0.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε σαν γενική λύση την συνάρτηση του ερωτήματος (α).

Θέμα 2$^{\text{o}}$:

Σωλήνας απείρου μήκους και ορθογώνιας διατομής είναι γεμάτος με γραμμικά διηλεκτρικά όπως στο σχήμα. Οι πλευρές $x = -\ln 2$, $x = \ln 2$, $y = 0$ και $y = \pi$ έχουν δυναμικό $3\sin y$, $15\sin y$, 0 και 0, αντίστοιχα.
(α) Δείξτε ότι το δυναμικό για το εσωτερικό του σωλήνα

$$V = \begin{cases} 6e^{x}\sin y\,, & x < 0 \\ (8e^{x} - 2e^{-x})\sin y\,, & x > 0 \end{cases}$$

ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες για συγκεκριμένο λόγο των διαπερατοτήτων $\varepsilon_1/\varepsilon_2$. Ποιος είναι αυτός ο λόγος;



(β) Ποια η επιφανειακή πυκνότητα δέσμιων φορτίων στην επιφάνεια μεταξύ των διηλεκτρικών;

Θέμα 3$^{\text{o}}$:

Έστω μαγνητικό πεδίο με διανυσματικό δυναμικό $\vec{A} = \lambda r^{a}\sin\theta\ \hat{\phi}$, σε σφαιρικές συντεταγμένες (λ και a είναι σταθερές).
(α) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και το ρεύμα στο χώρο $0 < r < \infty$. Για ποιες τιμές του a το ρεύμα αυτό είναι μηδέν;
(β) Τι είδους πεδίο αντιστοιχεί στην περίπτωση $a = 1$ και τι στην $a = -2$;

Θέμα 4$^{\text{o}}$:

Το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας R είναι διπολικό, $\vec{B} = \dfrac{B_0 R^3}{2r^3}\left(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right)$.
Αν γνωρίζουμε ότι το πεδίο μέσα στη σφαίρα είναι ομογενές, να βρεθεί αυτό το ομογενές πεδίο καθώς και τα ρεύματα σε όλο το χώρο.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε οριακές συνθήκες στην επιφάνεια $r = R$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

	Καρτεσιανές (x,y,z)	Κυλινδρικές (r,ϕ,z)	Σφαιρικές (r,θ,ϕ)
$\vec{\nabla} f$	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (v_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$
$\vec{\nabla}\times\vec{v}$	$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{z}$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right)\hat{z}$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (v_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\hat{\phi}$
$\vec{\nabla}^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
$d\vec{r}$	$dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$	$dr\hat{r} + r d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}$	$dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\hat{\phi}$

$\sin\phi = 2\sin(\phi/2)\cos(\phi/2)$, $\quad \hat{z} = \cos\theta\ \hat{r} - \sin\theta\ \hat{\theta}$