



Θέμα 1^ο:

Συμπαγής αγωγίμη σφαίρα ακτίνας R_1 , με κέντρο την αρχή των αξόνων, περιβάλλεται από ομόκεντρο λεπτό μονωτικό φλοιό ακτίνας R_2 ($R_2 > R_1$). Η σφαίρα γειώνεται και ο φλοιός φορτίζεται με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma(\theta) = \sigma_0(1 + \cos\theta)$, όπου σ_0 σταθερά και θ η γωνία από τον άξονα z . Να βρεθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό σε όλο το χώρο.

$$\Deltaίνεται \text{ ότι η λύση είναι της μορφής } V(r, \theta) = \begin{cases} 0, & r \leq R_1, \\ a_0 + \frac{b_0}{r} + \left(a_1 r + \frac{b_1}{r^2}\right) \cos\theta, & R_1 \leq r \leq R_2, \\ \frac{B_0}{r} + \frac{B_1}{r^2} \cos\theta, & r \geq R_2. \end{cases}$$

Θέμα 2^ο:

Σφαιρικός αγωγός ακτίνας R_1 φέρει φορτίο $+Q$. Ο αγωγός περιβάλλεται μέχρι την ακτίνα R_2 από ένα σφαιρικό στρώμα γραμμικού διηλεκτρικού επιδεκτικότητας χ , ενώ σε ακτίνα R_3 (μεγαλύτερη της R_2) υπάρχει αγωγίμος σφαιρικός φλοιός απειροστού πάχους, φορτισμένος με φορτίο $-Q$.

(α) Ποιά τα πεδία $\vec{D}$ και $\vec{E}$ σε όλο το χώρο;

(β) Πόση ενέργεια πρέπει να δώσουμε για να αλλάξουμε την ακτίνα του εξωτερικού φλοιού από R_3 σε R'_3 (με $R'_3 > R_3$);

Θέμα 3^ο:

Σφαίρα ακτίνας R από γραμμικό μαγνητικό υλικό μεγάλης επιδεκτικότητας ($\chi_m \gg 1$) τοποθετείτε μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$, με το κέντρο της στην αρχή των αξόνων. Το πεδίο $\vec{H}$ εντός της σφαίρας κατά προσέγγιση μηδενίζεται ($\vec{H} \approx 0$ για $0 \leq r < R$). Θεωρείστε ότι υπάρχει βαθμωτό πεδίο Φ_m τέτοιο ώστε $\vec{H} = -\nabla\Phi_m$ και $\nabla^2\Phi_m = 0$.

Από τις συνθήκες $\Phi_m(r = R, \theta) = 0$ και $\vec{H} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{B_0}{\mu_0} \hat{z}$, να βρείτε το δυναμικό Φ_m και το μαγνητικό πεδίο

$\vec{B}(r, \theta)$ έξω από τη σφαίρα.

$$\Deltaίνεται \text{ ότι η λύση είναι της μορφής } \Phi_m(r, \theta) = \begin{cases} 0, & r \leq R, \\ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{b_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos\theta) - \frac{B_0}{\mu_0} r \cos\theta, & r \geq R. \end{cases}$$

Θέμα 4^ο:

Ομοιόμορφα μαγνητισμένη σφαίρα ακτίνας R και μαγνήτισης $\vec{M} = M \hat{z}$ έχει το κέντρο της στην αρχή των αξόνων. Στη θέση $\vec{r} = x \hat{x} + z \hat{z}$ (έξω από τη σφαίρα) βρίσκεται μαγνητικό δίπολο $\vec{m} = m \hat{z}$.

(α) Υπολογίστε την δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης.

(β) Ποιά η δύναμη που δέχεται το δίπολο από τη σφαίρα ($\vec{F} = F_x \hat{x} + F_z \hat{z}$);

Χρησιμοποιήστε (χωρίς απόδειξη) την έκφραση του πεδίου $\vec{B} = \frac{\mu_0 R^3}{r^5} \left[(\vec{M} \cdot \vec{r}) \vec{r} - \frac{1}{3} r^2 \vec{M} \right]$ στο εξωτερικό ομογενώς μαγνητισμένης σφαίρας.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Η κλίση σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$.

Τα πρώτα πολυώνυμα Legendre: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$.