Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Ηλεκτρομαγνητισμού Ι, 7 Φεβρουαρίου 2006
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: ____________

Θέμα $1^{\text{ο}}$:

Το δυναμικό στην κυλινδρική επιφάνεια ενός κυλινδρικού φλοιού απείρου μήκους και ακτίνας R είναι $\kappa \sin(5\phi)$. Βρείτε το δυναμικό στο χώρο μέσα και έξω από τον κυλινδρικό φλοιό καθώς και την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου πάνω στην κυλινδρική επιφάνεια.
Γενική λύση: $V(r\,,\phi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k r^k + b_k \frac{1}{r^k} \right) [c_k \cos(k\phi) + d_k \sin(k\phi)]$.

Θέμα $2^{\text{ο}}$:

Μια αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R διατηρείται σε δυναμικό V_0 και είναι η μισή βυθισμένη σε ένα γραμμικό διηλεκτρικό επιδεκτικότητας χ_e που καταλαμβάνει όλη την περιοχή $z < 0$. Δίδεται ότι το ηλεκτρικό δυναμικό παντού έξω από τη σφαίρα είναι $V(r) = V_0 R/r$. Βρείτε την κατανομή των δέσμιων και των ελεύθερων φορτίων.

Θέμα $3^{\text{ο}}$:

Σ' ένα αρχικό ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}_0$ τοποθετείται ένας άπειρος επίπεδος και λεπτός αγωγός που διαρρέεται από σταθερό επιφανειακό ρεύμα $\boldsymbol{J}_s$ A/m. Να βρείτε το μαγνητικό πεδίο σε κάθε πλευρά του αγωγού (**διανυσματικά**) χρησιμοποιώντας τα γνωστά για τις οριακές συνθήκες.

Θέμα $4^{\text{ο}}$:

Σφαιρικός φλοιός εσωτερικής ακτίνας a και εξωτερικής b είναι **ομογενώς** μαγνητισμένος με μαγνήτιση $\boldsymbol{M}$.
(α) Ποιό το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ και το πεδίο $\boldsymbol{H}$ που δημιουργεί σε κάθε σημείο του χώρου;
(β) Σχεδιάστε τις δυναμικές γραμμές του πεδίου $\boldsymbol{B}$.
Υπόδειξη: Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστό τον τύπο $\boldsymbol{B}_\sigma = (2/3)\mu_0 \boldsymbol{M}_\sigma$ που ισχύει για το εσωτερικό κάποιας συγκεκριμένης κατανομής μαγνήτισης, καθώς και το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό αυτής της κατανομής.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

	Καρτεσιανές (x, y, z)	Κυλινδρικές (r, ϕ, z) $\left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{array} \right\}$	Σφαιρικές (r, θ, ϕ) $\left\{ \begin{array}{c} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{array} \right\}$
$\boldsymbol{v}$	$v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}$	$v_r\hat{\boldsymbol{r}} + v_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}$	$v_r\hat{\boldsymbol{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + v_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$\nabla \cdot \boldsymbol{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (v_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$
$\nabla \times \boldsymbol{v}$	$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}} +$ $\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}} +$ $\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{r}} +$ $\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (v_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{r}} +$ $\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
$d\boldsymbol{l}$	$dx\hat{\boldsymbol{x}} + dy\hat{\boldsymbol{y}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}$	$dr\hat{\boldsymbol{r}} + rd\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}$	$dr\hat{\boldsymbol{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$d\boldsymbol{a}$	$dydz\hat{\boldsymbol{x}} + dxdz\hat{\boldsymbol{y}} + dxdy\hat{\boldsymbol{z}}$	$rd\phi dz\hat{\boldsymbol{r}} + drdz\hat{\boldsymbol{\phi}} + rdrd\phi\hat{\boldsymbol{z}}$	$r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\boldsymbol{r}} + r\sin\theta drd\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} + rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$d\tau$	$dxdydz$	$rdrd\phi dz$	$r^2\sin\theta drd\theta d\phi$