Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Ηλεκτρομαγνητισμού Ι, 4 Σεπτεμβρίου 2007
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα 1^o:
Αφόρτιστος άπειρος αγώγιμος κύλινδρος ακτίνας R, τοποθετείται κάθετα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Ο άξονας του κυλίνδρου ταυτίζεται με τον άξονα z συστήματος $Oxyz$, ενώ το ομογενές πεδίο γράφεται $\boldsymbol{E}_{o\mu} = -E_0\hat{\boldsymbol{x}}$. Θεωρώντας το δυναμικό σε πολύ μεγάλα r ως $V_\infty = E_0 r\cos\phi$,
(α) δείξτε ότι το δυναμικό στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι μηδέν και
(β) βρείτε το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο έξω από τον αγωγό.
Δίνεται η συμμετρική προς τον άξονα x γενική λύση: $V(r\,,\phi) = a_0 + b_0\ln r + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k r^k + b_k\frac{1}{r^k}\right)\cos(k\phi)$.

Θέμα 2^o:
Ο χώρος μεταξύ δύο παράλληλων αγώγιμων δίσκων ακτίνας R, που απέχουν απόσταση $d \ll R$, είναι γεμάτος με μη-ομογενές διηλεκτρικό. Η ηλεκτρική διαπερατότητα του υλικού είναι συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο $\epsilon(r) = \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)\, r/R$. Υπολογίστε την χωρητικότητα.

Θέμα 3^o:
(α) Βρείτε διανυσματικό δυναμικό για ένα αγωγό απείρου μήκους που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I.
Υπόδειξη: Α΄ τρόπος: Αφού βρείτε το ηλεκτροστατικό δυναμικό από γραμμική κατανομή φορτίου, χρησιμοποιήστε την αναλογία μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού με ηλεκτροστατικό δυναμικό. Β΄ τρόπος: Λύστε την διαφορική εξίσωση $\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. *Γ΄ τρόπος: Χρησιμοποιήστε την ισοδύναμη ολοκληρωτική σχέση* $\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{a}$.
(β) Δύο παράλληλοι ρευματοφόροι αγωγοί απείρου μήκους διαρρέονται από ρεύματα ίσης έντασης I και αντίθετης φοράς. Σε σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ οι αγωγοί είναι παράλληλοι στον άξονα $\hat{z}$ και περνούν από τα σημεία $(-\alpha, 0, 0)$ και $(\alpha, 0, 0)$ αντίστοιχα. Αν $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{0}$ για $|x|/\alpha\to\infty\,, |y|/\alpha\to\infty$, ποιό το διανυσματικό δυναμικό $\boldsymbol{A}$ σε σημείο (x, y, z); Ποιά η προσεγγιστική έκφραση για το δυναμικό σε σημεία $|x|$ ή $|y| \gg \alpha$;

Θέμα 4^o:
(α) Σχετικά με τις οριακές συνθήκες των πεδίων $\boldsymbol{B}$ και $\boldsymbol{H}$, αποδείξτε τα ακόλουθα.
(α_1) Η συνιστώσα του $\boldsymbol{B}$ κάθετα στην επιφάνεια διαχωρισμού δύο μέσων είναι συνεχής.
(α_2) Η εφαπτομενική συνιστώσα του $\boldsymbol{H}$ είναι συνεχής αν δεν υπάρχουν επιφανειακά ελεύθερα ρεύματα.
Δίδονται $\iiint \nabla\cdot\boldsymbol{C}\; d\tau = \oiint \boldsymbol{C}\cdot d\boldsymbol{a}$ και $\iint \nabla\times\boldsymbol{C}\cdot d\boldsymbol{a} = \oint \boldsymbol{C}\cdot d\boldsymbol{l}$.
(β) Στο χώρο υπάρχει μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ και πεδίο $\boldsymbol{H}$ τα οποία σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφονται

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} B_0\cos\theta\;\hat{\boldsymbol{r}} - B_0\sin\theta\;\hat{\boldsymbol{\theta}}\,, & r < R \\ \dfrac{\lambda_1}{r^3}\cos\theta\;\hat{\boldsymbol{r}} + \dfrac{\lambda_1}{2r^3}\sin\theta\;\hat{\boldsymbol{\theta}}\,, & r > R \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{H} = \begin{cases} \lambda_2\boldsymbol{B}\,, & r < R \\ \lambda_3\boldsymbol{B}\,, & r > R \end{cases}\,,$$

όπου $B_0\,, R\,, \lambda_1\,, \lambda_2\,, \lambda_3$ σταθερά.
Με δεδομένο ότι δεν υπάρχουν ελεύθερα ρεύματα και ότι ο χώρος $r > R$ είναι κενός, να προσδιοριστούν τα $\lambda_1\,, \lambda_2\,, \lambda_3$ (τα B_0 και R θεωρούνται γνωστά). Ποιά κατανομή μαγνήτισης δημιουργεί τα πεδία;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

	Καρτεσιανές (x, y, z)	Κυλινδρικές (r, ϕ, z) $\left\{\begin{array}{c} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{array}\right\}$	Σφαιρικές (r, θ, ϕ) $\left\{\begin{array}{c} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right\}$
$\boldsymbol{v}$	$v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}$	$v_r\hat{\boldsymbol{r}} + v_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}$	$v_r\hat{\boldsymbol{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + v_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$
$\nabla\times\boldsymbol{v}$	$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(v_\phi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
$d\boldsymbol{l}$	$dx\hat{\boldsymbol{x}} + dy\hat{\boldsymbol{y}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}$	$dr\hat{\boldsymbol{r}} + rd\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}$	$dr\hat{\boldsymbol{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$d\boldsymbol{a}$	$dydz\hat{\boldsymbol{x}} + dxdz\hat{\boldsymbol{y}} + dxdy\hat{\boldsymbol{z}}$	$rd\phi dz\hat{\boldsymbol{r}} + drdz\hat{\boldsymbol{\phi}} + rdrd\phi\hat{\boldsymbol{z}}$	$r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\boldsymbol{r}} + r\sin\theta drd\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} + rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$d\tau$	$dxdydz$	$rdrd\phi dz$	$r^2\sin\theta drd\theta d\phi$