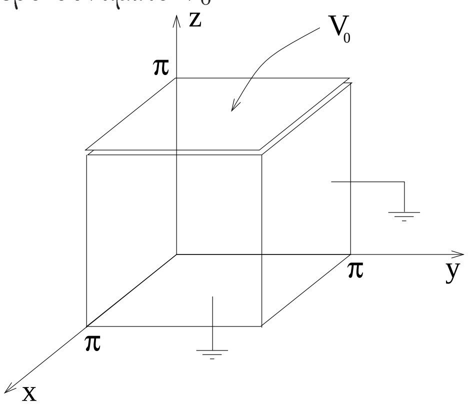
Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Ηλεκτρομαγνητισμού Ι, 6 Φεβρουαρίου 2012
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα 1^o:

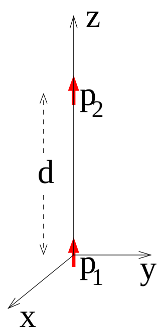
Κυβικό μεταλλικό κιβώτιο ακμής π έχει γειωμένες τις πλάγιες πλευρές και τη βάση του. Η οροφή του έχει μονωθεί από τις πλάγιες πλευρές και φορτίζεται σε σταθερό δυναμικό V_0.



(α) Να βρεθεί το δυναμικό εντός του κιβωτίου.
(β) Ποιο είναι το δυναμικό στο κέντρο του κιβωτίου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
(Σκεφτείτε τι δυναμικό θα είχε το κέντρο αν και οι έξι έδρες είχαν δυναμικό V_0.)

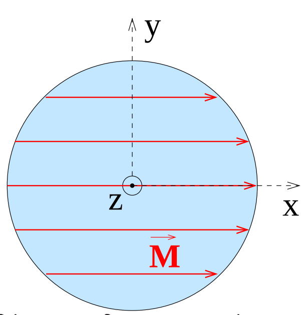
Θέμα 2^o:

Ένα ηλεκτρικό δίπολο με διπολική ροπή $\vec{p}_1 = p_1\hat{z}$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Ένα δεύτερο δίπολο διπολικής ροπής $\vec{p}_2 = p_2\hat{z}$ βρίσκεται πάνω στον άξονα z και σε απόσταση d από την αρχή. Βρείτε την δύναμη μεταξύ τους. Είναι ελκτική ή απωστική;



Θέμα 3^o:

Κύλινδρος απείρου μήκους και ακτίνας R είναι μαγνητισμένος με σταθερή μαγνήτιση, κάθετη στον άξονά του. Έστω ο άξονας του κυλίνδρου είναι ο $\hat{z}$ και $\vec{M} = M\hat{x}$.

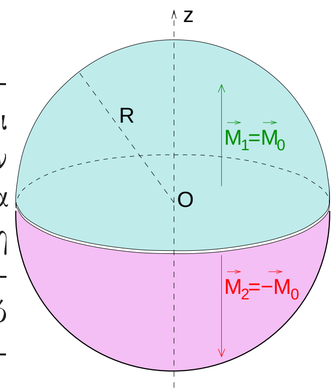


Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ακολουθώντας τα επόμενα βήματα:
(α) Βρείτε τα δέσμια ρεύματα.
(β) Δικαιολογήστε γιατί υπάρχει διανυσματικό δυναμικό της μορφής $\vec{A} = A(r,\phi)\hat{z}$ με τη συνάρτηση $A(r,\phi)$ να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στις περιοχές $r < R$ και $r > R$.
(γ) Δίνεται ότι οι κατάλληλες λύσεις της εξίσωσης Laplace είναι $A = \begin{cases} Cr\sin\phi\,, r < R \\ Dr^{-1}\sin\phi\,, r > R \end{cases}$
Βρείτε τις σταθερές C και D χρησιμοποιώντας τη συνοριακή συνθήκη $\vec{B}_{\text{έξω}} - \vec{B}_{\text{μέσα}} = \mu_0\vec{K}\times\hat{n}$.
(δ) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο.
Δίνεται στις κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right)\hat{z}\,.$$

Θέμα 4^o:

Δύο μαγνητισμένα ημισφαίρια ίδιας ακτίνας R είναι σε επαφή και σχηματίζουν μια σφαίρα. Τα ημισφαίρια φέρουν σταθερή μαγνήτιση παράλληλη στον άξονα συμμετρίας τους, με φορά από τη βάση τους προς την ημισφαιρική επιφάνειά τους.



(α) Για να βρούμε το μαγνητικό πεδίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε βαθμωτό δυναμικό και να αντιστοιχίσουμε τις $\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0$ και $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$ στις $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_m$ και $\nabla^2\Phi_m = \vec{\nabla}\cdot\vec{M}$. Στο εξωτερικό της σφαίρας ισχύει λοιπόν η εξίσωση Laplace $\nabla^2\Phi_m = 0$. Βρείτε το δυναμικό εκτός της σφαίρας (για $r > R$) αν γνωρίζετε ότι στον άξονα z, για $|z| > R$, είναι

$$\Phi_m = M_0|z|\left[\frac{2}{3} - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{3/2}\right].$$

Δίνεται το ανάπτυγμα $\frac{2}{3} - \left(1+\xi^2\right)^{1/2} + \frac{1}{3}\left(1+\xi^2\right)^{3/2}$

$$= \frac{\xi^4}{4} - \frac{1}{2}\frac{\xi^6}{6} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\xi^8}{8} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\xi^{10}}{10} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\left[\frac{(-1)^k}{2k+4}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k)}\right]}_{c_k}\xi^{2k+4} \text{ για } |\xi| < 1.$$

Επίσης για τα πολυώνυμα Legendre $P_\ell(\pm 1) = (\pm 1)^\ell$.
(β) Πως περιμένατε να ελαττώνεται το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ σε μεγάλες αποστάσεις από τη σφαίρα, $r \gg R$; Σαν αντιστρόφως ανάλογο του r^3 ή του r^4; Επαληθεύεται αυτό από τη λύση που βρήκατε;
Δίνεται στις σφαιρικές συντεταγμένες

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\phi}.$$