Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Ηλεκτρομαγνητισμού I, 8 Φεβρουαρίου 2008
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα 1^o:

Βρείτε το δυναμικό $V(r\,,\theta)$ στο χώρο μεταξύ δυο σφαιρών $r = a$ και $r = b$ (με $b > a$) αν γνωρίζετε ότι στην εξωτερική σφαίρα η ακτινική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι $E_r = -E_0 \cos\theta$, ενώ στην εσωτερική σφαίρα $E_r = 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στην ίδια περιοχή.
Υπόδειξη: Η κατάλληλη λύση της Laplace για το πρόβλημα αυτό είναι $V(r\,,\theta) = \left(a_1 r + \dfrac{b_1}{r^2}\right)\cos\theta$.

Θέμα 2^o:

Σε ένα μεγάλο κομμάτι γραμμικού διηλεκτρικού σταθεράς κ, δημιουργείται σφαιρική κοιλότητα ακτίνας R. Στο κέντρο της σφαιρικής κοιλότητας τοποθετείται σημειακό φορτίο Q.
Δίνεται ότι το δυναμικό εντός της κοιλότητας είναι $V_{\text{κοιλ}} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + a_0$ και εντός του διηλεκτρικού $V_{\text{διηλ}} = \dfrac{b_0}{r}$.
Προσδιορίστε τις σταθερές a_0, b_0 από τις συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια της κοιλότητας.
Βρείτε την πόλωση $\boldsymbol{P}$, την κατανομή φορτίων πόλωσης και υπολογίστε το ολικό φορτίο πόλωσης.

Θέμα 3^o:

Ηλεκτρικό ρεύμα διαρρέει άπειρο κυλινδρικό αγωγό ακτίνας R. Η χωρική πυκνότητα ρεύματος είναι $\boldsymbol{J} = \dfrac{a}{r}\hat{\boldsymbol{z}}$ (σε κυλινδρικές συντεταγμένες με z τον άξονα του αγωγού και $r = \sqrt{x^2 + y^2}$).
Μια επιλογή για το διανυσματικό δυναμικό είναι:

$$\boldsymbol{A} = \begin{cases} A_1(r)\ \hat{\boldsymbol{z}}\,, r \le R \\ A_2(r)\ \hat{\boldsymbol{z}}\,, r \ge R \end{cases} \text{, όπου } \nabla^2 A_1 = -\mu_0 \frac{a}{r} \quad \text{και } \nabla^2 A_2 = 0\,.$$

(α) Δείξτε ότι $A_1(r) = -\mu_0 a r$ και $A_2(r) = C_1 \ln r + C_2$.
(β) Από τις συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια του αγωγού ($r = R$) να βρεθεί η συνάρτηση $A_2(r)$.
(γ) Ποιό το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ σε όλο το χώρο;

Θέμα 4^o:

Κυλινδρικός φλοιός απείρου μήκους με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική ακτίνα b, είναι ομογενώς μαγνητισμένος με μαγνήτιση $\boldsymbol{M}$ παράλληλη στον άξονά του. Ποιό το μαγνητικό πεδίο σε όλο το χώρο;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

	Καρτεσιανές (x, y, z)	Κυλινδρικές (r, ϕ, z) $\left\{\begin{matrix} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{matrix}\right\}$	Σφαιρικές (r, θ, ϕ) $\left\{\begin{matrix} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{matrix}\right\}$
$\boldsymbol{v}$	$v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}$	$v_r\hat{\boldsymbol{r}} + v_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}$	$v_r\hat{\boldsymbol{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + v_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
∇f	$\dfrac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$	$\dfrac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$	$\dfrac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$	$\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$	$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$	$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$
$\nabla\times\boldsymbol{v}$	$\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}} +$ $\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}} +$ $\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$	$\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \phi} - \dfrac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{r}} +$ $\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(r v_\phi)}{\partial r} - \dfrac{\partial v_r}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$	$\dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial(v_\phi\sin\theta)}{\partial\theta} - \dfrac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{r}} +$ $\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial\phi} - \dfrac{\partial(r v_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$\nabla^2 f$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial f}{\partial r}) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial\theta}) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
$d\boldsymbol{l}$	$dx\hat{\boldsymbol{x}} + dy\hat{\boldsymbol{y}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}$	$dr\hat{\boldsymbol{r}} + rd\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}$	$dr\hat{\boldsymbol{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$d\boldsymbol{a}$	$dydz\hat{\boldsymbol{x}} + dxdz\hat{\boldsymbol{y}} + dxdy\hat{\boldsymbol{z}}$	$rd\phi dz\hat{\boldsymbol{r}} + drdz\hat{\boldsymbol{\phi}} + rdrd\phi\hat{\boldsymbol{z}}$	$r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\boldsymbol{r}} + r\sin\theta drd\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} + rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$d\tau$	$dxdydz$	$rdrd\phi dz$	$r^2\sin\theta drd\theta d\phi$