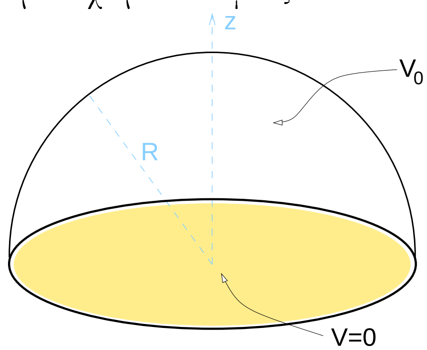
Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Ηλεκτρομαγνητισμού Ι, 25 Μαΐου 2010
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα 1^o:

Λεπτό ημισφαιρικό αγώγιμο κέλυφος ακτίνας R φορτίζεται σε δυναμικό V_0. Στο κέλυφος επικολλάται με λεπτή μόνωση κυκλικός δίσκος ίδιου υλικού και ίδιας ακτίνας ο οποίος γειώνεται. Να βρεθεί το δυναμικό στον εσωτερικό χώρο κελύφους–δίσκου.



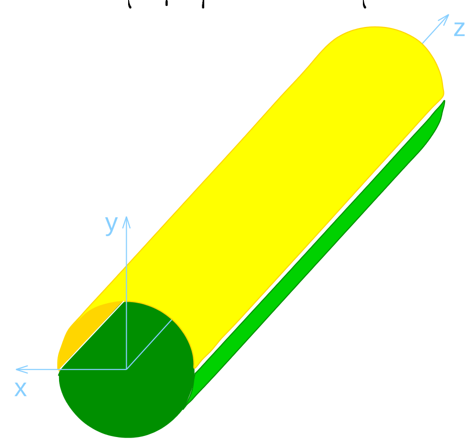
Υπόδειξη: Βρείτε τη λύση στο εσωτερικό σφαιρικού κελύφους με το ένα ημισφαίριο σε δυναμικό V_0 και το άλλο σε δυναμικό $-V_0$. Δείξτε ότι η λύση αυτή μηδενίζεται για $\theta = \pi/2$ και άρα όλες οι συνοριακές συνθήκες του αρχικού προβλήματος ικανοποιούνται.

Θέμα 2^o:

Κυλινδρικό κέλυφος απείρου μήκους, εσωτερικής ακτίνας α και εξωτερικής ακτίνας β αποτελείται από γραμμικό διηλεκτρικό υλικό με σταθερά ηλεκτρική διαπερατότητα ε. Στον άξονα του κελύφους τοποθετούμε γραμμική κατανομή φορτίου με γραμμική πυκνότητα λ. Να βρεθούν τα πεδία $\vec{D}$, $\vec{E}$ και $\vec{P}$ σε όλο το χώρο.

Θέμα 3^o:

(α) Από το νόμο Ampère βρείτε τη διανυσματική σχέση που συνδέει το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ με την πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$, δεχόμενοι τη συνθήκη Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.
Δείξτε ότι αν $\vec{J} = J_z(\vec{r})\ \hat{z}$, οπότε και $\vec{A} = A_z(\vec{r})\ \hat{z}$, προκύπτει σχέση μαθηματικά ισοδύναμη με το νόμο Poisson της ηλεκτροστατικής.
(β) Έστω τα ακόλουθα δυο προβλήματα:
Πρόβλημα Ι: Κυλινδρικό κέλυφος απείρου μήκους και ακτίνας R είναι φορτισμένο, το μισό με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ_0 και το υπόλοιπο με $-\sigma_0$ (βλέπε σχήμα). Συγκεκριμένα, σε κυλινδρικές συντεταγμένες $\sigma(\phi) = \sigma_0$ αν $0 < \phi < \pi$ και $\sigma(\phi) = -\sigma_0$ αν $\pi < \phi < 2\pi$. Ζητούμενο είναι το ηλεκτρικό δυναμικό.
Πρόβλημα ΙΙ: Κυλινδρικό κέλυφος απείρου μήκους και ακτίνας R διαρρέεται από ρεύμα παράλληλο στον άξονά του, το μισό με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα $\vec{K}_0$ και το υπόλοιπο με $-\vec{K}_0$. Συγκεκριμένα, σε κυλινδρικές συντεταγμένες (βλέπε σχήμα) $\vec{K}(\phi) = K_0\hat{z}$ αν $0 < \phi < \pi$ και $\vec{K}(\phi) = -K_0\hat{z}$ αν $\pi < \phi < 2\pi$. Ζητούμενο είναι το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό.



Αν γνωρίζετε ότι η λύση του προβλήματος Ι είναι

$$V = \begin{cases} \dfrac{2R\sigma_0}{\pi\varepsilon_0} \displaystyle\sum_{n=1,3,5,\ldots} \dfrac{\sin(n\phi)}{n^2} \left(\dfrac{R}{r}\right)^n, & r \geq R \\ \dfrac{2R\sigma_0}{\pi\varepsilon_0} \displaystyle\sum_{n=1,3,5,\ldots} \dfrac{\sin(n\phi)}{n^2} \left(\dfrac{r}{R}\right)^n, & r \leq R \end{cases}$$

ποια η λύση του προβλήματος ΙΙ;

Θέμα 4^o:

Λεπτός σφαιρικός φλοιός ακτίνας R είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με ολικό φορτίο Q. Ο φλοιός περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, δημιουργώντας ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 Q}{6\pi R}\vec{\omega}$ στο εσωτερικό του.
Εντός του φλοιού τοποθετείται μικρός σφαιρικός μαγνήτης ακτίνας a και ομοιόμορφης μαγνήτισης $\vec{M}_{\sigma\phi}$.
(α) Να βρεθεί η δύναμη $\vec{F}$ και η ροπή $\vec{N}$ που ασκούνται στο μαγνήτη.
(β) Πότε ο μαγνήτης ισορροπεί;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$P_\ell(-\cos\theta) = (-1)^\ell P_\ell(\cos\theta),\ \int_0^\pi [P_\ell(\cos\theta)]^2 \sin\theta d\theta = \frac{2}{2\ell+1},\ \int_0^{\pi/2} P_\ell(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{1}{\ell(\ell+1)} \left.\frac{dP_\ell(\cos\theta)}{d(\cos\theta)}\right|_{\theta=\pi/2}.$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{m} \cdot \vec{B}\right) = \left(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B} + \vec{m} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) + \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{m} + \vec{B} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{m}\right)$$