Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Ηλεκτρομαγνητισμού I, 18 Σεπτεμβρίου 2009
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα 1^{o}:

Το δυναμικό είναι καθορισμένο πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας R, ώστε στο ένα ημισφαίριο $V = V_0$ ενώ στο άλλο $V = -V_0$, με $V_0 =$ σταθερό. Να βρεθεί το δυναμικό έξω από τη σφαίρα θεωρώντας ότι είναι της μορφής $V(r\,,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} P_\ell\left(\cos\theta\right)$. Επιβεβαιώστε τη διπολική μορφή του δυναμικού σε μεγάλες αποστάσεις.

Θέμα 2^{o}:

Σφαιρικός πυκνωτής ακτίνων R_1 και R_2 ($R_1 < R_2$) γεμίζει με ανισότροπο γραμμικό διηλεκτρικό σταθεράς $\varepsilon(\theta) = \varepsilon_0\left(2 + \cos\theta\right)$. Ο εσωτερικός οπλισμός φορτίζεται με φορτίο $+Q$ και ο εξωτερικός γειώνεται.

(α) Γνωρίζοντας ότι δεν υπάρχουν χωρικά φορτία πόλωσης και άρα το δυναμικό είναι της μορφής $V(r\,,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell\left(\cos\theta\right)$, δείξτε ότι $V = V_0 \frac{R_1\left(R_2 - r\right)}{r\left(R_2 - R_1\right)}$ στο χώρο $R_1 \leq r \leq R_2$.

(β) Υπολογίστε τα μεγέθη $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{P}$ στο χώρο μεταξύ των οπλισμών.

(γ) Ολοκληρώνοντας την πυκνότητα ελεύθερου φορτίου $\sigma_{\mathrm{f}}\left(\theta\right)$ του εσωτερικού οπλισμού προσδιορίστε τη σταθερά V_0 συναρτήσει του Q, καθώς και τη χωρητικότητα του πυκνωτή.

Θέμα 3^{o}:

Επίπεδος μεταλλικός δακτύλιος ακτίνων α, β ($\alpha < \beta$) έχει ως άξονα τον άξονα z και κέντρο την αρχή των αξόνων. Ο δακτύλιος διαρρέεται από επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\boldsymbol{K} = K_0\hat{\boldsymbol{\phi}}$, $K_0 =$ σταθερά.

(α) Βρείτε τη μαγνητική ροπή του δακτυλίου $\boldsymbol{m}$ συναρτήσει της ολικής έντασης ρεύματος I και των ακτίνων α, β.

(β) Ποιό το διανυσματικό δυναμικό $\boldsymbol{A}(r\,,\theta)$ σε μεγάλες αποστάσεις από το δακτύλιο ($r \gg \beta$);

Θέμα 4^{o}:

Για ένα μεγάλο κομμάτι μαγνητισμένου υλικού δίνονται το διανυσματικό δυναμικό $\boldsymbol{A} = A_0 e^{-r/a}\hat{\boldsymbol{z}}$ και το πεδίο $\boldsymbol{H} = 0$, όπου A_0 και a σταθερά και $(r\,,\phi\,,z)$ κυλινδρικές συντεταγμένες. Είναι το υλικό γραμμικό; Ποιά τα ρεύματα που υπάρχουν στο εσωτερικό του (ελεύθερα και δέσμια);

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Για τα πολυώνυμα Legendre δίνονται $P_0(\cos\theta) = 1$, $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$, $P_\ell(-\cos\theta) = (-1)^\ell P_\ell(\cos\theta)$,
$\int_0^\pi \left[P_\ell(\cos\theta)\right]^2 \sin\theta d\theta = \frac{2}{2\ell+1}$, $\int_0^{\pi/2} P_\ell(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{1}{\ell\left(\ell+1\right)} \left.\frac{dP_\ell(\cos\theta)}{d(\cos\theta)}\right|_{\theta=\pi/2}$.

Η κλίση σε σφαιρικές $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}\,.$

Η στροφή σε κυλινδρικές $\nabla\times\boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r v_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$