



Θέμα 1^ο:

Έστω μια διάταξη η οποία αποτελείται από δυο ομοαξονικά αγωγίμα κυλινδρικά κελύφη απείρου μήκους, με ακτίνες $R_1 = 0.05\text{m}$ και $R_2 = 0.1\text{m}$. Η εσωτερική επιφάνεια βρίσκεται σε δυναμικό $V_1 = 200\text{V}$ και η εξωτερική σε δυναμικό $V_2 = 100\text{V}$. Βρείτε το δυναμικό ανάμεσα στις δύο επιφάνειες.

$$\text{Δίνεται η γενική λύση: } V(r, \phi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k r^k + \frac{b_k}{r^k} \right) \cos(k\phi) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k r^k + \frac{d_k}{r^k} \right) \sin(k\phi).$$

Θέμα 2^ο:

Αγωγίμη σφαίρα με ακτίνα R και κέντρο την αρχή των αξόνων φέρει ολικό φορτίο Q . Η σφαίρα έχει σφηνωθεί ανάμεσα σε δυο γραμμικά διηλεκτρικά με ηλεκτρικές διαπερατότητες ϵ_1, ϵ_2 , με το κέντρο της να βρίσκεται πάνω στο επίπεδο της επιφάνειας διαχωρισμού των δυο υλικών.

(α) Δείξτε ότι η μόνη συνάρτηση δυναμικού που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες πάνω στην επίπεδη επιφάνεια διαχωρισμού και στην επιφάνεια της σφαίρας είναι η $V(r, \theta) = a/r$ (για $r > R$).

Υπόδειξη: Θεωρείστε ότι το δυναμικό εντός των υλικών (για $r > R$) έχει τη μορφή

$$V_1(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \text{ για } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ και } V_2(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \text{ για } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi.$$

Ακόμα δίνεται ότι $P_{\ell}(-x) = (-1)^{\ell} P_{\ell}(x)$.

(β) Από το ολικό φορτίο Q της σφαίρας προσδιορίστε τη σταθερά a .

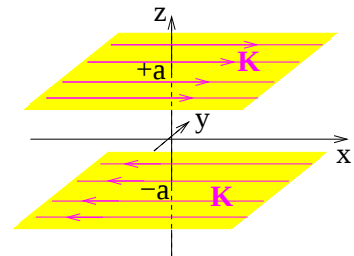
Υπόδειξη: Οι επιφανειακές πυκνότητες ελεύθερου φορτίου σ_1, σ_2 πάνω στη σφαίρα δίνονται από

$$\sigma_1 = -\epsilon_1 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad \sigma_2 = -\epsilon_2 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R}.$$

Δίνεται η κλίση σε σφαιρικές συντεταγμένες $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$.

Θέμα 3^ο:

Τα επίπεδα $z = +a, z = -a$ (σε σύστημα $Oxyz$) διαρρέονται από επιφανειακά ρεύματα $K_0 \hat{x}, -K_0 \hat{x}$, αντίστοιχα, όπως στο σχήμα. Να βρεθεί διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}$ σε όλο το χώρο.



Θέμα 4^ο:

Σφαίρα ακτίνας R με κέντρο O είναι ομογενώς μαγνητισμένη με μαγνήτιση $\mathbf{M} = M \hat{z}$. Ανοίγουμε μια σφαιρική οπή με κέντρο το σημείο O' πάνω στο επίπεδο xy που απέχει απόσταση $R/2$ από το O . Η ακτίνα της οπής είναι $R/6$. Στο κέντρο της οπής τοποθετούμε μαγνητικό δίπολο ροπής $\mathbf{m} = m \hat{z}$.

(α) Ποιό το μαγνητικό πεδίο στο σημείο O ;

(β) Ποιά η τιμή της m ώστε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο O να είναι μηδέν;

Υπόδειξη: Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστό τον τύπο $\mathbf{B}_{\sigma} = (2/3)\mu_0 \mathbf{M}_{\sigma}$ που ισχύει για το εσωτερικό κάποιας συγκεκριμένης κατανομής μαγνήτισης, καθώς και το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό αυτής της κατανομής.

