



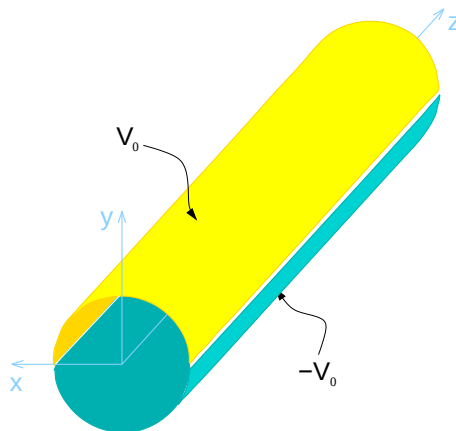
Θέμα 1^ο:

Κυλινδρικό κέλυφος απείρου μήκους και ακτίνας R αποτελείται από δύο αγωγίμους ημικυλίνδρους που χωρίζονται από λεπτό μονωτικό. Το ένα μέρος έχει δυναμικό V_0 και το άλλο $-V_0$ (βλέπε σχήμα) με σημείο αναφοράς το άπειρο (δηλ. $V \rightarrow 0$ για $r \rightarrow \infty$). Συγκεκριμένα, σε κυλινδρικές

$$\text{συντεταγμένες } V|_{r=R} = \begin{cases} +V_0 & \text{αν } 0 < \phi < \pi \\ -V_0 & \text{αν } \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

(α) Βρείτε το δυναμικό σε όλο το χώρο.

(β) Ποιο το ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα του κελύφους;



$$\text{Δίνεται η γενική λύση: } V(r, \phi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k r^k + \frac{b_k}{r^k} \right) \cos(k\phi) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k r^k + \frac{d_k}{r^k} \right) \sin(k\phi).$$

$$\text{Επίσης η κλίση σε κυλινδρικές συντεταγμένες } \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \text{ και } \sin \phi \hat{r} + \cos \phi \hat{\phi} = \hat{y}.$$

Θέμα 2^ο:

Διηλεκτρική σφαίρα ακτίνας R έχει αποκτήσει μια μόνιμη ομοιόμορφη πόλωση $\vec{P}_0 = P_0 \hat{z}$. Η σφαίρα περιβάλλεται από γραμμικό και ομογενές διηλεκτρικό σταθεράς ϵ , μέχρι ακτίνα $R' \gg R$ (πρακτικά $R' = \infty$).

(α) Δείξτε ότι το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση Laplace τόσο στο εσωτερικό της σφαίρας, όσο και μέσα στο γραμμικό και ομογενές διηλεκτρικό.

(β) Ποιο το δυναμικό και τα πεδία $\vec{E}$, $\vec{D}$ σε όλο το χώρο;

$$\text{Δίνεται η κατάλληλη λύση της εξίσωσης Laplace: } V = \begin{cases} c r \cos \theta & \text{αν } r \leq R \\ c R^3 \frac{\cos \theta}{r^2} & \text{αν } r \geq R \end{cases}$$

$$\text{Επίσης η κλίση σε σφαιρικές συντεταγμένες } \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}.$$

Θέμα 3^ο:

(α) Έστω ένα επιφανειακό ρεύμα πυκνότητας $\vec{K}$. Ποια σχέση συνδέει τις εντάσεις του μαγνητικού πεδίου πάνω και κάτω από το ρεύμα ($\vec{B}_{\text{πάνω}}$ και $\vec{B}_{\text{κάτω}}$) με την πυκνότητα $\vec{K}$; (Δεν ζητείται απόδειξη.)

(β) Σε τι μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και σε τι ρεύματα (χωρικά και επιφανειακά) αντιστοιχεί το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A} = e^{-|z|} \sin y \hat{x}$ (σε καρτεσιανές συντεταγμένες x, y, z και σε κατάλληλες μονάδες);

Θέμα 4^ο:

Κυλινδρικός φλοιός απείρου μήκους με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική ακτίνα b , είναι μαγνητισμένος με μαγνήτιση παράλληλη στον άξονά του $\vec{M} = \frac{k}{r} \hat{z}$ (σε κυλινδρικές συντεταγμένες, με k σταθερά).

(α) Ποια τα χωρικά και επιφανειακά δέσμια ρεύματα;

(β) Ποια τα πεδία $\vec{H}$ και $\vec{B}$ σε όλο το χώρο;

$$\text{Δίνεται ο στροβιλισμός σε κυλινδρικές συντεταγμένες } \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r v_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] \hat{z}.$$