Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Ηλεκτρομαγνητισμού Ι, 18 Σεπτεμβρίου 2008
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα 1^o:

Άπειρη αγώγιμη πλάκα γειώνεται. Από την πλάκα αποκολλάται τμήμα σχήματος δίσκου ακτίνας R. Στη θέση του τοποθετείται δίσκος από το ίδιο μέταλλο και ίδιας ακτίνας που διαχωρίζεται από τη πλάκα με λεπτή μόνωση. Ο δίσκος φορτίζεται σε δυναμικό V_0. Θεωρώντας σύστημα συντεταγμένων με κέντρο O το κέντρο του δίσκου και άξονα $z'Oz$ κάθετο στο επίπεδό του, το δυναμικό στον πάνω ημιχώρο ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) είναι

$$V(r\,,\theta) = \begin{cases} V_0 \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} P_\ell\left(\cos\theta\right) \;, r \geq R \\ V_0 \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} P_\ell\left(\cos\theta\right) \quad, r \leq R \end{cases} .$$

Να προσδιοριστούν οι συντελεστές b_ℓ και a_ℓ αν γνωρίζεται ότι πάνω στον ημιάξονα Oz, δηλ. για $\theta = 0$, $r = z$, το δυναμικό είναι $V(r,0) = V(z) = V_0\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$.

Δίνεται το ανάπτυγμα $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \dfrac{1}{2}u + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}u^2 - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}u^3 + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}u^n \,, 0 \leq u < 1\,.$

Επίσης $P_\ell(1) = 1$.

Παρατήρηση: Οι συντελεστές b_ℓ και a_ℓ δεν είναι ίσοι μεταξύ τους παρότι η συνάρτηση $V(r\,,\theta)$ είναι συνεχής στο $r = R$.

Θέμα 2^o:

Δυο αγώγιμες ομόκεντρες σφαιρικές επιφάνειες έχουν ακτίνες a και b (με $a < b$). Ο χώρος μεταξύ τους είναι γεμάτος με ανομοιογενές διηλεκτρικό διηλεκτρικής σταθεράς $\epsilon = \dfrac{\epsilon_0}{1-\lambda r}$, όπου ϵ_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού, λ θετική σταθερά (μικρότερη από $1/b$) και r η ακτίνα από το κέντρο. Η εσωτερική επιφάνεια φορτίζεται με φορτίο Q ενώ η εξωτερική επιφάνεια γειώνεται.

(α) Ποιά τα πεδία $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{P}$ στο χώρο $a < r < b$;

(β) Ποιά η επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πόλωσης στα $r = a$ και $r = b$;

(γ) Ποιά η χωρική πυκνότητα του φορτίου πόλωσης στο χώρο $a < r < b$;

(δ) Ποιά η χωρητικότητα του συστήματος;

Δίνεται η απόκλιση σε σφαιρικές συντεταγμένες $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\,.$

Θέμα 3^o:

Το διανυσματικό δυναμικό μαγνητοστατικού πεδίου $\boldsymbol{B}$ είναι $A_r = A_\phi = 0\,, A_z = A_0 e^{-r^2/a^2}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

(α) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$.

(β) Ποιά η κατανομή ρεύματος $\boldsymbol{J}$ που παράγει το πεδίο $\boldsymbol{B}$;

Δίνεται ο στροβιλισμός σε κυλινδρικές $\nabla\times\boldsymbol{v} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial\phi} - \dfrac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\dfrac{\partial v_r}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(r v_\phi)}{\partial r} - \dfrac{\partial v_r}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\,.$

Θέμα 4^o:

Μαγνητικό δίπολο $\boldsymbol{m}_1 = m_1\hat{\boldsymbol{y}}$ είναι στερεωμένο στο κέντρο συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$. Ένα δεύτερο δίπολο $\boldsymbol{m}_2 = m_2\hat{\boldsymbol{x}}$ είναι ελεύθερο να κινείται στην ευθεία $z = 0$, $y = d$ (με $d =$σταθερό) χωρίς να αλλάζει η διπολική του ροπή.

(α) Ποιά η δύναμη που ασκείται στο $\boldsymbol{m}_2$;

(β) Ποιό σημείο της ευθείας αποτελεί σημείο ευσταθούς ισορροπίας του $\boldsymbol{m}_2$;