Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Ηλεκτρομαγνητισμού Ι, 1 Οκτωβρίου 2007
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα $1^{\text{ο}}$:

Ηλεκτρικό δίπολο με διπολική ροπή $\boldsymbol{p} = p\hat{\boldsymbol{z}}$ βρίσκεται στο κέντρο συστήματος συντεταγμένων και περιβάλεται από αγώγιμο γειωμένο σφαιρικό φλοιό ακτίνας R και κέντρο την αρχή των αξόνων. Το δυναμικό του διπόλου, απουσία του σφαιρικού φλοιού, γράφεται σε σφαιρικές συντεταγμένες $V_0(r\,,\theta) = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}P_1(\cos\theta)$.

Η παρουσία του αγώγιμου γειωμένου σφαιρικού φλοιού αλλάζει το δυναμικό στο εσωτερικό της σφαίρας σε $V(r\,,\theta) = V_0(r\,,\theta) + V_1(r\,,\theta)$, όπου $V_1(r\,,\theta)$ λύση της Laplace ομαλή για $r \to 0$. Από τη συνοριακή συνθήκη για $r = R$ υπολογίστε το $V_1(r\,,\theta)$ και δείξτε ότι το δυναμικό είναι $V(r\,,\theta) = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1 - \dfrac{r^3}{R^3}\right)P_1(\cos\theta)$.

Θέμα $2^{\text{ο}}$:

Έχουμε ένα πυκνωτή με παράλληλες πλάκες εμβαδού A που βρίσκονται σε απόσταση d, στον οποίο μπορεί να εισαχθεί διηλεκτρικό με διηλεκτρική σταθερά ε.

(α) Βρείτε το λόγο ενέργειας με διηλεκτρικό προς ενέργεια χωρίς διηλεκτρικό όταν το φορτίο $\pm Q$ παραμένει σταθερό πριν και μετά την είσοδο του διηλεκτρικού.

(β) Επαναλάβατε για την περίπτωση που το δυναμικό V μεταξύ των πλακών παραμένει ίδιο πριν και μετά.

(γ) Τι συμπέρασμα βγάζεται από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων στις ερωτήσεις (α) και (β);

Θέμα $3^{\text{ο}}$:

Το διανυσματικό δυναμικό μαγνητοστατικού πεδίου $\boldsymbol{B}$ είναι $A_r = A_\phi = 0\,, A_z = A_0 e^{-r^2/a^2}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

(α) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$.

(β) Ποιά η κατανομή ρεύματος $\boldsymbol{J}$ που παράγει το πεδίο $\boldsymbol{B}$;

Θέμα $4^{\text{ο}}$:

Ένας μαγνητισμένος κύβος ακμής a βρίσκεται στην περιοχή $|x|\,, |y|\,, |z| < a/2$ συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$, και φέρει μαγνήτιση $\boldsymbol{M} = \lambda\, \sin(2\pi z/a)\ \hat{\boldsymbol{z}}$, όπου $\lambda =$ σταθερά.

(α) Ποιά τα δέσμια ρεύματα στο εσωτερικό και στην επιφάνεια του κύβου;

(β) Ποιά η συνολική διπολική ροπή του κύβου;

(γ) Πάνω στον άξονα z και σε μεγάλες αποστάσεις από τον κύβο ($|z| \gg a$), ποιά η εξάρτηση του πεδίου $\boldsymbol{B}$ από το z; Συγκεκριμένα είναι $B \propto z^{-3}$ ή $B \propto z^{-4}$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

	Καρτεσιανές (x, y, z)	Κυλινδρικές (r, ϕ, z) $\left\{\begin{array}{c} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{array}\right\}$	Σφαιρικές (r, θ, ϕ) $\left\{\begin{array}{c} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right\}$
$\boldsymbol{v}$	$v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}$	$v_r\hat{\boldsymbol{r}} + v_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}$	$v_r\hat{\boldsymbol{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + v_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
∇f	$\dfrac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$	$\dfrac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$	$\dfrac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$	$\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$	$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$	$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial (v_\theta\sin\theta)}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$
$\nabla\times\boldsymbol{v}$	$\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$	$\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \phi} - \dfrac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\dfrac{\partial v_r}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} - \dfrac{\partial v_r}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$	$\dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial (v_\phi\sin\theta)}{\partial \theta} - \dfrac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial \phi} - \dfrac{\partial (r v_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$\nabla^2 f$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial f}{\partial r}) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial \theta}) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
$d\boldsymbol{l}$	$dx\hat{\boldsymbol{x}} + dy\hat{\boldsymbol{y}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}$	$dr\hat{\boldsymbol{r}} + rd\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}$	$dr\hat{\boldsymbol{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$d\boldsymbol{a}$	$dydz\hat{\boldsymbol{x}} + dxdz\hat{\boldsymbol{y}} + dxdy\hat{\boldsymbol{z}}$	$rd\phi dz\hat{\boldsymbol{r}} + drdz\hat{\boldsymbol{\phi}} + rdrd\phi\hat{\boldsymbol{z}}$	$r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\boldsymbol{r}} + r\sin\theta drd\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} + rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$d\tau$	$dxdydz$	$rdrd\phi dz$	$r^2\sin\theta drd\theta d\phi$