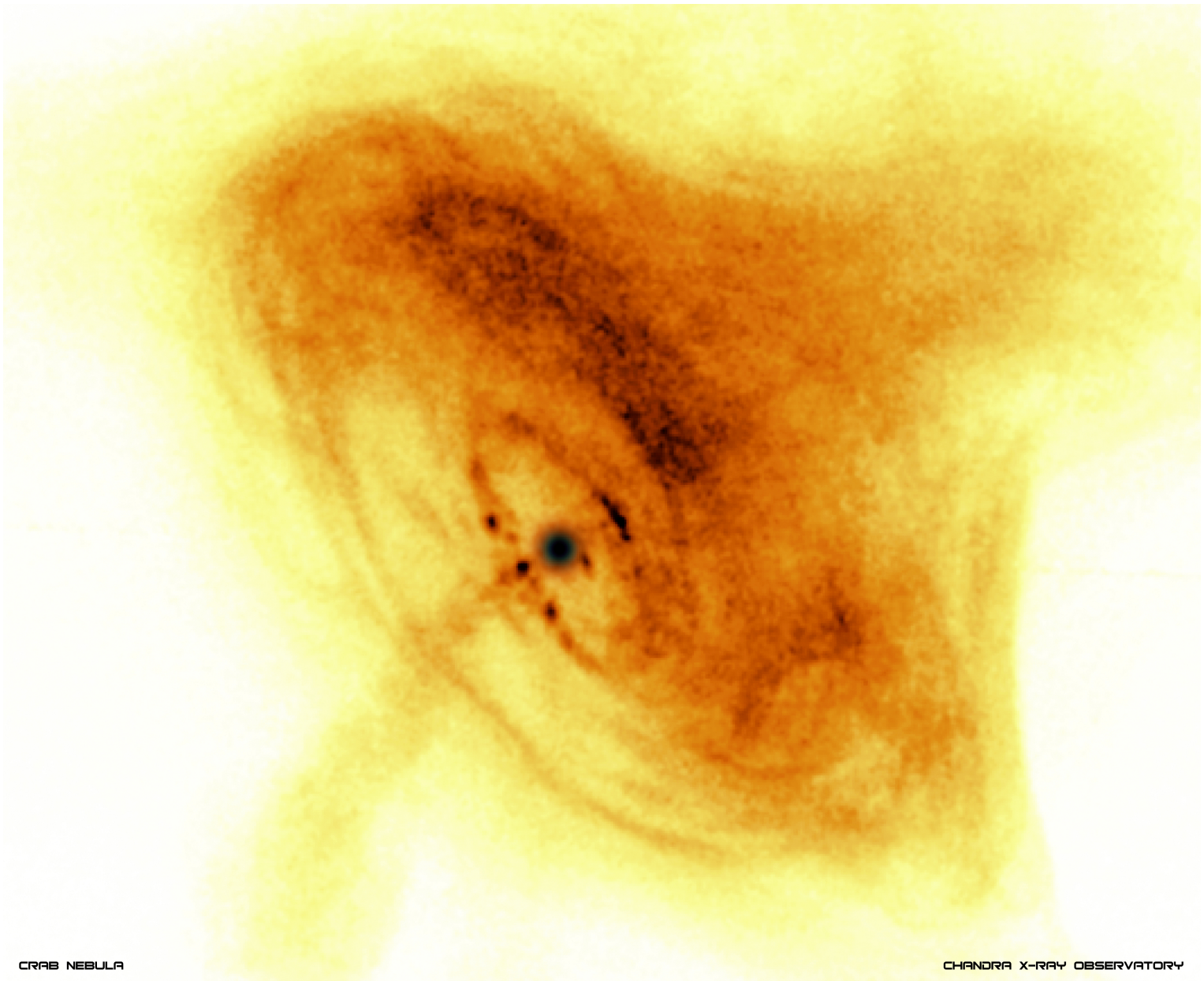


Απόστολος Μαστιχιάδης – Νεκτάριος Βλαχάκης

ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗ ΥΨΗΛΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ



CRAB NEBULA

CHANDRA X-RAY OBSERVATORY

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ 2010

Απόστολος Μαστιχιάδης

Αναπληρωτής Καθηγητής
Πανεπιστημίου Αθηνών

ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗ ΥΨΗΛΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ

Σημειώσεις από τις παραδόσεις του μαθήματος κατεύθυνσης
κατά το χειμερινό εξάμηνο 2006-2007



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ενώ τα κλασσικά όργανα αστρονομικής παρατήρησης, δηλαδή το ανθρώπινο μάτι στην αρχή και τα οπτικά τηλεσκόπια αργότερα, έδιναν μία εικόνα του Σύμπαντος που βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία, οι πρόσφατες παρατηρήσεις σε όλο το εύρος του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος φανερώνουν ένα Σύμπαν γεμάτο από ενεργητικά φαινόμενα: καταρρεύσεις αστέρων, εκρήξεις υπερκαινοφανών, δημιουργία δίσκων συσσώρευσης, εκροές σχετικιστικού πλάσματος, εκλάμψεις ακτίνων γ , επιτάχυνση σωματιδίων και παραγωγή ακτινοβολίας X και γ . Τα φαινόμενα αυτά συνδέονται κυρίως με συμπαγή αστροφυσικά αντικείμενα, δηλαδή αστέρες νετρονίων και μελανές οπές στις διάφορες εκφάνσεις τους: pulsars, διπλά συστήματα ακτίνων X , quasars και άλλους πυρήνες ενεργών γαλαξιών. Αν και τα παραπάνω διαφέρουν πολύ μεταξύ τους, ωστόσο σχετίζονται με διαφορους κοινούς μηχανισμούς υψηλών ενεργειών και συνιστούν μία νέα (και πολύ λιγότερο οικεία) εικόνα του Σύμπαντος από αυτή που γνώριζαν οι άνθρωποι μέχρι τα μέσα του εικοστού αιώνα. Αυτή η ανάγκη εξερεύνησης της σχετικιστικής πλευράς του Σύμπαντος δημιούργησε την Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών.

Σκοπός της Αστροφυσικής Υψηλών Ενεργειών λοιπόν είναι να μελετήσει τα αστροφυσικά αντικείμενα που συνδέονται με τα φαινόμενα υψηλών ενεργειών και να κατανοήσει εκείνους των φυσικούς μηχανισμούς που είναι υπεύθυνοι για τη δημιουργία αυτών των φαινομένων. Οι δυσκολίες ενός τέτοιου εγχειρήματος είναι προφανείς. Οι φυσικοί μηχανισμοί που παρουσιάζουν ενδιαφέρον είναι αδύνατον να προσομοιωθούν στο εργαστήριο –πως θα μπορούσαμε άραγε να πλησιάσουμε σε κάποιο εργαστήριο τις συνθήκες που επικρατούν στην άμεση γειτονιά μιας μελανής οπής ή στο ωστικό κύμα που δημιουργείται κατά την έκρηξη ενός υπερκαινοφανούς; Το ζητούμενο συνεπώς είναι η κατάλληλη επιλογή φυσικών νόμων και η κατασκευή μοντέλων που να προσομοιάζουν τις φυσικές συνθήκες στις πηγές και ταυτόχρονα να μπορούν να εξηγήσουν με κάποια πειστικότητα τις διάφορες παρατηρήσεις. Είναι εντυπωσιακό να αναλογισθεί κανείς, πόσα προβλήματα της Αστροφυσικής Υψηλών Ενεργειών, όσο ακραία κι αν αυτά φάνηκαν αρχικά, ερμηνεύθηκαν τελικά με βάση γνωστές φυσικές διαδικασίες, χωρίς να χρειασθεί να καταφύγουμε σε διάφορου τύπου εξωτικές λύσεις. (Για παράδειγμα, όταν ανακαλύφθηκαν οι quasars, πολλοί μίλησαν για ανάγκη εισαγωγής 'νέας Φυσικής' προκειμένου να εξηγηθούν οι πραγματικά περίεργες ιδιότητές τους. Τελικά η πρόσπτωση ύλης σε μελανές οπές, φαινόμενο που παρατηρείται, σε πολύ μικρότερες κλίμακες, ακόμα και στον Γαλαξία μας, έδωσε μία ικανοποιητική απάντηση στο πρόβλημα της τεράστιας έκλυσης ενέργειας που παρατηρείται).

Μία άλλη σημαντική διάσταση του προβλήματος είναι η συγγένεια μερικών τουλάχιστον θεμάτων που απασχολούν την Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών και την Φυσική της Κοσμικής Ακτινοβολίας. Για παράδειγμα, οι παρατηρήσεις σε ακτίνες γ φανέρωνουν την ύπαρξη σχετικιστικών σωματιδίων σε αστροφυσικές πηγές όπως τα κελύφη υπερκαινοφανών, οι pulsars και οι ενεργοί γαλαξίες. Θα μπορούσε λοιπόν τα σωματίδια της κοσμικής ακτινοβολίας τα οποία παρατηρούμε να παράγονται σε κάποιες από αυτές τις πηγές και στη συνέχεια να διαχέονται στον Γαλαξία μας φτάνοντας τελικά στη Γη; Η συνάφεια των παραπάνω τομέων δεν σταματάει όμως

εδώ. Από παρατηρήσεις του δίσκου του Γαλαξία μας στα ραδιοκύματα και στις ακτίνες γ παίρνουμε πληροφορίες για την κοσμική ακτινοβολία στις περιοχές αυτές. Και βέβαια επειδή η κοσμική ακτινοβολία είναι φορτισμένα σωματίδια υψηλών ενεργειών, οι φυσικές αρχές οι οποίες διέπουν την διάδοση και ακτινοβολία τους στο Ηλιακό μας Σύστημα είναι οι ίδιες με τις φυσικές αρχές που διέπουν την διάδοση και ακτινοβολία των αντίστοιχων σωματιδίων στις αστροφυσικές πηγές. Ακόμα και οι αδρονικοί και ηλεκτρομαγνητικοί καταωνισμοί οι οποίοι δημιουργούνται κατά την είσοδο των σωματιδίων της κοσμικής ακτινοβολίας στην γήινη ατμόσφαιρα μπορεί να είναι ίδιοι με αυτούς που δημιουργούνται (τηρουμένων κάποιων αναλογιών) σε διάφορα αστροφυσικά περιβάλλοντα. Δεν είναι τυχαίο άλλωστε ότι σήμερα ένα μεγάλο μέρος της Φυσικής της Κοσμικής Ακτινοβολίας, της Αστροφυσικής Υψηλών Ενεργειών και διαφόρων παρατηρησιακών τομέων όπως της Αστρονομίας Ακτίνων γ και της Αστρονομίας Νετρίνων ενώνονται κάτω από το κοινό όνομα Αστροσωματιδιακή Φυσική.

Η Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών, όπως και πολλοί άλλοι κλάδοι άλλωστε, οφελήθηκε από μια σειρά από επιστημονικά και τεχνολογικά επιτεύγματα. Αυτά είναι:

1. Οι διαρκώς βελτιούμενες τεχνικές παρατηρήσεων. Για παράδειγμα, ο ουρανός των ακτίνων X περιείχε περί τις δέκα πηγές στο τέλος της δεκαετίας του 1960. Σήμερα περιέχει πολλές δεκάδες χιλιάδες πηγές με ό,τι αυτό συνεπάγεται (καλή στατιστική και ταξινόμηση πηγών, αξιολόγηση, κλπ). Επίσης ο συνδυασμός παρατηρήσεων που έχουμε για συγκεκριμένες πηγές σε πολλές περιοχές του Η/Μ φάσματος βοήθησε πολύ στο να έχουμε μία καλύτερη εικόνα αυτών των πηγών.
2. Η συμβολή της θεωρητικής φυσικής. Σχεδόν κάθε σημαντική εξέλιξη της Φυσικής είχε τον αντίστοιχο αντίκτυπο όχι μόνο στην Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών αλλά στην Αστροφυσική γενικότερα. Κλασικό βέβαια παράδειγμα αποτελεί η εφαρμογή των πυρηνικών καύσεων στα κέντρα των αστέρων. Πιο πρόσφατα παραδείγματα αποτελούν η εφαρμογή της υπεραγωγιμότητας και υπερρευστότητας στους αστέρες νετρονίων, ο ρόλος των νετρίνων κατά την έκρηξη των υπερκαινοφανών και η εφαρμογή των μηχανισμών ακτινοβολίας σε πηγές που παρουσιάζουν μη θερμικά φάσματα.
3. Ο ρόλος των ηλεκτρονικών υπολογιστών για την κατασκευή λεπτομερών μοντέλων προσομοίωσης και αναπαραγωγής των παρατηρησιακών δεδομένων. Με την διαρκώς αυξανόμενη δύναμη των σύγχρονων υπολογιστών είναι δυνατή η κατασκευή μοντέλων τα οποία να παίρνουν υπόψη πολλές παραμέτρους του προβλήματος. Λεπτομερείς συγκρίσεις των αποτελεσμάτων με τις παρατηρήσεις οδηγούν σε βελτιώσεις ή και απορρίψεις των προτεινόμενων μοντέλων.

Ερευνητικά η Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών αντιμετωπίζει σήμερα ένα πλήθος ερωτημάτων που ζητούν πειστικά απάντηση. Γενικά αυτά σχετίζονται με την φύση των Κοσμικών Επιταχυντών και τους Μηχανισμούς Ακτινοβολίας. Εξειδικεύοντας θα λέγαμε ότι μερικά από τα προβλήματα αυτά είναι

- Ακτινοβολία από αστέρες νετρονίων και μελανές οπές - Ρόλος του δίσκου συσσώρευσης.
- Μαγνητόσφαιρες των pulsars: Επιτάχυνση και ακτινοβολία σε παρουσία ισχυρών μαγνητικών πεδίων.
- Επιτάχυνση σωματιδίων σε κελύφη υπερκαινοφανών.
- Δημιουργία πιδάκων από Ενεργούς Γαλαξίες. Σχέση του φαινομένου με μελανές οπές και φυσικές αναλογίες με τους μικρο-quasars που παρατηρήθηκαν πρόσφατα στον Γαλαξία μας.

- Προέλευση του υπόβαθρου ακτινοβολίας X και γ.
- Φύση του φαινομένου των εκλάμψεων ακτίνων γ.
- Φύση των πηγών κοσμικής ακτινοβολίας (ενέργειες $> 10^{20}$ eV).

Το πρόβλημα της επιτάχυνσης σωματιδίων που εμφανίζεται σε ένα πλήθος περιπτώσεων είναι τόσο καίριο ώστε να το περιλάβει το Ινστιτούτο Φυσικής των Ηνωμένων Πολιτειών ως ένα από πιο σημαντικά της τρέχουσας δεκαετίας, όχι μόνο στο χώρο της Αστροφυσικής, αλλά της Φυσικής γενικότερα.

Παρόλο που η Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών καλύπτει ένα μεγάλο αριθμό θεμάτων και εκτείνεται προς διάφορες περιοχές της σύγχρονης Αστροφυσικής, οι ανάγκες του παρόντος μαθήματος μας υποχρεώνουν να περιορίσουμε δραστικά τη θεματολογία και να εστιασθούμε κυρίως στην παρουσίαση των βασικών αρχών του κλάδου, δηλαδή στην παρουσίαση εκείνων των φυσικών διαδικασιών που χρησιμοποιούνται σαν εργαλεία στην κατανόηση των διαφόρων αστροφυσικών φαινομένων υψηλών ενεργειών. Έτσι το μέρος της Αστροφυσικής Υψηλών Ενεργειών με το οποίο θα ασχοληθούμε εδώ προσπαθεί να απαντήσει στο εξής ερωτήμα: Ποιές, από τις πολλές, φυσικές διαδικασίες ακτινοβολίας που υπάρχουν έχουν σχέση με την παρατηρούμενη ακτινοβολία από πηγές υψηλών ενεργειών και τι μας φανερώνουν για τη φύση των πηγών αυτών; Όπως θα δούμε η απάντηση ποικίλλει κατά περίπτωση όπως επίσης και ο βαθμός αποδοχής της. Ελπίζω ότι η γενική παρουσίαση των φυσικών διαδικασιών και μετά η εφαρμογή σε συγκεκριμένα αστροφυσικά φαινόμενα υψηλών ενεργειών θα βοηθήσει σε μία καλύτερη κατανόηση του αντικειμένου ενός τόσο ενδιαφέροντος όσο και σύγχρονου κλάδου.

2. ΤΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΤΗΣ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ ΥΨΗΛΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ

Η Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών (από εδώ και πέρα θα αναφερόμαστε σε αυτή με το ακρωνύμιο ΑΥΕ) δημιουργήθηκε σαν ένας ακόμα κλάδος της Αστροφυσικής μετά από ορισμένες παρατηρήσεις που έδειξαν ότι στον Γαλαξία μας, αλλά και έξω από αυτόν, υπάρχουν πηγές και φαινόμενα που φανερώνουν την ύπαρξη σωματίων και φωτονίων υψηλών ενεργειών. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε αυτές τις γεννεσιουργές αιτίες. Στο πρώτο μέρος θα αναπτύξουμε τα κυριότερα χαρακτηριστικά της κοσμικής ακτινοβολίας. Στο δεύτερο μέρος θα αναφερθούμε σε εκείνες τις παρατηρήσεις που φανέρωσαν την ύπαρξη σωματιδίων υψηλών ενεργειών σε αστροφυσικά περιβάλλοντα. Επίσης θα επιχειρήσουμε μία ταξινόμηση των πηγών με βάση την συχνότητα στην οποία αυτές πρωτοπαρατηρήθηκαν.

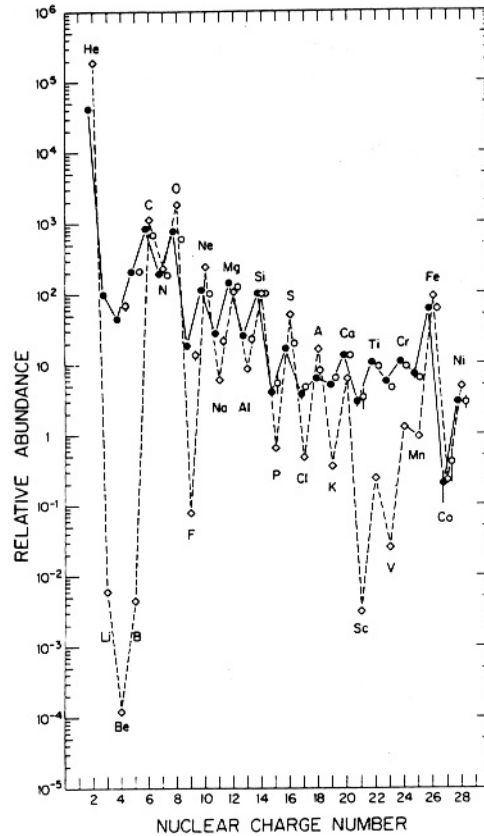
2.1. ΚΟΣΜΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ

Η Κοσμική Ακτινοβολία αποτελείται από ιονισμένους πυρήνες (πρωτόνια, σωματία άλφα, αλλά και βαρύτερους πυρήνες) οι οποίοι εισέρχονται στην ατμόσφαιρα της Γης με ρυθμό 1000 περίπου σωματίων/m²/sec. Η πλειοψηφία αυτών των πυρήνων έχουν σχετικιστικές ενέργειες, με ένα πολύ μικρό μέρος τους να φτάνει μέχρι ενέργειες 3.10²⁰ eV (~50 J) που είναι και οι πιο υψηλές ενέργειες που έχουν ποτέ παρατηρηθεί. Τα σωματία της Κοσμικής Ακτινοβολίας, τουλάχιστον μέχρι κάποια ενέργεια, εισέρχονται ισοτροπικά στην ατμόσφαιρα της Γης, η Γη δηλαδή μοιάζει να είναι εμβαπτισμένη σε μία 'θάλασσα' από σχετικιστικά σωματία. Παρόλο που η κοσμική ακτινοβολία είναι γνωστή από τις αρχές του 20ου αιώνα, η προέλευση της εξακολουθεί να είναι άγνωστη. Σήμερα υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις (αλλά όχι ακόμα αποδείξεις) ότι ένα μεγάλο μέρος της είναι Γαλαξιακής προέλευσης, ενώ τα σωματίδια πολύ υψηλών ενεργειών προφανώς προέρχονται από εξωγαλαξιακές πηγές.

2.1.1. Σύσταση στοιχείων

Το Σχήμα 2.1 παρουσιάζει την σύσταση των στοιχείων στην Κοσμική Ακτινοβολία και, για σύγκριση, την αντίστοιχη σύσταση στο Ηλιακό μας Σύστημα. Γενικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι δύο αυτές κατανομές παρουσιάζουν ομοιότητες (π.χ. οι πυρήνες Υδρογόνου αποτελούν σαφώς την πλειοψηφία και στις δύο περιπτώσεις), ωστόσο υπάρχουν και δύο βασικές διαφορές:

Καταρχάς οι πυρήνες με ατομικό αριθμό $Z > 1$ έχουν μεγαλύτερη αναλογία στην κοσμική ακτινοβολία από ότι στο Ηλιακό Σύστημα. Οι λόγοι που συμβαίνει αυτό δεν έχουν κατανοηθεί ακόμα. Θα μπορούσε, για παράδειγμα, ο μηχανισμός που επιταχύνει τα σωματία της κοσμικής ακτινοβολίας να δείχνει μία επιλεκτικότητα στους βαρύτερους πυρήνες ή ίσως πάλι η διαφορά αυτή να αντανακλά μία διαφορά στη σύσταση μεταξύ των (άγνωστων) πηγών της κοσμικής ακτινοβολίας και του Ηλιακού μας Συστήματος.



Σχήμα 2.1: Η σύσταση των στοιχείων της Κοσμικής Ακτινοβολίας (από He έως Ni--μαύροι κύκλοι) όπως αυτή συγκρίνεται με την αντίστοιχη σύσταση του Ηλιακού μας συστήματος (ρόμβοι).

Η αιτία της άλλης διαφοράς έχει πλέον κατανοηθεί και αποτελεί πολύτιμο διαγνωστικό εργαλείο για την διάδοση της κοσμικής ακτινοβολίας. Δύο ομάδες στοιχείων (Li, Be, B από τη μία και Sc, Ti, V, Cr, Mn από την άλλη) έχουν περιεκτικότητες που είναι πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερες στην κοσμική ακτινοβολία από ότι στο Ηλιακό Σύστημα. Αυτά τα στοιχεία δεν ευνοούνται από την αστρική πυρηνοσύνθεση (σε αντίθεση με το Ήλιο, τον Άνθρακα ή το Οξυγόνο) και υπάρχουν σε ελάχιστες ποσότητες στα άστρα και κατά συνέπεια και στο Ηλιακό μας Σύστημα. Ωστόσο αυτά τα στοιχεία απαντώνται στην κοσμική ακτινοβολία σε πολύ μεγαλύτερες ποσότητες επειδή δημιουργούνται από πυρηνικές αντιδράσεις θραύσεως των άφθονων πυρήνων Άνθρακα και Οξυγόνου ($C, O \rightarrow Li, Be, B$) και Σιδήρου ($Fe \rightarrow Sc, Ti, κλπ$) καθώς αυτοί διαχέονται μέσα στον Γαλαξία μας. Επειδή γνωρίζουμε την ενεργό διατομή για τις παραπάνω αντιδράσεις, μπορούμε να προσδιορίσουμε το ποσό του μεσοαστρικού υλικού το οποίο οι πυρήνες πρέπει να έχουν διασχίσει (από την στιγμή της επιτάχυνσής τους έως τη στιγμή της παρατήρησής τους) για να δημιουργήσουν την μετρούμενη ποσότητα των θυγατρικών πυρήνων¹. Ο υπολογισμός αυτός είναι ιδιαίτερα απλός και φανερώνει ότι οι πυρήνες σιδήρου της κοσμικής ακτινοβολίας πρέπει να έχουν διασχίσει περί τα 1000 κpc μέσα στο Γαλαξία μας. Δοσμένου ότι ο Γαλαξίας μας έχει ακτίνα της τάξης των 10 κpc και πάχος μόλις 0.5 κpc, η ανωτέρω διαπίστωση σημαίνει ότι οι πυρήνες της κοσμικής ακτινοβολίας δεν

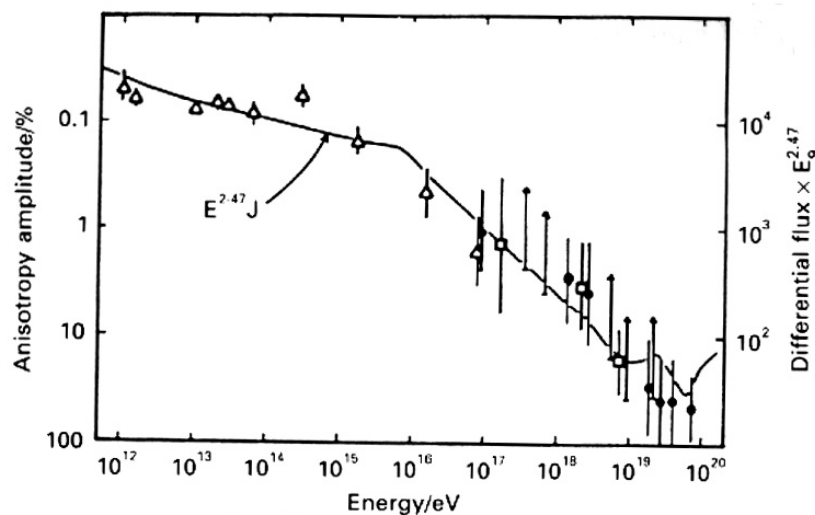
¹ Οι πυρηνικές αντιδράσεις θραύσης δεν είναι οι μόνες αντιδράσεις που τα σωματίδια της κοσμικής ακτινοβολίας προκαλούν διασχίζοντας το μεσοαστρικό υλικό. Άλλα δευτερογενή προϊόντα, όπως νετρίνα, φωτόνια, αντιπρωτόνια, κλπ επίσης παράγονται.

κινούνται σε ευθύγραμμες τροχιές από τις όποιες πηγές τους αλλά αντίθετα διαχέονται, εκτελούν δηλαδή ένα είδος τυχαίων κινήσεων παγιδευμένοι στην άλω και τον δίσκο του Γαλαξία. Η παγίδευση της κοσμικής ακτινοβολίας προέρχεται από το γεγονός ότι τα φορτισμένα σωματίδια στροβιλίζονται κατά μήκος των δυναμικών γραμμών των άμορφου μαγνητικού πεδίου του Γαλαξία μας ενώ ταυτόχρονα η γυρο-ακτίνα τους είναι, μέχρι μεγάλες τιμές της ενέργειας, μικρότερη των διαστάσεων αυτού.

2.1.2. Ενεργειακή κατανομή και ενεργειακή πυκνότητα της κοσμικής ακτινοβολίας

Η ενεργειακή κατανομή των διαφόρων πυρήνων που απαρτίζουν την κοσμική ακτινοβολία είναι νόμος δύναμης της μορφής $\frac{dN}{dE} \propto E^{-\alpha}$ όπου dN/dE είναι η ροή σωματιδίων όπως αυτή μετράται στη Γη (μονάδες: αριθμός σωματίων ανά μονάδα επιφανείας ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα ενέργειας). Όπως ίσως φαίνεται και από το Σχήμα 2.2 η τιμή του δείκτη α παίρνει τις τιμές

- Για $E < 10^{15}$ eV $\rightarrow \alpha \approx 2.7$
- Για $E > 10^{15}$ eV $\rightarrow \alpha \approx 3$



Σχήμα 2.2: Ο βαθμός ανισοτροπίας (αριστερός άξονας τεταγμένων) και η διαφορική κατανομή (δεξιός άξονας) της Κοσμικής Ακτινοβολίας ως συνάρτηση της ενέργειας.

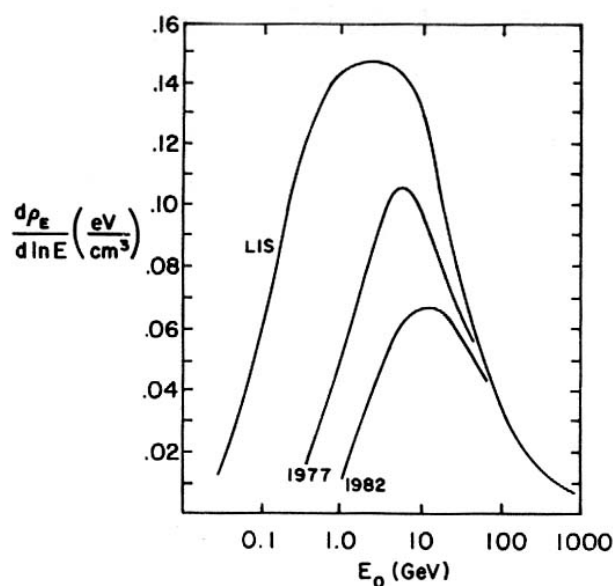
Η ενεργειακή πυκνότητα της κοσμικής ακτινοβολίας στον Γαλαξία μας υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\varepsilon_{KA} = 4\pi \int dE \frac{E}{v} \frac{dN}{dE}$$

το οποίο γράφεται και

$$\varepsilon_{KA} = 4\pi \int d \ln E \frac{E^2}{\beta c} \frac{dN}{dE} \quad (2.1)$$

(γιατί:). Η γραφική παράσταση της ποσότητας $E^2 \frac{dN}{dE}$ σε λογαριθμική κλίμακα είναι ανάλογη του ολοκληρώματος και φανερώνει σε ποιιά περιοχή της ενέργειας E παρουσιάζεται το μέγιστο της συνεισφοράς στο ολοκλήρωμα (2.1).



Σχήμα 2.3: Κατανομή της ενεργειακής πυκνότητας της κοσμικής ακτινοβολίας ως συνάρτηση της ενέργειάς της E

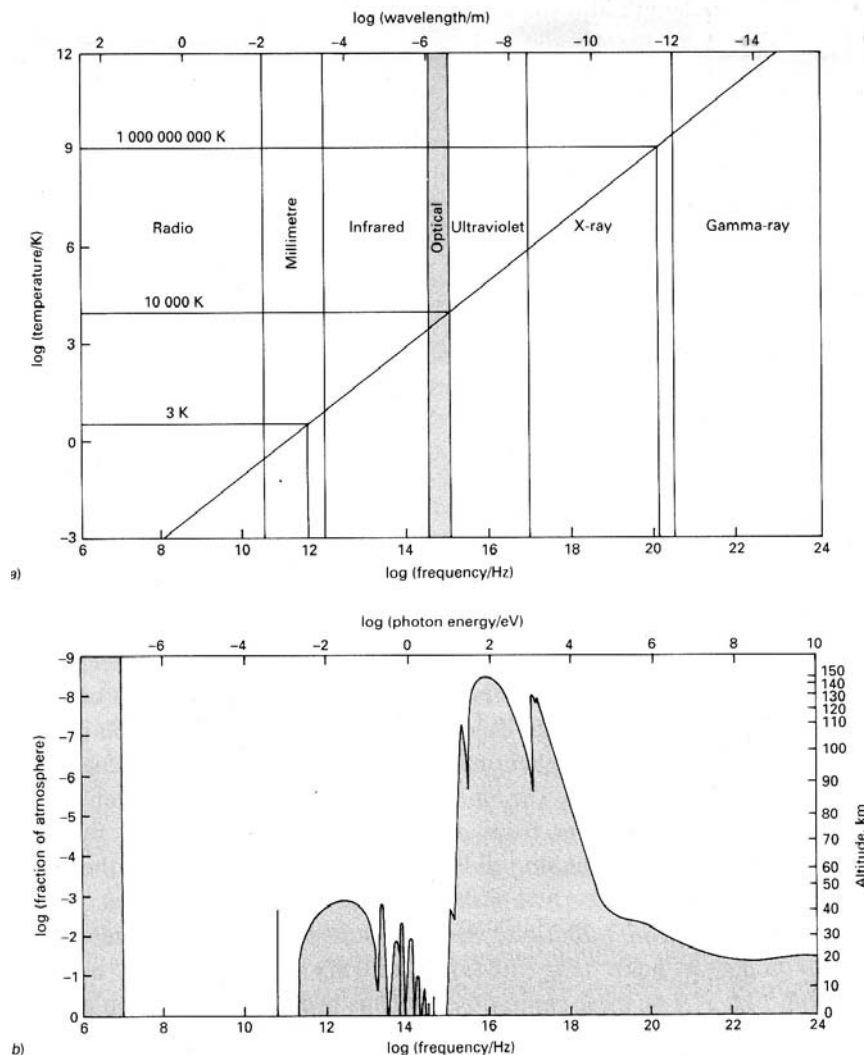
Μία δυσκολία στον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος προέρχεται από το γεγονός ότι αυτό κυριαρχείται από το κάτω όριο (γιατί;) και τούτο δεν μπορούμε να το μετρήσουμε με κάποια αξιοπιστία εξαιτίας της Ηλιακής διαμόρφωσης. Ο ηλιακός άνεμος εκδιώκει τα χαμηλής ενέργειας σωματίδια της κοσμικής ακτινοβολίας από την ηλιόσφαιρα. Η ένταση του ηλιακού ανέμου ακολουθεί τον ενδεκαετή κύκλο και, κατά συνέπεια, η μετρούμενη ροή της κοσμικής ακτινοβολίας διαμορφώνεται με αυτή. Στο μέγιστο του κύκλου όπου η ένταση του ηλιακού ανέμου είναι επίσης μέγιστη, η ροή της κοσμικής ακτινοβολίας είναι ελάχιστη και αντίθετα. Επειδή σε αυτές τις περιπτώσεις η ροή της κοσμικής ακτινοβολίας σχετικά χαμηλών ενεργειών (έως GeV) μπορεί να συμπιεσθεί και κατά μία τάξη μεγέθους, αυτό δημιουργεί προβλήματα στον ακριβή υπολογισμό του φάσματος της και φυσικά και στην ενεργειακή της πυκνότητα. Πρόσφατοι υπολογισμοί οι οποίοι προσπαθούν να αντιμετωπίσουν την παραπάνω δυσκολία με διάφορους τρόπους δίνουν τιμή για τα πρωτόνια $0.83 \text{ eV} \cdot \text{cm}^{-3}$ ενώ για τα βαρύτερα σωματίδια (κυρίως πυρήνες Ηλίου) είναι $0.27 \text{ eV} \cdot \text{cm}^{-3}$. Είναι χρήσιμο να συγκρίνουμε τις τιμές αυτές με την ενεργειακή πυκνότητα του Γαλαξιακού μαγνητικού πεδίου ($B \sim 3 \text{ } \mu\text{Gauss}$) που είναι $0.25 \text{ eV} \cdot \text{cm}^{-3}$.

2.2. ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Όπως είναι γνωστό το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα μπορεί να αναλυθεί σε ένα υποσύνολο περιοχών ανάλογα με την συχνότητα ν ή το μήκος κύματος λ της ακτινοβολίας. Τα δύο αυτά μεγέθη συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση $\lambda\nu=c$ με c την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Η ενέργεια των φωτονίων δίνεται από τη σχέση $E = h\nu$ με h τη σταθερά του Planck ($h = 6.625 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$). Επίσης μπορούμε να δώσουμε μία θερμοκρασία στα φωτόνια που έχουν ενέργεια E από τη σχέση $E=kT$ με k τη σταθερά του Boltzmann ($k = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg} \cdot \text{K}^{-1}$).

Το Σχήμα 2.4α παρουσιάζει το διάγραμμα της θερμοκρασίας ενός μελανού σώματος ως συνάρτηση της συχνότητας (ή του μήκους κύματος) στην οποία η μέγιστη ισχύς της ακτινοβολίας εκπέμπεται. Το οπτικό μέρος καταλαμβάνει μία στενή περιοχή που αντιστοιχεί περίπου σε θερμοκρασίες 3000-10000 K. Απο εδώ γίνεται αντιληπτός ο λόγος για τον οποίο ο μέσος άνθρωπος έχει την εντύπωση ότι το Σύμπαν αποτελείται μόνον από άστρα. Η πλειοψηφία τους έχουν θερμοκρασίες από 3000 K έως 10000 K και συνεπώς εκπέμπουν την μέγιστη ισχύ της ακτινοβολίας τους στα μήκη κύματος στα οποία είναι ευαίσθητο το ανθρώπινο μάτι.

Το Σχήμα 2.4β παρουσιάζει την διαφάνεια της ατμόσφαιρας ως συνάρτηση του μήκους κύματος και δείχνει σε ποιό ύψος πάνω από την επιφάνεια της Γης ένα τηλεσκόπιο πρέπει να τοποθετηθεί ώστε να μπορέσει να παρατηρήσει αστρονομικά αντικείμενα που εκπέμπουν σε αυτή την περιοχή του Η/Μ φάσματος. Όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς μόνο στα ραδιοκύματα και στο οπτικό η ατμόσφαιρα επιτρέπει παρατηρήσεις απευθείας από την επιφάνεια της Γης. Για όλα τα άλλα μήκη κύματος απαιτείται η τοποθέτηση τηλεσκοπίων σε τροχιά γύρω από τη Γη, εγχείρημα



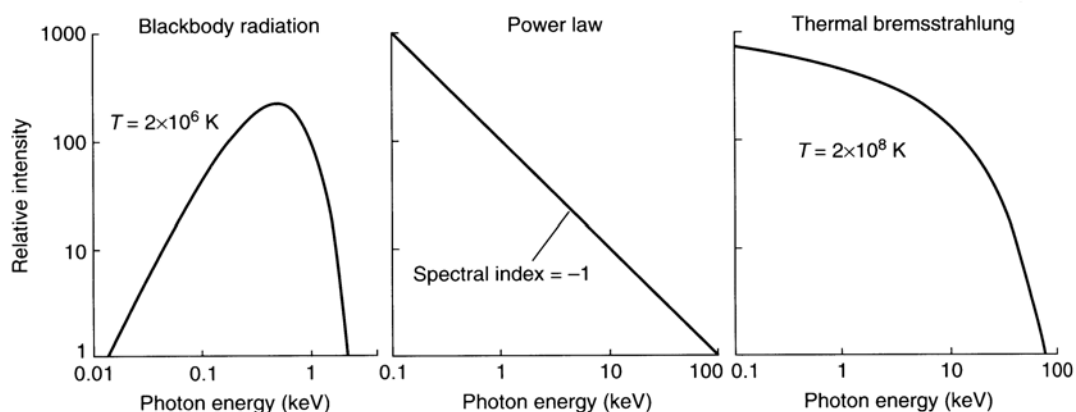
Σχήμα 2.4: (α) Οι περιοχές του Η/Μ φάσματος και η χαρακτηριστική θερμοκρασία τους. (β) Η αδιαφάνεια της ατμόσφαιρας ως συνάρτηση της συχνότητας της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

που παρουσιάζει πολλά προβλήματα κυρίως τεχνικού και οικονομικού χαρακτήρα.² Στις παρακάτω παραγράφους θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τις κυριότερες από τις ανακαλύψεις που επηρέασαν αποφασιστικά την εξέλιξη της Αστροφυσικής Υψηλών Ενεργειών. Ωστόσο είναι σκόπιμο να προτάξουμε μία παράγραφο για τα μη θερμικά φάσματα.

2.2.1. Μη θερμική εκπομπή

Όπως είναι γνωστό, ο μόνος τρόπος εξαγωγής πληροφοριών για τη φύση αστροφυσικών πηγών είναι η μελέτη του Η/Μ φάσματος που αυτές εκπέμπουν. Τα προς μελέτη *συνεχή* φάσματα μπορούμε να τα διαφοροποιήσουμε σε θερμικά και σε μη θερμικά.

Θερμικά είναι τα φάσματα εκείνα τα οποία προέρχονται είτε από εκπομπή ακτινοβολίας που βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία με την ύλη είτε από εκπομπή ακτινοβολίας από πλάσμα το οποίο έχει μεν θερμική κατανομή αλλά δεν βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία με την εκπεμπόμενη ακτινοβολία. Η πρώτη περίπτωση είναι η γνωστή εκπομπή μελανού σώματος το φάσμα του οποίου περιγράφεται από το νόμο του Planck. Για παράδειγμα, η εκπομπή από την επιφάνεια των αστέρων μπορεί να αποδοθεί με ικανοποιητικό τρόπο στην εκπομπή μελανού σώματος μίας ορισμένης θερμοκρασίας. Η δεύτερη περίπτωση είναι λιγότερο γνωστή και πρόκειται για την θερμική ακτινοβολία πέδης, για την ακτινοβολία δηλαδή αραιού θερμού πλάσματος. Η εκπομπή ακτίνων Χ από σμήνη γαλαξιών αποδίδεται σε αυτό τον μηχανισμό. Αυτό που θα πρέπει να τονισθεί είναι ότι οι θερμικοί μηχανισμοί εκπομπής παρουσιάζουν μία συγκεκριμένη φασματική μορφή. Εάν δηλαδή είχαμε ένα φασματογράφο που να κάλυπτε μεγάλο εύρος συχνοτήτων και καταγράφαμε το φάσμα συγκεκριμένης πηγής θα μπορούσαμε να δηλώσουμε με βεβαιότητα την φύση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας και κατά συνέπεια την κατανομή του εκπέμποντος πλάσματος (με την προϋπόθεση βέβαια ότι έχουμε ιδανική εκπομπή).



Σχήμα 2.5: Οι τρεις πιο συχνά απαντώμενες φασματικές μορφές. Από αριστερά προς δεξιά: Μελανό σώμα, νόμος δύναμης και θερμική ακτινοβολία πέδης.

Μία βασική έννοια που καθορίζει και τη μορφή του εκπεμπόμενου φάσματος είναι αυτή των συγκρούσεων είτε μεταξύ σωματιδίων είτε μεταξύ σωματιδίων-

² Υπάρχει και μία ακόμα περιοχή του Η/Μ φάσματος την οποία μπορούμε να παρατηρήσουμε από την επιφάνεια της Γης. Πρόκειται για ακτίνες γ με ενέργεια πάνω από 500 GeV ($\log \nu = 26$, δηλαδή είναι εκτός διαγράμματος). Οι παρατηρήσεις γίνονται με ανιχνευτές ακτινοβολίας Cherenkov.

φωτονίων. Όταν ο ρυθμός των συγκρούσεων είναι μεγάλος και ο χρόνος εξέλιξης του συστήματος μακρύς, τότε εν γένει το σύστημα έρχεται σε κάποια θερμική ισορροπία καθώς τα σώματα που έχουν μεγαλύτερη ενέργεια την μοιράζονται αποτελεσματικά, μέσω των συγκρούσεων, με αυτά που έχουν μικρότερη.

Σε πολλές περιπτώσεις όμως το αστροφυσικό πλάσμα είναι αραιό και οι συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων που το απαρτίζουν εξαιρετικά σπάνιες³. Σε αυτές τις περιπτώσεις το φάσμα φωτονίων που εκπέμπεται χαρακτηρίζεται ως *μη θερμικό* και συνήθως έχει τη μορφή νόμου δύναμης, δηλαδή $I_\nu \sim \nu^{-\alpha}$ όπου α ο φασματικός δείκτης. Το σχήμα 2.5 δείχνει την φασματική αυτή συνάρτηση και, για σύγκριση, τις δύο θερμικές φασματικές συναρτήσεις, δηλαδή το φάσμα μελανού σώματος και αυτό της θερμικής ακτινοβολίας πέδης.

Σημείωση: Υπάρχουν δύο ισοδύναμοι τρόποι να εκφρασθεί η παρατηρούμενη ροή μίας μη θερμικής πηγής.

1. Με την *ολοκληρωμένη* ροή $F_\nu \propto \nu^{-a}$ όπου αυτή έχει διαστάσεις: προσπίπτουσα ενέργεια/χρόνο/επιφάνεια/συχνότητα. Το a ονομάζεται ενεργειακός φασματικός δείκτης.

2. Με την *διαφορική* ροή $F_\nu \propto \nu^{-s}$ όπου αυτή έχει διαστάσεις: αριθμός φωτονίων/χρόνο/επιφάνεια/συχνότητα. Το s ονομάζεται αριθμητικός φασματικός δείκτης και προφανώς ισχύει $s=a+1$.

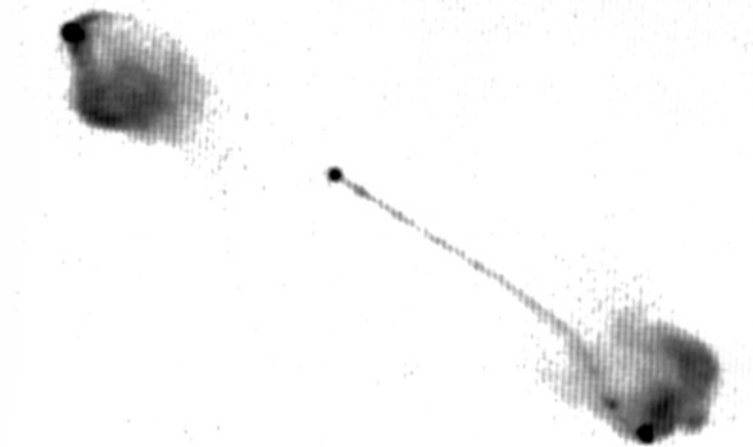
Η ολοκληρωμένη ροή χρησιμοποιείται σε αστρονομίες χαμηλών συχνοτήτων, όπως η ραδιοαστρονομία, ενώ η διαφορική ροή σε αστρονομίες υψηλών συχνοτήτων, όπως η αστρονομία ακτίνων X και γ .

2.2.2. Ραδιοαστρονομία

Η πρώτη από τις νέες αστρονομίες που αναπτύχθηκαν ήταν η ραδιοαστρονομία. Αυτό βέβαια συνέβη γιατί, πριν ξεκινήσει η λεγόμενη διαστημική εποχή στα τέλη της δεκαετίας του 1950, παρατηρήσεις μπορούσαν να γίνουν μόνον από την επιφάνεια της Γης και, όπως είδαμε, μόνο τα ραδιοκύματα δεν απορροφώνται από την ατμόσφαιρα. Παρόλο που ο τομέας ουσιαστικά ξεκίνησε το 1930 με τις παρατηρήσεις του Carl Jansky, οι πρώτες οργανωμένες προσπάθειες δεν ξεκίνησαν παρά μετά τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο με τις εξελίξεις στα ηλεκτρονικά και στους υπολογιστές. Ραδιοεκπομπή ανακαλύφθηκε από μία πλειάδα αντικειμένων. Σε μερικές περιπτώσεις αυτή η εκπομπή μπορούσε να συνδεθεί αμέσως με φαινόμενα γνωστά από τα οπτικά μήκη κύματος, π.χ. εκπομπή από τον Ήλιο ή εκπομπή από θερμά ηλεκτρόνια σε περιοχές ιονισμένου υδρογόνου. Σε πολλές άλλες περιπτώσεις ωστόσο η σύνδεση αυτή δεν ήταν άμεση και δημιούργησε εύλογα ερωτήματα για το είδος των πηγών και των φυσικών διαδικασιών που συνδέονται με αυτές. Ένα ακόμα ενδιαφέρον παρατηρησιακό δεδομένο, κοινό των νέων πηγών, ήταν ότι η ραδιοεκπομπή δεν είχε θερμική προέλευση παρά μπορούσε να περιγραφεί με νόμο δύναμης. Γρήγορα έγινε αντιληπτό ότι η παρατηρούμενη εκπομπή ήταν ακτινοβολία σύγχροτρον, η ακτινοβολία δηλαδή που εκπέμπουν σχετικιστικά ηλεκτρόνια ευρισκόμενα μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Συνεπώς σε αντίθεση από ότι θα περίμενε κανείς από το Σχήμα 2.4,

³ Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι ένα σώματιο κοσμικής ακτινοβολίας το οποίο διαχέεται στο δίσκο του Γαλαξία μας για ένα εκατομμύριο χρόνια, έχει περίπου πιθανότητα ένα όγδοο να συγκρουστεί με έναν άλλο πυρήνα του μεσοαστρικού αερίου. Είναι προφανές ότι αυτός ο ρυθμός είναι εξαιρετικά μικρός για να μπορέσει να φέρει την κοσμική ακτινοβολία σε θερμοδυναμική ισορροπία με την μεσοαστρική ύλη.

οι παρατηρήσεις στα ραδιοκύματα μας δίνουν πληροφορίες για πηγές σχετικιστικού πλάσματος, συνεπώς παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της ΑΥΕ.



Σχήμα 2.6: *Ο ραδιογαλαξίας 3C175. Διακρίνονται ο πυρήνας (στο κέντρο), οι δύο ραδιολοβοί και ένας πίδακας.*

Η σημαντικότερη ανακάλυψη της ραδιοαστρονομίας, τουλάχιστον όσον αφορά το αντικείμενό μας, είναι αναμφισβήτητα οι ραδιογαλαξίες και οι quasars, αντικείμενα που ανήκουν στους Ενεργούς Γαλαξίες. Αυτοί παρουσιάζουν έντονη εκπομπή στα ραδιοκύματα και η μορφολογία τους είναι πολύπλοκη, γιατί εκτός από την κεντρική περιοχή (τον πυρήνα τους) παρουσιάζουν, σε πολλές περιπτώσεις, συμμετρικά τεράστιους λοβούς γεμάτους σχετικιστικό πλάσμα που βρίσκονται εκατοντάδες kiloparsecs από τον κεντρικό γαλαξία. Οι λοβοί τροφοδοτούνται με ενέργεια από τον πυρήνα μέσω πιδάκων, επιμηκών δομών που διατηρούν την κατευθυντικότητα τους σε κλίμακες $1:10^6$ περίπου. Ειδικά οι quasars έχουν τόσο ισχυρή εκπομπή ώστε να μπορούμε να τους ανιχνεύουμε από κοσμολογικές αποστάσεις, από εποχές δηλαδή που το Σύμπαν ήταν αρκετά νεότερο από ότι είναι σήμερα. Οι σχετικές παρατηρήσεις δείχνουν ότι η λαμπρότητα που ακτινοβολείται από τους πυρήνες τους είναι μη θερμική και κατά πολλές χιλιάδες φορές μεγαλύτερη από την συνολική λαμπρότητα του Γαλαξία μας.

Οι ανακαλύψεις όμως της ραδιοαστρονομίας που αφορούν την ΑΥΕ δεν σταματάν εδώ: Το 1967 οι Bell και Hewish ανακαλύπτουν τους pulsars, την πρώτη απόδειξη για την ύπαρξη των αστέρων νετρονίων, οι οποίοι είναι συμπαγή αστρικά υπολείμματα με ακτίνες 10 km και κεντρικές πυκνότητες οι οποίες υπερβαίνουν την πυρηνική. Επι πλέον οι pulsars είναι ισχυρά μαγνητισμένοι και ταχύτατα περιστρεφόμενοι. Η παρατηρούμενη ραδιοεκπομπή τους προφανώς οφείλεται σε ηλεκτρόνια υψηλών ενεργειών τα οποία επιταχύνονται στις μαγνητόσφαιρες τους. Σήμερα είναι γνωστοί πάνω από 1000 pulsars με μέση περίοδο περί το 1 sec ενώ ο αριθμός τους στον Γαλαξία μας υπολογίζεται πολύ μεγαλύτερος.

Τέλος μία ακόμα ανακάλυψη της ραδιοαστρονομίας αφορά την εκπομπή ακτινοβολίας σύγχροτρον από κελύφη υπερκαινοφανών. Αυτό αποτελεί αδιαμφισβήτητη απόδειξη ότι τα κύματα κρούσης που δημιουργούνται κατά την έκρηξη των υπερκαινοφανών επιταχύνουν σωματίδια σε υψηλή ενέργεια. Αυτή υπερβαίνει κατά πολλές τάξεις μεγέθους την κινητική ενέργεια που θα είχαν τα σωματίδια εάν απλώς εκκινούντο με την ταχύτητα του κύματος.

2.2.3. Αστρονομία Ακτίνων X

Η αστρονομία ακτίνων X εξελίχθηκε αργότερα από την ραδιοαστρονομία. Ο λόγος είναι ότι οι ακτίνες X από το Διάστημα δεν φτάνουν στην επιφάνεια της Γης λόγω της φωτοηλεκτρικής απορρόφησης που αυτές υφίστανται από τα άτομα και τα μόρια της γήινης ατμόσφαιρας. Συνεπώς οι αστρονόμοι χρειάστηκε να περιμένουν την δημιουργία ρουκέτων που να είναι ικανές να σηκώσουν ανιχνευτές πάνω από την ατμόσφαιρα και αυτό επιτεύχθηκε στις αρχές της δεκαετίας του 1960. Παρόλο που οι πρώτες αυτές παρατηρήσεις διαρκούσαν μόνο περί τα πέντε λεπτά ήταν αρκετές να δείξουν ότι ο ουρανός είναι γεμάτος από πηγές ακτίνων X.

Η πρώτη αποστολή που έφερε την αστρονομία ακτίνων X στο προσκήνιο ήταν αυτή του δορυφόρου UHURU στη δεκαετία του 1970 ο οποίος και χαρτογράφησε τον ουρανό σε αυτές τις συχνότητες. Την αποστολή του UHURU ακολούθησαν άλλες αποστολές με μεγαλύτερη διακριτική ικανότητα όπως οι γερμανικοί EXOSAT και ROSAT, οι ιαπωνικοί GINGA και ASCA και οι αμερικάνικοι EINSTEIN και XMM. Όλοι αυτοί οι δορυφόροι έμειναν σε τροχιά από μήνες μέχρι και χρόνια γύρω από τη Γη και μας έδωσαν μία λεπτομερή εικόνα του ουρανού στις ακτίνες X.

Στον Γαλαξία μας παρατηρήθηκαν πηγές που εκπέμπουν παλμούς σταθερής περιόδου και διαπιστώθηκε ότι αυτές προέρχονται από αστέρες νετρονίων που ταυτόχρονα είναι μέλη διπλών αστρικών συστημάτων. Η εξήγηση που δόθηκε και που σήμερα είναι καθολικά αποδεκτή είναι ότι υλικό αποσπάται από τον αστέρα συνοδό και προσπίπτει στον αστέρα νετρονίων. Κατά την πρόσπτωση η βαρυτική δυναμική ενέργεια του υλικού μετατρέπεται σε θερμότητα με αποτέλεσμα αυτό να φτάνει σε θερμοκρασία πολλών εκατομμυρίων βαθμών όταν πλησιάζει την επιφάνεια του αστέρα νετρονίων και φυσικά να ακτινοβολεί στις ακτίνες X. Στην περίπτωση των παλλόμενων πηγών ακτίνων X οι μάζες των αστερών οι οποίες υπολογίζονται με δυναμικές μεθόδους είναι σύμφωνες με αυτές που περιμένουμε θεωρητικά για αστέρες νετρονίων. Υπάρχουν ωστόσο μερικές άλλες πηγές ακτίνων X οι οποίες δεν παρουσιάζουν καμμία περιοδικότητα στην εκπομπή τους και των οποίων οι μάζες είναι κατά πολύ μεγαλύτερες των αστερών νετρονίων. Σε αυτή την περίπτωση οι πηγές ακτίνων X ίσως είναι μελανές οπές.

Άλλες, εξωγαλαξιακές, πηγές ακτίνων X είναι οι ενεργοί γαλαξίες. Η έντονη εκπομπή (που πολλές φορές φτάνει σε μεγάλα πολλαπλάσια της ισχύος του Γαλαξία μας σε όλες τις συχνότητες) συνοδεύεται από ταχύτατες αυξομειώσεις της έντασης που υποδεικνύει ότι όλη αυτή η ακτινοβολία παράγεται σε μια περιοχή που δεν ξεπερνάει σε διαστάσεις το Ηλιακό μας Σύστημα.

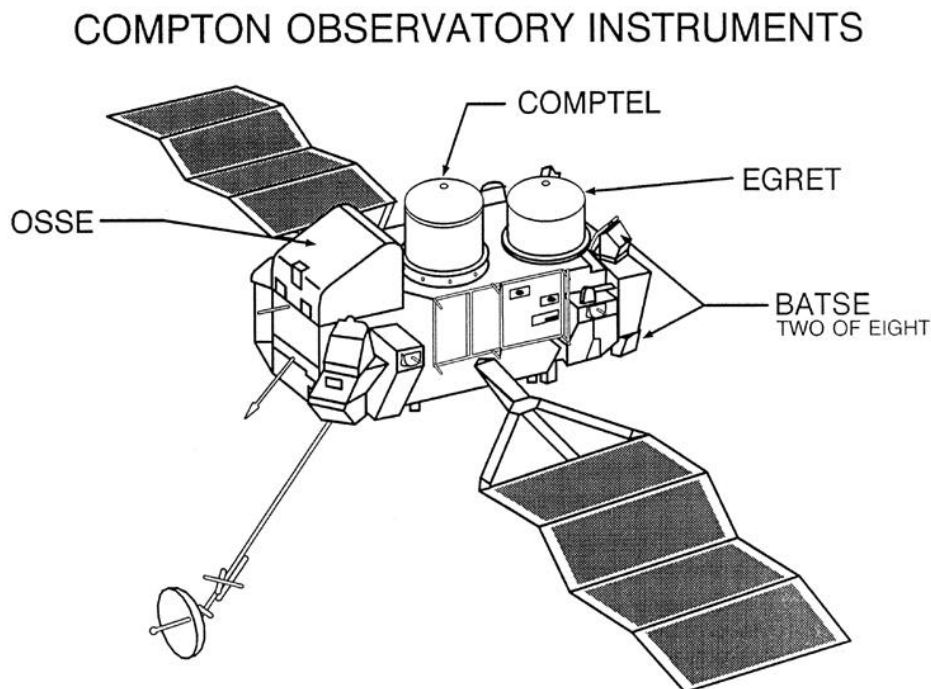
2.2.4. Αστρονομία Ακτίνων γ

Οι ακτίνες γ αποτελούν μία μεγάλη περιοχή του Η/Μ φάσματος. Πράγματι, με τις παρατηρήσεις να ξεκινάν από 30 keV (περιοχή μαλακών ακτίνων γ) και να φτάνουν έως 30 TeV (περιοχή ακτίνων γ πολύ υψηλών ενεργειών), αυτές καλύπτουν 9 τάξεις μεγέθους! Είναι φυσικό λοιπόν η αστρονομία ακτίνων γ να υποδιαιρείται περαιτέρω σε τομείς ανάλογα με την ενέργεια παρατήρησης. Έτσι μπορούμε πλέον να μιλάμε για αστρονομία ακτίνων γ σε

- Χαμηλές ενέργειες 30 keV-1 MeV
- Μεσαίες ενέργειες 1 MeV-30 MeV
- Υψηλές ενέργειες 30 MeV-30 GeV

- Πολύ υψηλές ενέργειες 30 GeV-30 TeV

Κάθε μία από τις παραπάνω περιοχές έχει διαφορετικές τεχνικές παρατήρησης, παρουσιάζει διαφορετικές ευαισθησίες και έχει να επιδείξει διαφορετικές πηγές. Επίσης διάφοροι φυσικοί μηχανισμοί είναι υπεύθυνοι για την παραγωγή των ακτίνων γ . Θα μπορούσαμε να πούμε ότι για τις χαμηλές ενέργειες αυτοί είναι κυρίως θερμικής φύσεως, ενώ για τις υψηλές ενέργειες είναι μη θερμικής. Οι παρατηρήσεις από 30 keV μέχρι 30 GeV γίνονται από το Διάστημα λόγω της αδιαφάνειας της γήινης ατμόσφαιρας σε αυτές τις ενέργειες. Από 500 GeV έως 30 TeV γίνεται από την επιφάνεια της Γης με ανιχνευτές ακτινοβολίας Cherenkov (Σχήμα 2.8) οι οποίοι ανιχνεύουν την εν λόγω ακτινοβολία που παράγεται κατά την είσοδο πολύ ενεργητικών ακτίνων γ στην ατμόσφαιρα. Τέλος δεν υπάρχουν δεδομένα για την περιοχή από 30 GeV έως 500 GeV καθώς δεν έχει βρεθεί ακόμα κάποια κατάλληλη τεχνική παρατήρησης, αν και αυτό το κενό αναμένεται να κλείσει μέχρι το τέλος της δεκαετίας.



Σχήμα 2.7: Ο δορυφόρος ακτίνων γ COMPTON.

Η μεγάλη ώθηση στην αστρονομία ακτίνων γ δόθηκε κατά την προηγούμενη δεκαετία. Η εκτόξευση του αμερικάνικου δορυφόρου Compton Gamma Ray Observatory (CGRO) το 1991 άλλαξε ριζικά τις γνώσεις μας για το Σύμπαν των ακτίνων γ . Μεταφέροντας συνολικά τέσσερις ανιχνευτές και καλύπτοντας τις ενέργειες από 30 keV σε 30 GeV ανακάλυψε νέες πηγές ακτίνων γ όπως pulsars, ενεργούς γαλαξίες και εκλάμψεις ακτινοβολίας γάμμα (Gamma Ray Bursts - δες πίνακα 2.1).



Σχήμα 2.8 : Ο ανιχνευτής ακτίνων γ πολύ υψηλών ενεργειών WHIPPLE στην έρημο της Αριζόνα.

Πίνακας 2.1

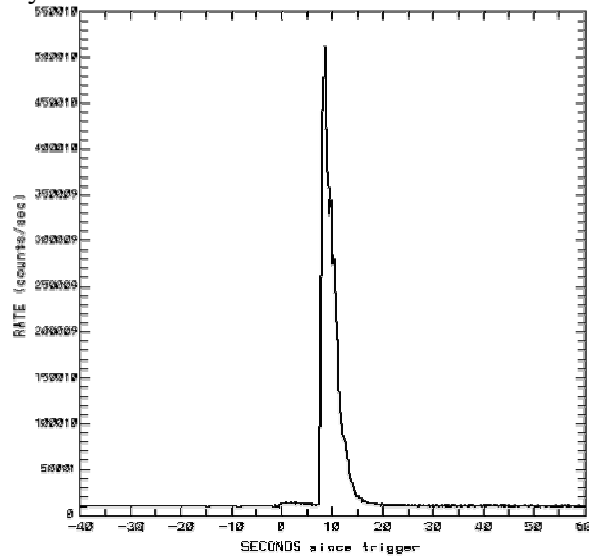
Ενέργεια	Πηγές
100 keV	Gamma Ray Bursts Ενεργοί Γαλαξίες (Seyferts) Γαλαξιακές Μελανές Οπές
1 MeV	Εξαύλωση $e^+ - e^-$ Πυρηνικές Γραμμές
10 MeV	Gamma Ray Bursts Μοριακά Νέφη ⁴
100 MeV	Κελύφη Υπερκαινοφανών
1 GeV	Pulsars Ενεργοί Γαλαξίες (Blazars)
10 GeV	Gamma Ray Bursts
100 GeV	ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
1 TeV	Ενεργοί Γαλαξίες (BL Lacs)
10 TeV	Νεφέλωμα του Καρκίνου

Τέλος ειδική μνεία πρέπει να γίνει στις εκλάμψεις ακτινοβολίας γάμμα. Ανακαλύφθηκαν εντελώς τυχαία τη δεκαετία του 1960 και από τότε παραμένουν ένα

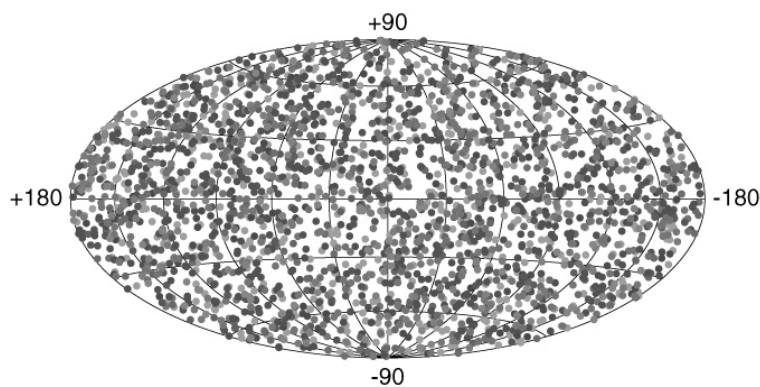
⁴ Η εκπομπή ακτίνων γ από μοριακά νέφη οφείλεται στις αλληλεπιδράσεις της κοσμικής ακτινοβολίας με την ύλη των νεφών.

από τα πιο αιγυματικά φαινόμενα όχι μόνο της Αστροφυσικής Υψηλών Ενεργειών αλλά ολόκληρης της Αστροφυσικής. Όπως φανερώνει και η ονομασία τους πρόκειται για εκλάμπεις στις ακτίνες γ ενέργειας ~50 keV που εμφανίζονται αιφνίδια σε κάποιο σημείο του ουρανού, διαρκούν, ανάλογα με την περίπτωση, από κλάσματα του δευτερολέπτου έως και μερικά secs και μετά εξαφανίζονται.

Η μικρή διάρκειά τους έκανε πολύ δύσκολο τον εντοπισμό τους και παρόλο που ολόκληρα πειράματα αφιερώθηκαν στην κατανόηση τους, μέχρι πριν λίγα χρόνια ήταν αδύνατος ο προσδιορισμός κάποιας πηγής που να συνδέεται με το φαινόμενο. Τα τελευταία πέντε χρόνια ανακαλύφθηκε ωστόσο ότι αυτά έχουν κοσμολογική προέλευση, αποτελούν τα πιο ενεργητικά φαινόμενα στο Σύμπαν και συνδέονται με κάποια διεργασία στις σπείρες γαλαξιών. Πιθανό μοντέλο για τη δημιουργία των εκλάμπσεων αποτελούν συγκρούσεις αστερών νετρονίων με άλλους αστέρες νετρονίων ή μελανές οπές.



Σχήμα 2.9: Η χρονική συμπεριφορά μίας έκλαμπης ακτινοβολίας γάμμα.



Σχήμα 2.10: Κατανομή των 2000+ καταγεγραμμένων εκλάμπσεων ακτινοβολίας γάμμα σε γαλαξιακές συντεταγμένες. Η ιστροπική κατανομή τους υποδεικνύει ότι τα φαινόμενα αυτά έχουν κοσμολογική προέλευση.

3. ΟΙ ΦΥΣΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΤΗΣ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ ΥΨΗΛΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ

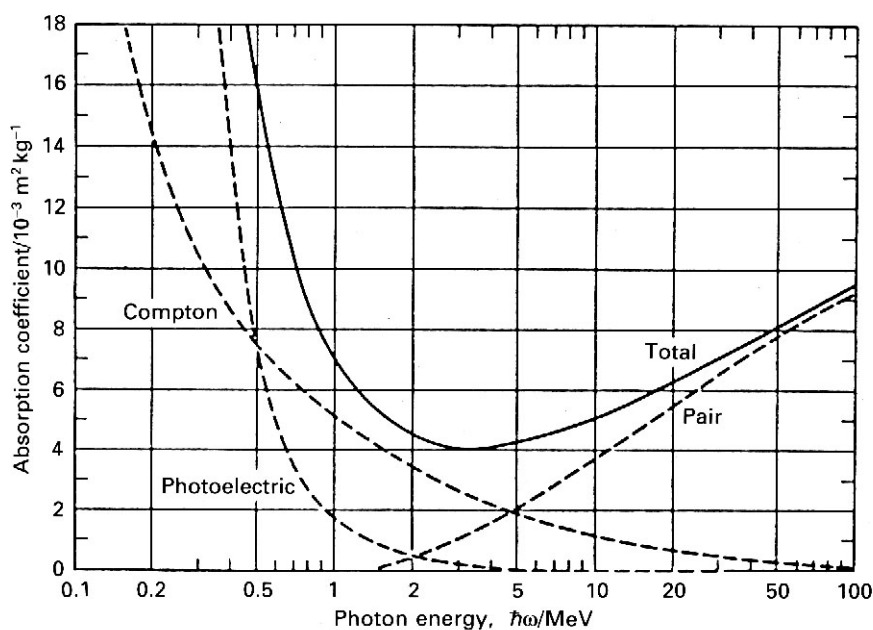
Οι φυσικές διαδικασίες εκπομπής, απορρόφησης και σκεδασμού ακτινοβολίας που βρίσκουν εφαρμογές στην Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών είναι πολλές και ποικίλες. Επίσης συναντάμε διαδικασίες γέννησης και εξαΰλωσης σωματιδίων. Παρακάτω αναφέρουμε συνοπτικά τις σημαντικότερες.

3.1. ΦΩΤΟΝΙΑ

3.1.1. Αλληλεπίδραση φωτονίων με ύλη

Εδώ διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με την ενέργεια του φωτονίου και τον βαθμό ιονισμού της ύλης:

- α. Φωτοηλεκτρική απορρόφηση
- β. Σκεδασμός Compton
- γ. Παραγωγή ζεύγους ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου



Σχήμα 3.1: Ο συντελεστής απορρόφησης των τριών φυσικών διαδικασιών κατά την αλληλεπίδραση φωτονίων με ύλη (στην προκειμένη περίπτωση με μόλυβδο). Για χαμηλές ενέργειες η πιο σημαντική διαδικασία είναι η φωτοαπορρόφηση, για ενδιάμεσες ενέργειες επικρατεί ο σκεδασμός Compton ενώ, τέλος, για υψηλές ενέργειες η παραγωγή ζευγών ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων.

Και οι τρεις αυτές διαδικασίες συναντώνται συχνά στην Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών. Για παράδειγμα, τα φάσματα των ενεργών γαλαξιών παρουσιάζουν φωτοαπορρόφηση στις μαλακές ακτίνες X. Ο σκεδασμός Compton βρίσκει ποικίλες εφαρμογές σε ένα πλήθος αστροφυσικών πηγών, όπως εσωτερικά των αστέρων,

υπερκαινοφανείς και δίσκους προσαύξησης. Η παραγωγή ζευγών ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων από συγκρούσεις ενεργητικών φωτονίων με ηλεκτρόνια και πυρήνες βρίσκει εφαρμογή π.χ. όταν ακτίνες γ υψηλών ενεργειών εισέρχονται στην ατμόσφαιρα της Γης.

3.1.2. Αλληλεπίδραση φωτονίων υψηλών ενεργειών με φωτόνια ($\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$):

Όταν η ενέργεια της σύγκρουσης στο κέντρο ορμής των δύο φωτονίων υπερβαίνει τα $2m_e c^2$, τότε είναι δυνατόν να παραχθεί ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου. Η διαδικασία αυτή δρα και ως μηχανισμός απορρόφησης ακτινοβολίας γ υψηλών ενεργειών. Για παράδειγμα, όπως θα δείξουμε διεξοδικά παρακάτω, φωτόνια με ενέργεια $\varepsilon > 100$ TeV απορροφώνται από τη μικροκυματική ακτινοβολία υπόβαθρου καθ'οδόν προς τη Γη.

3.1.3. Αλληλεπίδραση φωτονίων υψηλών ενεργειών με μαγνητικά πεδία: ($\gamma B \rightarrow Be^+e^-$)

Πρόκειται για τη διαδικασία κατά την οποία φωτόνια υψηλών ενεργειών παράγουν ζεύγη ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων καθώς διασχίζουν μαγνητικές δυναμικές γραμμές. Η διαδικασία έχει προς το παρόν προταθεί σε προβλήματα διάδοσης ακτινοβολίας στις μαγνητόσφαιρες των pulsars καθώς για να ισχύσουν τα κριτήρια εφαρμογής της απαιτείται η παρουσία πολύ ισχυρών μαγνητικών πεδίων.

3.2. ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΑ

3.2.1. Αλληλεπίδραση ηλεκτρονίων υψηλών ενεργειών με φωτόνια:

Είναι φανερό ότι οι αλληλεπιδράσεις ηλεκτρονίων υψηλών ενεργειών με φωτόνια ανάγονται στις αλληλεπιδράσεις φωτονίων με στατικά ηλεκτρόνια που εξετάσαμε στην 3.1.1—είναι απλά θέμα εκλογής κατάλληλου συστήματος αναφοράς. Συνεπώς έχουμε:

α. Αντίστροφος σκεδασμός Compton ($\gamma e \rightarrow \gamma e$)

β. Παραγωγή ζεύγους ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου ($\gamma e \rightarrow ee^+e^-$)

Από τις δύο κυριότερη φυσική διαδικασία είναι ο αντίστροφος σκεδασμός Compton. Κατά την φυσική αυτή διαδικασία τα ηλεκτρόνια χάνουν ενέργεια που την κερδίζουν τα φωτόνια τα οποία και σκεδάζονται σε υψηλές ενέργειες. Ο μηχανισμός θεωρείται υπεύθυνος για τη δημιουργία φασμάτων εκπομπής υψηλών ενεργειών όπως π.χ. για την παρατηρούμενη ακτινοβολία γ από πίδακες ενεργών γαλαξιών, για την παραγωγή της διάχυτης ακτινοβολίας γ από το δίσκο του Γαλαξία μας κλπ. Λόγω της μεγάλης σπουδαιότητας του για την Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών θα αναφερθούμε διεξοδικά σε αυτόν σε επόμενο κεφάλαιο.

3.2.2. Αλληλεπίδραση ηλεκτρονίων υψηλών ενεργειών με μαγνητικά πεδία.

Πρόκειται για τον μηχανισμό ακτινοβολίας σύγχροτρον. Η ραδιοεκπομπή από το δίσκο του γαλαξία μας, από τα κελύφη των υπερκαινοφανών, από τους πυρήνες, πίδακες και ραδιολοβούς των ενεργών γαλαξιών αποδίδεται σε αυτόν. Θα τον εξετάσουμε στο κεφάλαιο 6.

3.2.3. Αλληλεπίδραση ηλεκτρονίων υψηλών ενεργειών με ύλη.

Ανάλογα με την ενέργεια του ηλεκτρονίου διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α. Απώλειες ιονισμού: Τα ηλεκτρόνια υψηλών ενεργειών που κινούνται μέσα σε μη ιονισμένη ύλη χάνουν ενέργεια ιονίζοντας άτομα. Αυτή η φυσική διαδικασία χρησιμοποιείται σε ανιχνευτές, ωστόσο η εφαρμογή της σε κοσμικές πηγές φαίνεται να είναι περιορισμένη.

β. Ακτινοβολία πέδησης: Πιο διαδεδομένη είναι η ακτινοβολία πέδησης (bremsstrahlung) καθώς την συναντάμε ακόμα και στο εσωτερικό των αστέρων. Πρόκειται για την ακτινοβολία που δημιουργείται από τον σκεδασμό Coulomb φορτισμένων σωματιδίων (πχ. ηλεκτρόνια-πρωτόνια).

γ. Εξαύλωση ποζιτρονίων: Ποζιτρόνια εξαυλώνονται με ηλεκτρόνια και ανάλογα με την ενέργεια που έχουν κατά τη στιγμή αυτή δημιουργούνται είτε φωτόνια στην χαρακτηριστική ενέργεια των 511 keV είτε φωτόνια συνεχούς φάσματος ακτίνων γ. Η γραμμή εκπομπής στα 511 keV έχει παρατηρηθεί από τις κεντρικές περιοχές του Γαλαξία μας και αποδίδεται σε εξαυλώσεις ποζιτρονίων που έχουν δημιουργηθεί από εκρήξεις υπερκαινοφανών εκεί.

3.3. ΠΡΩΤΟΝΙΑ

Τα πρωτόνια είναι από τη μία σωματία με ηλεκτρικό φορτίο και συνεπώς υπόκεινται σε ανάλογους με τα ηλεκτρόνια φυσικούς μηχανισμούς, είναι όμως και αδρόνια και υπόκεινται σε μια σειρά αδρονικών αλληλεπιδράσεων. Εδώ παρουσιάζουμε τις κυριότερες, από πλευράς αστροφυσικών εφαρμογών, από αυτές:

3.3.1. Αλληλεπίδραση πρωτονίων υψηλών ενεργειών με ύλη:

Όταν η κινητική ενέργεια του πρωτονίου υψηλών ενεργειών είναι μεγαλύτερη της μάζας ηρεμίας του πιονίου, τότε μία σύγκρουση πρωτονίου-πρωτονίου δημιουργεί πόνια τα οποία διασπώνται ανάλογα του είδους τους σε φωτόνια ή σε μίονια και νετρίνα, σύμφωνα με τις αντιδράσεις

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$$

και

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

Τα ουδέτερα πόνια έχουν ένα πολύ σύντομο μέσο χρόνο ζωής (1.8×10^{-16} sec) πριν διασπασθούν σε δύο φωτόνια που ουσιαστικά είναι ακτίνες γ (γιατί), ενώ τα φορτισμένα πόνια έχουν μέσο χρόνο ζωής 2.6×10^{-8} sec πριν διασπασθούν σε μίονια. Τα μίονια δεν υπόκεινται σε αλληλεπιδράσεις και χάνουν ενέργεια μόνον από ιονισμό. Τέλος τα μίονια χαμηλής ενέργειας διασπώνται μετά από 2.2×10^{-6} sec σε ηλεκτρόνια, ποζιτρόνια και νετρίνα

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

Όλες οι παραπάνω αλληλεπιδράσεις, διασπάσεις κλπ λαμβάνουν χώρα κατά την είσοδο ενεργητικών πρωτονίων της Κοσμικής Ακτινοβολίας στην ατμόσφαιρα της Γης.

3.3.2. Αλληλεπίδραση πρωτονίων υψηλών ενεργειών με φωτόνια:

Η αλληλεπίδραση πρωτονίων υψηλών ενεργειών και φωτονίων (ή, αντίστοιχα, ακτίνων γ και ψυχρών πρωτονίων) μπορεί να είναι είτε ηλεκτρομαγνητικής είτε αδρονικής φύσης:

α. Παραγωγή ζεύγους ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου ($p\gamma \rightarrow pe^+e^-$)

β. Παραγωγή πιονίων ($p\gamma \rightarrow N\pi$)

Η διαδικασία (α) είναι αντίστοιχη της 3.2.1β ($e\gamma \rightarrow ee^+e^-$) και έχει κατώφλι το άθροισμα των μαζών ηρεμίας του ζεύγους. Η διαδικασία (β) έχει άμεση αντιστοιχία με την διαδικασία 3.3.1. Έτσι όταν η ενέργεια του φωτονίου στο σύστημα ηρεμίας του πρωτονίου υπερβαίνει τη μάζα ηρεμίας των πιονίου, τότε δημιουργούνται πιόνια ενώ τα πρωτόνια χάνουν μέρος της ενέργειάς τους. Η διαδικασία αυτή έχει εφαρμογή στην κοσμική ακτινοβολία πολύ υψηλών ενεργειών.

4. ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΦΩΤΟΝΙΟΥ-ΦΩΤΟΝΙΟΥ

Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο η αλληλεπίδραση φωτονίου-φωτονίου και η παραγωγή ζεύγους ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου που επακολουθεί αποτελεί μία από τις βασικές διαδικασίες της Αστροφυσικής Υψηλών Ενεργειών. Παρακάτω δίνουμε, σαν παράδειγμα, μία πληρέστερη ανάλυση αυτής της διαδικασίας ώστε να φανούν οι έννοιες της ενέργειας κατωφλίου, της ενεργού διατομής και του οπτικού βάρους που αποτελούν πολύ σημαντικές έννοιες για το παρόν μάθημα.

Για να βρούμε το ενεργειακό κατώφλι παραγωγής του ζεύγους εργαζόμαστε ως εξής. Έστω $\underline{K}_1 = \left[\frac{h\nu_1}{c}, \frac{h\nu_1}{c} \hat{e}_1 \right]$ και $\underline{K}_2 = \left[\frac{h\nu_2}{c}, \frac{h\nu_2}{c} \hat{e}_2 \right]$ τα τετρανύσματα ορμής των φωτονίων πριν από την σύγκρουση. Εάν $\underline{P}_1 = [\gamma_1 m_e c, \gamma_1 m_e \bar{v}_1]$ και $\underline{P}_2 = [\gamma_2 m_e c, \gamma_2 m_e \bar{v}_2]$ είναι τα τετρανύσματα ορμής των δύο παραγόμενων σωματίων, τότε από τη διατήρηση των μεγεθών αυτών έχουμε

$$\underline{K}_1 + \underline{K}_2 = \underline{P}_1 + \underline{P}_2. \quad (4.1)$$

Η ελάχιστη ενέργεια με την οποία μπορεί να παραχθεί το ζεύγος είναι όταν $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$ και συνεπώς $\underline{P}_1 = [m_e c, 0]$, $\underline{P}_2 = [m_e c, 0]$. Υψώνουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\underline{K}_1 \cdot \underline{K}_1 = \underline{K}_2 \cdot \underline{K}_2 = 0$ και $\underline{P}_1 \cdot \underline{P}_1 = \underline{P}_2 \cdot \underline{P}_2 = \underline{P}_1 \cdot \underline{P}_2 = -m_e^2 c^2$, παίρνουμε

$$\underline{K}_1 \cdot \underline{K}_2 = 2m_e^2 c^2$$

η οποία μετά από μερικές πράξεις γράφεται

$$\varepsilon_2 = \frac{2m_e^2 c^4}{\varepsilon_1 (1 - \cos \phi)} \quad (4.2)$$

όπου $\varepsilon_1 = h\nu_1$ και $\varepsilon_2 = h\nu_2$ είναι οι ενέργειες των δύο φωτονίων και ϕ η γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις τους.

Άσκηση: Ξεκινώντας από την (4.1) να καταλήξετε στην (4.2).

Η σχέση (4.2) δίνει την ελάχιστη ενέργεια ε_2 που απαιτείται να έχει ένα φωτόνιο ώστε να δημιουργήσει ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου σε σύγκρουση υπό γωνία ϕ με άλλο φωτόνιο ενέργειας ε_1 . Αυτό είναι και το ενεργειακό κατώφλι της παραπάνω φυσικής διαδικασίας. Η διαδικασία αυτή δεν δρα μόνον ως μηχανισμός παραγωγής ζευγών αλλά και ως μηχανισμός απορρόφησης φωτονίων. Θα μπορούσαμε λοιπόν, ξαναγυρίζοντας προς στιγμή στην Αστροφυσική, να θεωρήσουμε μερικές χαρακτηριστικές ενέργειες μαλακών φωτονίων (ε_1) και με την βοήθεια της σχέσης (4.2) να βρούμε την απαιτούμενη ελάχιστη ενέργεια (ε_2) που πρέπει να έχουν οι ακτίνες γ ώστε να αλληλεπιδράσουν με αυτά. Τα σχετικά αποτελέσματα δίνονται στον πίνακα 4.1 όπου για χάρη απλότητας θεωρήσαμε $\phi = \pi$ (δηλαδή μετωπικές συγκρούσεις).

Πίνακας 4.1

	$\varepsilon_1(eV)$	$\varepsilon_2(eV)$
Κοσμικό υπόβαθρο μικροκυμάτων	6×10^{-4}	4×10^{14}
Αστέρες	2	10^{11}
Πηγες ακτίνων X	10^3	3×10^8

Καταρχή παρατηρούμε ότι οι ενέργειες των φωτονίων που θα μπορούσαν να απορροφηθούν βρίσκονται στην περιοχή των ακτίνων γ . Ωστόσο για να είναι η απορρόφηση των ακτίνων γ σημαντική πρέπει να έχουν και μεγάλο οπτικό βάθος. Η έννοια του οπτικού βάθους είναι γνωστή από άλλους τομείς της Αστροφυσικής (πχ. αστρικές ατμόσφαιρες) αλλά και της Φυσικής γενικότερα. Στη γενική περίπτωση ορίζουμε το οπτικό βάθος για απορρόφηση ενός φωτονίου⁵ από κάποια φυσική διαδικασία ανάμεσα σε δύο ακτίνες r_1 και r_2 ως το ολοκλήρωμα

$$\tau = \int_{r_1}^{r_2} dr \cdot \kappa \quad (4.3)$$

όπου κ ο συντελεστής απορρόφησης ο οποίος δίνεται από τη σχέση

$$\kappa = n\sigma \quad (4.4)$$

με n την αριθμητική πυκνότητα των απορροφητών και σ την ενεργό διατομή της φυσικής διαδικασίας⁶. Γενικά η πιθανότητα που έχει το φωτόνιο να διασχίσει οπτικό βάθος τ και να μην έχει απορροφηθεί δίνεται από τη σχέση

$$P_{esc} = e^{-\tau} \quad (4.5)$$

ενώ, αντίθετα, η πιθανότητα να έχει αλληλεπιδράσει δίνεται από

$$P_{int} = 1 - P_{esc} = 1 - e^{-\tau}. \quad (4.6)$$

Όταν $\tau \gg 1$ το μέσο καλείται *αδιαφανές*, ενώ όταν $\tau \ll 1$ καλείται *διαφανές*. Κλείνοντας την σύντομα αυτή παρένθεση αξίζει να ορίσουμε και τη *μέση ελεύθερη διαδρομή*

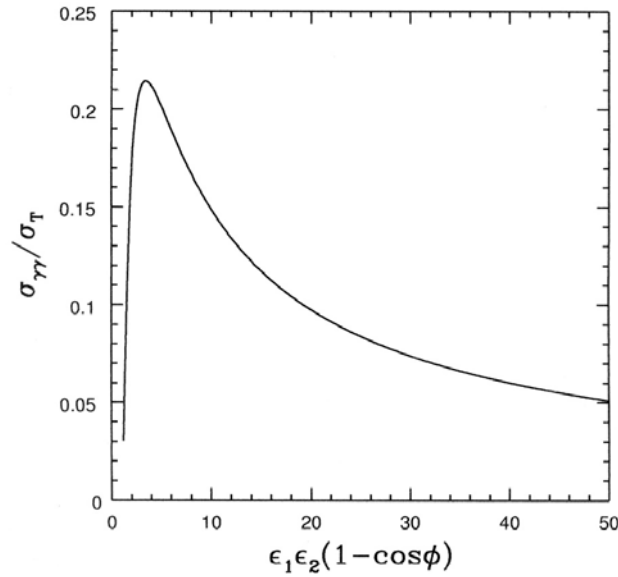
$$\bar{l} = \kappa^{-1} = (n\sigma)^{-1} \quad (4.7)$$

που είναι η μέση απόσταση που διανύει το φωτόνιο μέχρι να αλληλεπιδράσει.

Στην περίπτωση της αλληλεπίδρασης φωτονίου-φωτονίου η ενεργός διατομή υπολογίζεται από την Κβαντοηλεκτροδυναμική και παριστάνεται γραφικά στο Σχήμα 4.1. Παρατηρούμε ότι για τιμές του γινομένου $s = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 - \cos \phi) < 2(m_e c^2)^2$ η ενεργός διατομή $\sigma_{\gamma\gamma}$ είναι μηδέν, σε συμφωνία με τα όσα αναφέραμε για το ενεργειακό κατώφλι της συγκεκριμένης φυσικής αλληλεπίδρασης. Για τιμές του s λίγο πάνω από το ενεργειακό κατώφλι η ενεργός διατομή αυξάνεται απότομα μέχρι μία μέγιστη τιμή $\sigma_{\gamma\gamma}^{\max} \approx .25\sigma_T$ και από εκεί και πέρα φθίνει περίπου ως s^{-1} .

⁵ Η έννοια του οπτικού βάθους δεν περιορίζεται μόνο στα φωτόνια, ούτε μόνο σε φυσικές διαδικασίες απορρόφησης. Επεκτείνεται και σε σωματίδια όπως τα νετρόνια, τα νετρίνα κλπ και σε άλλες φυσικές διαδικασίες όπως π.χ. σκεδασμού.

⁶ Ανάλογα της περίπτωσης που εξετάζουμε, η ενεργός διατομή (και κατά συνέπεια το οπτικό βάθος) μπορεί να εξαρτάται από την ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου



Σχήμα 4.1: Γραφική παράσταση της ενεργού διατομής $\sigma_{\gamma\gamma}$ για την φυσική διαδικασία $\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$ (σε μονάδες της ενεργού διατομής Thomson $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$) ως συνάρτηση του γινομένου $\epsilon_1\epsilon_2(1 - \cos\phi)$ όπου ϵ_1 και ϵ_2 είναι οι ενέργειες των δύο αλληλεπιδρώντων φωτονίων εκφρασμένες σε μονάδες της ενέργειας ηρεμίας του ηλεκτρονίου $m_e c^2$ και ϕ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις τους.

Το οπτικό βάθος της φυσικής διαδικασίας δίνεται από τις σχέσεις (4.3) και (4.4). Εάν, π.χ. μία ακτίνα γ ενέργειας ϵ_2 διέσχισε μία περιοχή διαστάσεων L όπου υπήρχαν φωτόνια με ενέργεια ϵ_1 , αριθμητική πυκνότητα και όπου όλα κατευθυνόντουσαν προς μία διεύθυνση σχηματίζοντας μία γωνία ϕ με την ακτίνα γ , τότε το οπτικό βάθος θα δινόταν απλά από τη σχέση

$$\tau_{\gamma\gamma}(\epsilon_2) = L.n(\epsilon_1).\sigma_{\gamma\gamma}(s).$$

Ωστόσο στη γενική περίπτωση θέλουμε να εξετάσουμε το οπτικό βάθος για απορρόφηση που έχει μία ακτίνα γ ως προς κάποια κατανομή μαλακών φωτονίων πυκνότητας $n(\epsilon)d\epsilon$ (με $\epsilon_{\min} < \epsilon < \epsilon_{\max}$) τα οποία (συνήθως) είναι ισοτροπικά. Σε αυτή την περίπτωση το οπτικό βάθος γράφεται

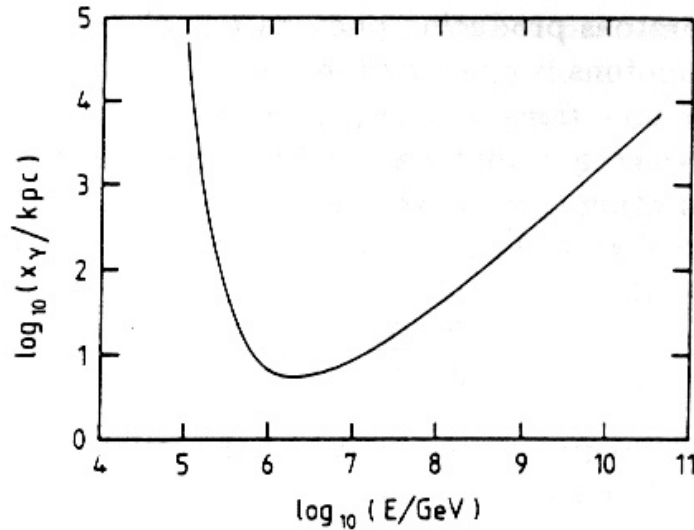
$$\tau_{\gamma\gamma}(E_\gamma) = \int_0^L dr \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} d\epsilon n(\epsilon) \int \sigma_{\gamma\gamma}(s) d\Omega \quad (4.8)$$

όπου θέσαμε $E_\gamma \equiv \epsilon_2$.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η απορρόφηση φωτονίων υψηλών ενεργειών από τα φωτόνια του μικροκυματικού υπόβαθρου. Επειδή αυτά προέρχονται από μελανό σώμα η αριθμητική τους πυκνότητα εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία της ακτινοβολίας και δίνεται από τη γνωστή σχέση

$$n(\epsilon)d\epsilon = \frac{1}{\pi^2(\hbar c)^3} \frac{\epsilon^2}{e^{\epsilon/kT} - 1} d\epsilon. \quad (4.9)$$

Σε αυτή την περίπτωση έχει πιο φυσική σημασία να υπολογίσουμε τη μέση ελεύθερη διαδρομή που μας δίνει την απόσταση που έχει διανύσει έως τη Γ κάποιο φωτόνιο



Εικόνα 4.2: Μήκος απορρόφησης ακτίνων γ ενέργειας E (σε GeV) από το μικροκοσμικό υπόβαθρο.

υψηλών ενεργειών χωρίς να έχει απορροφηθεί από τα φωτόνια του υπόβαθρου. Η Εικόνα 4.2 παριστάνει ακριβώς αυτό ως συνάρτηση της ενέργειας της ακτίνας γ . Παρατηρούμε ότι για ενέργειες $E_\gamma \leq 10^5 \text{ GeV} = 10^{14} \text{ eV}$ το Σύμπαν είναι διαφανές. Για μεγαλύτερες όμως ενέργειες οι ακτίνες γ απορροφώνται από τα φωτόνια του υπόβαθρου και για ενέργειες $E_\gamma \approx 10^{15} \text{ eV}$ η μέση ελεύθερη διαδρομή είναι της τάξης των 10 kpc που πρακτικά σημαίνει ότι εάν ποτέ παρατηρηθεί μία τέτοια ακτίνα γ αυτή πρέπει να προέρχεται από πηγή του Γαλαξία μας και όχι από κοσμολογικές πηγές (όπως π.χ. οι quasars). Για ακόμα μεγαλύτερες ενέργειες η μέση ελεύθερη διαδρομή αυξάνεται και αυτό οφείλεται στη πτώση της ενεργού διατομής (δες και Εικόνα 4.1) αλλά και στη συγκεκριμένη μορφή (4.9) του πεδίου των φωτονίων.

Το παραπάνω αποτελεί ένα μόνο παράδειγμα της απορρόφησης ακτίνων γ από φωτόνια χαμηλότερης ενέργειας. Άλλα παραδείγματα περιλαμβάνουν αστροφυσικές πηγές ακτίνων γ όπως pulsars, ενεργούς γαλαξίες, κλπ. Σε αυτές τις περιπτώσεις εξετάζουμε την πιθανότητα που έχει μία ακτίνα γ να απορροφηθεί μέσα στην ίδια την πηγή από άλλα φωτόνια χαμηλότερης ενέργειας. Τέτοιου είδους υπολογισμοί αποτελούν πολύτιμα διαγνωστικά για τις ιδιότητες των πηγών αυτών.

5. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΣΚΕΔΑΣΜΟΣ COMPTON

Όπως είναι γνωστό ο Compton ανακάλυψε το 1923 ότι το μήκος κύματος των σκληρών ακτίνων X αυξάνεται όταν αυτές σκεδάζονται από ηλεκτρόνια σε ηρεμία. Αυτό ήρθε σαν μία ακόμη επιβεβαίωση της κβαντικής θεωρίας του Einstein για τον δυϊσμό της φύσης του φωτός. Κατά τον σκεδασμό Compton το εισερχόμενο φωτόνιο συγκρούεται με το στατικό ηλεκτρόνιο και του μεταφέρει μέρος της ενέργειας και της ορμής του. Επειδή και τα δύο αυτά μεγέθη εξαρτώνται από την συχνότητα της ακτινοβολίας, η απώλεια ενέργειας του φωτονίου αντιστοιχεί στη μετρούμενη αύξηση του μήκους κύματός του. Μεγάλο ενδιαφέρον για την Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών παρουσιάζει η περίπτωση όπου σχετικιστικά ηλεκτρόνια σκεδάζουν φωτόνια χαμηλής ενέργειας σε υψηλές ενέργειες. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται αντίστροφος σκεδασμός Compton γιατί σε αυτή την περίπτωση είναι τα ηλεκτρόνια που χάνουν ενέργεια αντί για τα φωτόνια.

Θα ξεκινήσουμε το κεφάλαιο με σύντομες αναφορές στο κλασσικό φαινόμενο Thomson και στον σκεδασμό Compton. Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε τη θεωρία του αντίστροφου σκεδασμού Compton και θα δώσουμε μερικές αστροφυσικές εφαρμογές.

5.1. ΣΚΕΔΑΣΜΟΣ THOMSON

Όπως είναι γνωστό από τον Ηλεκτρομαγνητισμό τα φορτία που επιταχύνονται ακτινοβολούν. Αυτή η αρχή είναι η βάση της θεωρίας των διάφορων ακτινοβολιών. Η ισχύς της ακτινοβολίας που παράγεται δίνεται από τη σχέση του Larmor

$$P = \frac{2q^2 |\ddot{\vec{r}}|^2}{3c^3} = \frac{2|\ddot{\vec{d}}|^2}{3c^3} \quad (5.1)$$

όπου q το φορτίο, $|\ddot{\vec{r}}|$ το μέτρο της επιτάχυνσής του στο στιγμιαίο σύστημα ηρεμίας του φορτίου και c η ταχύτητα του φωτός. Η παραπάνω σχέση εκφράζεται ακόμη και ως συνάρτηση της διπολικής ροπής $\vec{d} = q\vec{r}$.

Η γωνιακή κατανομή της ακτινοβολίας ακολουθεί την κατανομή δίπολου και δίνεται από τη σχέση

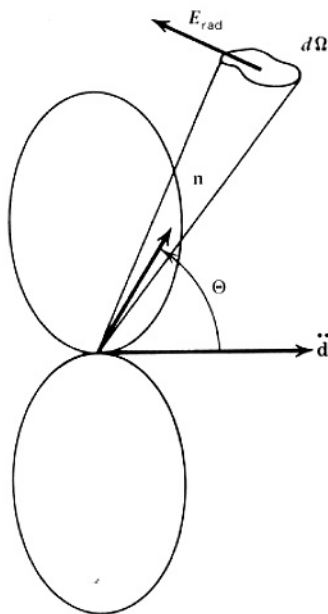
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 |\ddot{\vec{r}}|^2}{4\pi c^3} \sin^2 \Theta \quad (5.2)$$

όπου Θ η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης της επιτάχυνσης και της διεύθυνσης της ακτινοβολίας μετά τον σκεδασμό. Όπως παρατηρούμε δεν εκπέμπεται καθόλου ακτινοβολία κατά την διεύθυνση της επιτάχυνσης, ενώ η μεγίστη εκπομπή επιτυγχάνεται κάθετα σε αυτή την διεύθυνση (Σχήμα 5.1).

Σημείωση: Η σχέση (5.1) προκύπτει κατευθείαν από την (5.2) εάν ολοκληρώσουμε αυτή την τελευταία ως προς στερεά γωνία, δηλ.

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{q^2 |\ddot{\vec{r}}|^2}{4\pi c^3} \int \sin^2 \Theta d\Omega$$

Άσκηση: Να ολοκληρώσετε την παραπάνω παράσταση και να καταλήξετε στη σχέση (5.1). (Υπενθύμιση: Όπως είναι γνωστό $d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\phi$)



Σχήμα 5.1: Γεωμετρία και εκπομπή ακτινοβολίας διπόλου.

Στην περίπτωση τώρα που ένα γραμμικά πολωμένο ηλεκτρομαγνητικό κύμα χαμηλής συχνότητας ω_0 προσπέσει σε ένα ηλεκτρόνιο σε ηρεμία η δύναμη που του ασκεί είναι

$$\vec{F} = e \hat{\epsilon} E_0 \sin \omega_0 t \quad (5.3)$$

όπου e το φορτίο και $\hat{\epsilon}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την διεύθυνση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} . Από τις (5.1) και (5.3), χρησιμοποιώντας επιπλέον τις σχέσεις

$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ και $\langle \sin^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1}{2}$, παίρνουμε

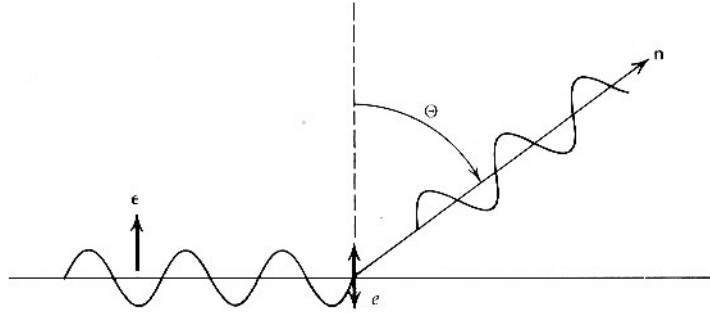
$$P = \frac{e^4 E_0^2}{3m^2 c^3} \quad (5.4)$$

ενώ η (5.2) δίνει αντίστοιχα

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m^2 c^3} \sin^2 \Theta. \quad (5.5)$$

Ορίζουμε στη συνέχεια την *διαφορική ενεργό διατομή* ως

$$\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} = \frac{\text{ακτινοβολούμενη} \cdot \text{ισχύς} \cdot \text{ανά} \cdot \text{μονάδα} \cdot \text{στερεάς} \cdot \text{γωνίας}}{\text{εισερχόμενη} \cdot \text{ισχύς} \cdot \text{ανά} \cdot \text{μονάδα} \cdot \text{επιφάνειας}}$$



Σχήμα 5.2: Σκεδασμός πολωμένης ακτινοβολίας από ένα φορτισμένο σωματίδιο

Η εισερχόμενη ισχύς ανά μονάδα επιφανείας δεν είναι άλλη από την ροή Poynting που δίνεται από $\langle S \rangle = (c/8\pi)E_0^2$. Συνεπώς από τον παραπάνω ορισμό της διαφορικής ενεργού διατομής έχουμε

$$\left(\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} \right)_{\text{πολ}} = \frac{1}{\langle S \rangle} \frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4}{m^2 c^4} \sin^2 \Theta = r_0^2 \sin^2 \Theta \quad (5.6)$$

όπου η ποσότητα

$$r_0^2 \equiv \frac{e^4}{m^2 c^4} \quad (5.7)$$

είναι η κλασική ακτίνα του ηλεκτρονίου και δίνει ένα μέτρο της 'ακτίνας' του φορτίου του. Η τιμή της είναι $r_0 = 2.82 \times 10^{-13}$ cm. Η ολική ενεργός διατομή βρίσκεται από την (4.8) με ολοκλήρωση ως προς την στερεά γωνία και είναι

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2. \quad (5.8)$$

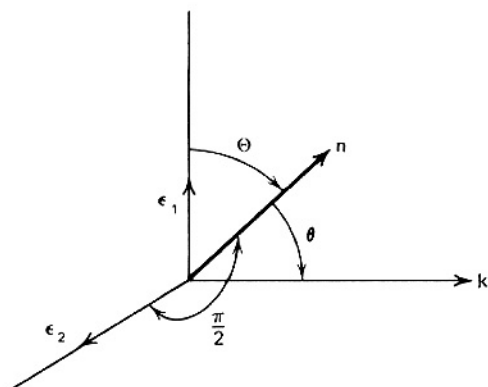
Η ποσότητα σ_T ονομάζεται ενεργός διατομή Thomson και ισούται με 0.665×10^{-24} cm², ενώ η φυσική διαδικασία που μόλις περιγράψαμε ονομάζεται σκεδασμός Thomson ή σκεδασμός ηλεκτρονίου. Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι σχέσεις (5.6) και (5.8) που δίνουν την διαφορική και την ολική ενεργό διατομή είναι ανεξάρτητες της συχνότητας του προσπίπτοντος κύματος. Ωστόσο αυτό ισχύει για πολύ χαμηλές συχνότητες ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κλασική προσέγγιση. Όπως θα δούμε σε παρακάτω παράγραφο για υψηλές συχνότητες η ενεργός διατομή προσδιορίζεται πλέον από την Κβαντομηχανική και εξαρτάται από τη συχνότητα του προσπίπτοντος φωτονίου.

Ο σκεδασμός που εξετάσαμε αφορούσε πολωμένη ακτινοβολία. Είναι εύκολο τα αποτελέσματα που βρήκαμε να επεκταθούν και στην γενικότερη περίπτωση της μη πολωμένης ακτινοβολίας εάν θυμηθούμε ότι αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως μία επαλληλία δύο γραμμικά πολωμένων κυμάτων που ταλαντώνονται σε ορθογώνια επίπεδα. Συνεπώς αναλύουμε το ηλεκτρικό πεδίο της προσπίπτουσας δέσμης σε δύο συνιστώσες από τις οποίες η μία (με μοναδιαίο διάνυσμα \hat{e}_1) βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν η διεύθυνση της ακτινοβολίας πριν και μετά τον σκεδασμό (όπως αυτές ορίζονται από τα διανύσματα \hat{k} και \hat{n} αντίστοιχα—Σχήμα 5.3) ενώ η άλλη (με μοναδιαίο διάνυσμα \hat{e}_2) είναι κάθετη σε αυτό το επίπεδο. Έστω Θ η γωνία μεταξύ των \hat{e}_1 και \hat{n} . Ορίζουμε επίσης την γωνία θ , που είναι η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης της σκεδασμένης και προσπίπτουσας δέσμης: $\theta = \pi/2 - \Theta$. Η διαφορική ενεργός

διατομή της μη πολωμένης ακτινοβολίας είναι η μέση τιμή των ενεργών διατομών των δύο παραπάνω συνισταμένων που είναι γραμμικά πολωμένες. Γράφουμε λοιπόν

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}\right)_{\text{πολ}} + \left(\frac{d\sigma(\pi/2)}{d\Omega}\right)_{\text{πολ}} \right] = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \sin^2 \Theta) = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \theta). \quad (5.9)$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα εξαρτάται μόνο από τη διεύθυνση της προσπίπτουσας και σκεδασμένης ακτινοβολίας.



Σχήμα 5.3: Γεωμετρία σκεδασμού μη πολωμένης ακτινοβολίας.

Δύο βασικές ιδιότητες του σκεδασμού της μη πολωμένης ακτινοβολίας είναι:

1. Συμμετρία ως προς τον μετασχηματισμό $\theta \rightarrow -\theta$ (μπρος-πίσω)
2. Η ολική ενεργός διατομή είναι ίση με σ_T , ίση δηλαδή με την περίπτωση της πολωμένης ακτινοβολίας.

Άσκηση: Να αποδειχθούν οι πιο πάνω ιδιότητες.

5.2. ΣΚΕΔΑΣΜΟΣ COMPTON

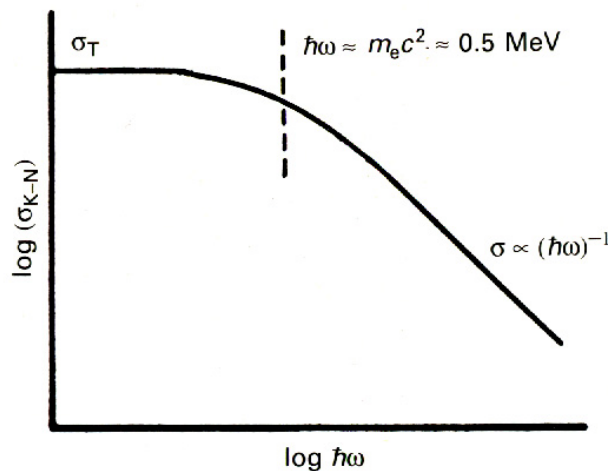
Οι σχέσεις (5.8) και (5.9) αποτελούν τα βασικά αποτελέσματα του σκεδασμού Thomson όπου το φωτόνιο προσεγγίζεται με ένα συνεχές ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Αυτή η προσέγγιση ισχύει όταν η ενέργεια της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι πολύ μικρότερη της ενέργειας ηρεμίας του ηλεκτρονίου, όταν δηλαδή $\varepsilon = h\nu \ll m_e c^2$. Ένα ακόμα βασικό αποτέλεσμα είναι ότι ο σκεδασμός είναι ελαστικός, ισχύει δηλαδή $\varepsilon = \varepsilon_1$, όπου ε και ε_1 η ενέργεια του φωτονίου πριν και μετά τον σκεδασμό αντίστοιχα.

Κβαντικά φαινόμενα υπεισέρχονται στην παραπάνω εικόνα με δύο τρόπους. Πρώτον, όσο αυξάνει η ενέργεια του φωτονίου ο σκεδασμός παύει να είναι ελαστικός (δηλαδή $\varepsilon_1 \neq \varepsilon$) καθώς το ηλεκτρόνιο αρχίζει να παίρνει ένα διαρκώς αυξανόμενο μέρος της ορμής και της ενέργειας του προσπίπτοντος φωτονίου. Επίσης η ενεργός διατομή της αλληλεπίδρασης ξεφεύγει πλέον από τα όρια του Κλασσικού Ηλεκτρομαγνητισμού και γίνεται αντικείμενο μελέτης της Κβαντοηλεκτροδυναμικής. Οι σχετικές λεπτομέρειες ξεφεύγουν του παρόντος, αξίζει όμως να σταθούμε σε δύο ασυμπτωτικά όρια:

1. Όριο Thomson: Στο μη σχετικιστικό όριο ($x = \varepsilon/m_e c^2 \ll 1$) η ενεργός διατομή δίνεται από $\sigma \cong \sigma_T$ σύμφωνα με τα όσα είπαμε προηγουμένως.
2. Όριο Klein Nishina: Στο σχετικιστικό όριο ($x = \varepsilon/m_e c^2 \gg 1$) η ενεργός διατομή δίνεται από τη σχέση

$$\sigma \cong \frac{3}{8} \sigma_T x^{-1} \left(\ln 2x + \frac{1}{2} \right) \quad (5.10)$$

δηλαδή η ενεργός διατομή ελαττώνεται όσο αυξάνει η ενέργεια του φωτονίου.



Σχήμα 5.4: Γραφική παράσταση της ενεργού διατομής για σκεδασμό Compton σε συνάρτηση της ενέργειας του φωτονίου.

5.3. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΣΚΕΔΑΣΜΟΣ ΚΟΜΠΤΟΝ

5.3.1. Κινηματικές αρχές κατά τον σκεδασμό Compton

Ας θεωρήσουμε ένα σχετικιστικό ηλεκτρόνιο κινούμενο μέσα σε πεδίο μονοχρωματικών ισοτροπικών φωτονίων κατά τη διεύθυνση του άξονα των x στο σύστημα ηρεμίας του παρατηρητή K . Το ηλεκτρόνιο σκεδάζει φωτόνια τα οποία έχουν διευθύνσεις που σχηματίζουν διάφορες γωνίες θ με τη διεύθυνσή του⁷.

Στο σύστημα ηρεμίας του ηλεκτρονίου K' οι αντίστοιχες γωνίες θ' δίνονται από τις γνωστές σχέσεις αποπλάνησης του φωτός

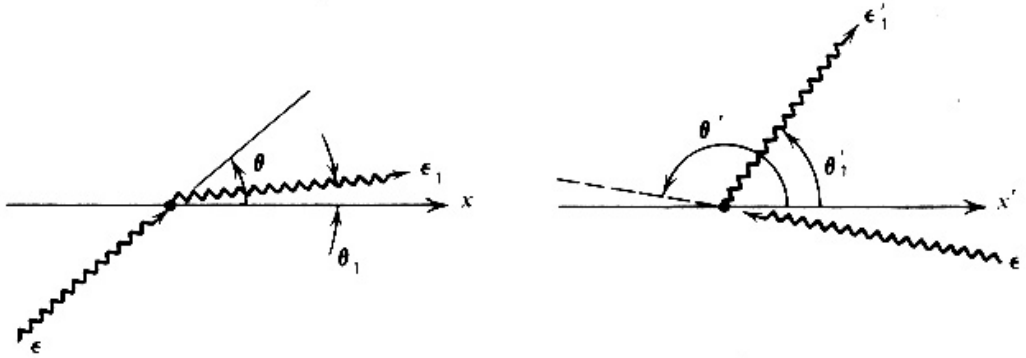
$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \beta)} \quad (5.11)$$

και

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \quad (5.12)$$

όπου γ και β είναι ο παράγοντας Lorentz και η ταχύτητα του ηλεκτρονίου στο σύστημα ηρεμίας του παρατηρητή. Όταν $\gamma \gg 1$, τότε $\beta \rightarrow 1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2}$ και όλα τα φωτόνια (εκτός αυτών που κινούνται κατά μήκος του άξονα x , δηλαδή παράλληλα με τη διεύθυνση του ηλεκτρονίου) εμφανίζονται από την διεύθυνση $\theta' \approx \pi$.

⁷ Η γωνία $\theta = \pi$ αντιστοιχεί σε μετωπική σύγκρουση.



Σχήμα 5.5: Γωνίες μεταξύ φωτονίων και ηλεκτρονίου όπως αυτές παρουσιάζονται στα συστήματα ηρεμίας του παρατηρητή (K) και του ηλεκτρονίου (K') αντίστοιχα.

Άσκηση: Ναδειχθεί ότι στο σύστημα ηρεμίας του ηλεκτρονίου K' τα φωτόνια προσπίπτουν σε ένα στενό κώνο που έχει για άξονα τον αρνητικό άξονα των x' και άνοιγμα $\sim \gamma^{-1}$. (Υπόδειξη: Να εξετάσετε τι συμβαίνει για ένα φωτόνιο που προσπίπτει σχηματίζοντας ορθή γωνία με τη διεύθυνση του ηλεκτρονίου στο σύστημα K).

Η ενέργεια των φωτονίων στο K' δίνεται από τη γνωστή σχέση του Doppler

$$\varepsilon' = \gamma\varepsilon(1 - \beta \cos \theta) \quad (5.13)$$

και κατά συνέπεια παίρνει τιμές από $\varepsilon'_{\min} \approx \varepsilon/2\gamma$ για $\theta=0$ έως $\varepsilon'_{\max} \approx 2\gamma\varepsilon$ για $\theta=\pi$ (ναδειχθεί). Παρατηρούμε ότι τα φωτόνια εμφανίζονται με πολύ χαμηλές ενέργειες όταν κατευθύνονται σχεδόν παράλληλα με το ηλεκτρόνιο, ενώ αντίθετα εμφανίζονται πολύ πιο ενεργητικά όταν οι συγκρούσεις είναι μετωπικές. Εάν ως μέση τιμή της ενέργειας του φωτονίου πάρουμε την $\langle \varepsilon' \rangle = \gamma\varepsilon$, τότε έχουμε ότι όταν

- $\gamma\varepsilon \ll m_e c^2 \rightarrow$ όριο Thomson
- $\gamma\varepsilon \gg m_e c^2 \rightarrow$ όριο Klein Nishina.

Παρόλο που θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα διάφορα ζητούμενα μεγέθη στο σύστημα ηρεμίας του ηλεκτρονίου και στη συνέχεια να μετασχηματίσουμε στο σύστημα ηρεμίας του παρατηρητή, είναι καλύτερο να χρησιμοποιήσουμε τετρανύσματα. Έστω λοιπόν \underline{P} και \underline{K} τα τετρανύσματα της ορμής του ηλεκτρονίου και του φωτονίου πριν τον σκεδασμό και \underline{P}_1 και \underline{K}_1 τα αντίστοιχα τετρανύσματα μετά τον σκεδασμό. Δηλαδή

$$\text{Ηλεκτρόνιο} \quad \underline{P} = [\gamma m_e c, \gamma m_e \vec{v}] \quad \underline{P}_1 = [\gamma_1 m_e c, \gamma_1 m_e \vec{v}_1]$$

$$\text{Φωτόνιο} \quad \underline{K} = \left[\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c} \hat{e}_k \right] \quad \underline{K}_1 = \left[\frac{h\nu_1}{c}, \frac{h\nu_1}{c} \hat{e}_{k_1} \right]$$

Πριν τον σκεδασμό

Μετά τον σκεδασμό

Τώρα μπορούμε να εργασθούμε όπως στην περίπτωση της αλληλεπίδρασης φωτονίου-φωτονίου. Το τετρανύσμα της ορμής διατηρείται κατά τον σκεδασμό, οπότε

$$\underline{P} + \underline{K} = \underline{P}_1 + \underline{K}_1. \quad (5.14)$$

Υψώνουμε στη συνέχεια στο τετράγωνο και χρησιμοποιούμε τις σχέσεις $\underline{P} \cdot \underline{P} = \underline{P}_1 \cdot \underline{P}_1 = -m_e^2 c^2$ και $\underline{K} \cdot \underline{K} = \underline{K}_1 \cdot \underline{K}_1 = 0$. Συνεπώς είναι εύκολο να δειχτεί (άσκηση!) ότι

$$\underline{P} \cdot \underline{K} = \underline{P}_1 \cdot \underline{K}_1 \quad . \quad (5.15)$$

Πολλαπλασιάζουμε τώρα τα μέλη της (4.14) με \underline{K}_1 και με την βοήθεια της (5.15) καταλήγουμε στη σχέση

$$\underline{P} \cdot \underline{K}_1 + \underline{K} \cdot \underline{K}_1 = \underline{P} \cdot \underline{K} \quad (5.16)$$

η οποία είναι και η ζητούμενη. Χρησιμοποιούμε στη συνέχεια τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο τετρανυσμάτων και ορίζουμε τις γωνίες οι οποίες υπεισέρχονται στον σκεδασμό ως (δες και Σχήμα 5.5):

Γωνία κατεύθυνσης φωτονίου πριν και μετά τον σκεδασμό: $\alpha = \cos^{-1}(\hat{e}_k \cdot \hat{e}_{k_1})$

Γωνία κατεύθυνσης φωτονίου πριν τον σκεδασμό και ηλεκτρονίου: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\hat{e}_k \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}\right)$

Γωνία κατεύθυνσης φωτονίου μετά τον σκεδασμό και ηλεκτρονίου: $\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{\hat{e}_{k_1} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}\right)$

Από την (5.16) βρίσκουμε

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{1 - (v/c)\cos\theta}{\left[1 - (v/c)\cos\theta_1 + (\varepsilon/\gamma m_e c^2)(1 - \cos\alpha)\right]} \quad (5.17)$$

Άσκηση: Ξεκινώντας από την (5.16) να αποδείξετε την (5.17).

Η παραπάνω σχέση είναι σημαντική για τον σκεδασμό Compton (τόσο τον ευθύ όσο και τον αντίστροφο) και αξίζει να σταθούμε για λίγο σε αυτήν. Καταρχήν όταν το ηλεκτρόνιο είναι σε ηρεμία ($v=0$, $\gamma=1$) αυτή περιγράφει το γνωστό φαινόμενο Compton:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{1}{1 + (\varepsilon/m_e c^2)(1 - \cos\alpha)} \quad (5.18)$$

η οποία εκφράζεται ακόμα σαν συνάρτηση του μήκους κύματος του φωτονίου

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda} = \frac{\varepsilon}{m_e c^2} (1 - \cos\alpha) \quad (5.19)$$

Επίσης η σχέση (5.17) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την μέγιστη ενέργεια που μπορεί να αποκτήσει ένα φωτόνιο όταν σκεδάζεται με ένα σχετικιστικό ηλεκτρόνιο.

Πράγματι στο όριο Thomson όπου $\varepsilon \ll \gamma m_e c^2$ το δεξί μέλος της (5.17) γίνεται μέγιστο όταν $\theta=\pi$ και $\theta_1=0$ (όταν έχουμε δηλαδή μετωπική σύγκρουση ηλεκτρονίου-φωτονίου και το φωτόνιο μετά τον σκεδασμό κινείται παράλληλα με το ηλεκτρόνιο – αν και η πρώτη συνθήκη αποδεικνύεται πολύ πιο ισχυρή από την δεύτερη). Σε αυτή την περίπτωση είναι εύκολο να δειχτεί (άσκηση!) ότι

$$\varepsilon_1 = 4\gamma^2 \varepsilon \quad (5.20)$$

που είναι και η ζητούμενη μέγιστη ενέργεια.

Σημείωση: Αξίζει να αναπαράγουμε την παραπάνω σχέση χρησιμοποιώντας απλούς μετασχηματισμούς συστημάτων αναφοράς. Έστω λοιπόν ότι μετά από ένα σκεδασμό (όπως αυτός μετράται στο K') το φωτόνιο αποκτά ενέργεια ε' ενώ σχηματίζει γωνία α' με τη διεύθυνση του φωτονίου πριν τον σκεδασμό. Προφανώς ισχύει η σχέση (5.18), η οποία γράφεται

$$\frac{\varepsilon'_1}{\varepsilon'} = \frac{1}{1 + (\varepsilon'/m_e c^2)(1 - \cos \alpha')}$$

Επειδή έχουμε θεωρήσει σκεδασμό στο όριο Thomson ισχύει $\varepsilon' \ll m_e c^2$ και συνεπώς $\varepsilon'_1 = \varepsilon'$ (δηλαδή τα γνωστά περί ελαστικού σκεδασμού στο όριο Thomson). Ισχύει όμως η σχέση (5.13) καθώς και η σχέση

$$\varepsilon_1 = \gamma \varepsilon'_1 (1 + \beta \cos \theta'_1)$$

(γιατί;). Παίρνοντας, όπως προηγουμένως, την περίπτωση όπου $\theta = \pi$ και $\theta'_1 = 0$, βρίσκουμε αμέσως την ζητούμενη (5.20)

5.3.2. Ενεργειακές απώλειες στο όριο Thomson

Μία ωραία παρουσίαση των ενεργειακών απωλειών για τα σχετικιστικά ηλεκτρόνια στο όριο Thomson δίνει ο Longair (τόμος 1, σ.102)⁸. Οι ενεργειακές απώλειες στο σύστημα ηρεμίας του ηλεκτρονίου K' δίνονται από τη σχέση

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)' = \sigma_T c U'_{\phi\omega\tau}. \quad (5.21)$$

Άσκηση: Να αποδειχθεί η σχέση (5.23). (Υπόδειξη: Να ξεκινήσετε από τη σχέση (5.4) και να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι η ακτινοβολούμενη ισχύς P ισούται με τις ενεργειακές απώλειες του ηλεκτρονίου καθώς και το ότι η ενεργειακή πυκνότητα των φωτονίων δίνεται από τη σχέση $U_{\phi\omega\tau} = \sum_i E_i^2 / 8\pi$, όπου E_i είναι οι εντάσεις των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που σκεδάζονται από το ηλεκτρόνιο).

Επειδή η ενέργεια και ο χρόνος μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο, ισχύει δηλαδή $dE = \gamma dE'$ και $dt = \gamma dt'$, έχουμε

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)' = \left(\frac{dE}{dt}\right) \quad (5.22)$$

συνεπώς για να υπολογίσουμε τις ενεργειακές απώλειες του ηλεκτρονίου αρκεί να υπολογίσουμε την ενεργειακή πυκνότητα των φωτονίων $U'_{\phi\omega\tau}$ όπως αυτή μετράται στο σύστημα ηρεμίας του ηλεκτρονίου K' (η ενεργειακή πυκνότητα των φωτονίων $U_{\phi\omega\tau}$ στο σύστημα ηρεμίας του παρατηρητή K θεωρείται γνωστή).

Για να υπολογίσουμε την ενεργειακή πυκνότητα των φωτονίων στο K' χρειαζόμαστε δύο ποσότητες: την ενέργεια κάθε φωτονίου στο K' και τον ρυθμό με τον οποίο φτάνουν αυτά στο ηλεκτρόνιο. Το πρώτο ζητούμενο, δηλαδή η ενέργεια, δίνεται από τη σχέση (5.13). Για να βρούμε την μετρούμενη ροή εργαζόμαστε ως εξής: Έστω θ η γωνία υπό την οποία η δέσμη φωτονίων προσπίπτει στο K . Αυτή συνδέεται με την αντίστοιχη γωνία θ' την οποία μετράει παρατηρητής στο σύστημα

⁸ Ο Longair ορίζει τη γωνία θ μεταξύ προσπίπτοντος φωτονίου και ηλεκτρονίου έτσι ώστε η μετωπική σύγκρουση να αντιστοιχεί σε $\theta=0$.

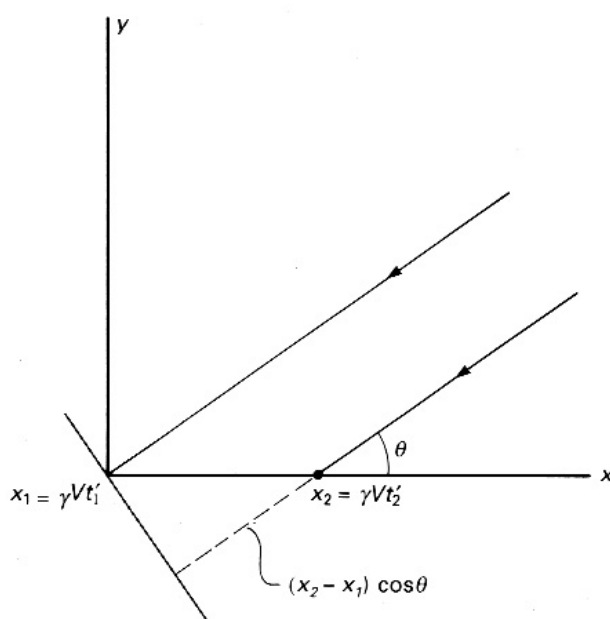
Κ' σύμφωνα με τις σχέσεις (5.11) και (5.12). Ας θεωρήσουμε τώρα δύο φωτόνια τα οποία φτάνουν στο Κ' τις χρονικές στιγμές t'_1 και t'_2 . Οι συντεταγμένες των γεγονότων αυτών στο Κ είναι

$$[x_1, 0, 0, t_1] = [\gamma vt'_1, 0, 0, \gamma t'_1] \text{ και } [x_2, 0, 0, t_2] = [\gamma vt'_2, 0, 0, \gamma t'_2]$$

αντίστοιχα. Ο υπολογισμός αυτός κάνει την υπόθεση ότι τα φωτόνια της δέσμης κινούνται σε παράλληλες τροχιές, όπως δείχνει και το σχήμα 5.7. Από το ίδιο σχήμα φαίνεται επίσης ότι η χρονική διαφορά με την οποία τα φωτόνια φτάνουν σε ένα επίπεδο κάθετο προς τη διεύθυνση διάδοσής τους είναι

$$\Delta t = t_2 - \frac{(x_2 - x_1)}{c} \cos \theta - t_1 = (t'_2 - t'_1) \gamma \left[1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right] \quad (5.23)$$

με άλλα λόγια η χρονική διαφορά είναι μικρότερη κατά ένα παράγοντα $\gamma(1 - \beta \cos \theta)$ στο Κ' από ότι στο Κ. Παρατηρούμε ότι αυτός ο παράγοντας είναι ακριβώς ο ίδιος με αυτόν που υπεισέρχεται στη σχέση του Doppler (5.13).



Σχήμα 5.6: Γεωμετρία που παριστάνει τον ρύθμο πρόσπτωσης των φωτονίων όπως τον αντιλαμβάνεται παρατηρητής στο αδρανειακό σύστημα Κ.

Συνεπώς η ενεργειακή πυκνότητα της δέσμης φωτονίων που προσπίπτουν με γωνία θ στο σύστημα Κ είναι

$$U'_{\phi\omega\tau}(\theta) = [\gamma(1 - \beta \cos \theta)]^2 U_{\phi\omega\tau} \quad (5.24)$$

Στην περίπτωση όπου το πεδίο ακτινοβολίας είναι ισοτροπικό (όπως συμβαίνει συνήθως), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την ολική ενεργειακή πυκνότητα ολοκληρώνοντας ως προς την στερεά γωνία, οπότε

$$U'_{\phi\omega\tau} = U_{\phi\omega\tau} \int_0^\pi [\gamma(1 - \beta \cos \theta)]^2 \frac{1}{2} \sin \theta d\theta. \quad (5.25)$$

και συνεπώς

$$U'_{\phi\omega\tau} = \frac{4}{3} U_{\phi\omega\tau} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right). \quad (5.26)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.21) και (5.22) βρίσκουμε

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.21) και (5.22) βρίσκουμε

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\phi\omega\tau} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4}\right). \quad (5.27)$$

Αυτή είναι η ενέργεια που κερδίζουν τα φωτόνια εξ αιτίας των σκεδασμών. Ταυτόχρονα όμως αυτά χάνουν την ενέργεια αυτών που σκεδάζονται και που ισούται με $\sigma_T c U_{\phi\omega\tau}$. Τελικά έχουμε λοιπόν

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\phi\omega\tau} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4}\right) - \sigma_T c U_{\phi\omega\tau} = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{\phi\omega\tau} \beta^2 \gamma^2 \quad (5.28)$$

που δίνει τις συνολικές ενεργειακές απώλειες ηλεκτρονίων ενέργειας $E_e = \gamma m_e c^2$ όταν βρίσκονται σε ισοτροπικό πεδίο φωτονίων ενεργειακής πυκνότητας $U_{\phi\omega\tau}$, υπό την προϋπόθεση ότι οι σκεδασμοί ηλεκτρονίων-φωτονίων πραγματοποιούνται στο όριο Thomson.

Σημείωση: Μία άλλη, πιο αυστηρή, απόδειξη της σχέσης (5.25) προκύπτει από τις εξισώσεις διάδοσης ακτινοβολίας. Ξεκινάμε από το βασικό αποτέλεσμα ότι το πηλίκο I_ν/ν^3 παραμένει αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς Lorentz, όπου η ποσότητα I_ν είναι η ειδική ένταση ακτινοβολίας. Συνεπώς ανάμεσα στα συστήματα K και K' ισχύει η σχέση

$$I'_{\nu'} = I_\nu \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^3 \quad (5.29)$$

Επίσης είναι γνωστό από την θεωρία διάδοσης της ακτινοβολίας ότι η ειδική ενεργειακή πυκνότητα (δηλαδή η ενεργειακή πυκνότητα ανά συχνότητα ανά στερεά γωνία) δίνεται από τη σχέση

$$U_\nu(\Omega) = \frac{1}{c} I_\nu. \quad (5.30)$$

Συνεπώς ορίζοντας

$$U(\Omega) \equiv \int d\nu U_\nu(\Omega)$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.13), (5.29) και (5.30) μπορούμε να συσχετίσουμε την διαφορική ενεργειακή πυκνότητα $U(\Omega)$ στα συστήματα K και K'

$$U'(\Omega') = \gamma^4 (1 - \beta\mu)^4 U(\Omega). \quad (5.31)$$

Άσκηση: Να αποδειχθεί η σχέση (5.31).

Ορίζουμε στη συνέχεια την ολική ενεργειακή πυκνότητα των φωτονίων ως $U_{\phi\omega\tau} \equiv \int d\Omega U(\Omega)$ και χρησιμοποιούμε ότι το διαφορικό της στερεάς γωνίας μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$d\Omega' = \frac{d\Omega}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2}. \quad (5.32)$$

Άσκηση: Ξεκινώντας από την σχέση (5.12) να αποδείξετε την (5.32).

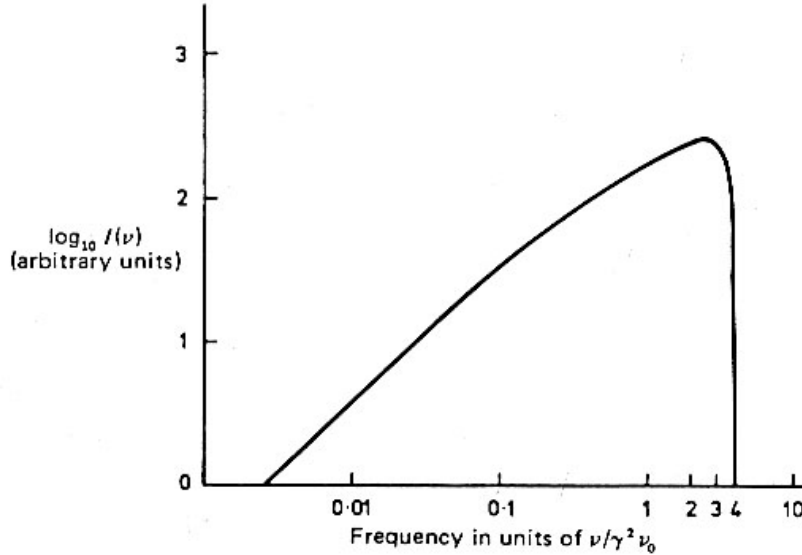
5.3.3. Παραγόμενο φάσμα στο όριο Thomson: Μονοενεργητικά ηλεκτρόνια

Το επόμενο ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός του φάσματος της ακτινοβολίας που σκεδάζεται στο όριο Thomson. Μία πλήρης ανάλυση υπάρχει στο άρθρο των Blumenthal and Gould⁹, εδώ απλώς επαναλαμβάνουμε το αποτέλεσμα.

Έστω ότι ηλεκτρόνιο ενέργειας $E_e = \gamma m_e c^2$ εισέρχεται σε ισοτροπικό πεδίο φωτονίων. Το παραγόμενο φάσμα δίνεται από τη σχέση

$$I_\gamma(\varepsilon_1) = \frac{3\sigma_T c}{16\gamma^4} \frac{n(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \varepsilon_1 \left[2\varepsilon_1 \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{4\gamma^2 \varepsilon}\right) + \varepsilon_1 + 4\gamma^2 \varepsilon - \frac{\varepsilon_1^2}{2\gamma^2 \varepsilon} \right] d\varepsilon \quad (5.33)$$

τη μορφή του οποίου δίνει το Σχήμα 5.7. Η ποσότητα $n(\varepsilon)$ είναι η διαφορική αριθμητική πυκνότητα των φωτονίων του πεδίου (διαστάσεις = #φωτονίων/όγκο/ενέργεια). Οι διαστάσεις της έντασης I_γ είναι (ακτινοβολούμενη) ενέργεια/χρόνο/ενέργεια (ή συχνότητα) εκτομπής. Το διαφορικό $d\varepsilon$ υποδηλώνει ότι η ένταση (5.33) πρέπει να ολοκληρωθεί ως προς όλα τα φωτόνια του πεδίου.



Σχήμα 5.7: Δημιουργούμενο φάσμα σκεδασμένων ισοτροπικών φωτονίων συχνότητας ν_0 από μονοενεργητικά ηλεκτρόνια ενέργειας $E_e = \gamma m_e c^2$.

Από το Σχήμα 5.7 παρατηρούμε ότι το φάσμα εκτείνεται μέχρι την ενέργεια $\varepsilon_1^{\max} = 4\gamma^2 \varepsilon$, σε συμφωνία με την σχέση (5.20), και ότι παρουσιάζει μέγιστο κοντά σε αυτή την ενέργεια. Προφανώς το συνολικό φάσμα βρίσκεται μετά από ολοκλήρωση της (5.33) ως προς όλες τις ενέργειες του πεδίου φωτονίων ε . Για να απλουστεύσουμε το πρόβλημα ας θεωρήσουμε ότι το πεδίο φωτονίων είναι μονοχρωματικό, ισχύει δηλαδή $n(\varepsilon) = n_0 \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$. Τότε από την (5.33) μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση ενέργεια των φωτονίων μετά τον σκεδασμό τους. Βρίσκουμε

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{4}{3} \gamma^2 \varepsilon_0. \quad (5.34)$$

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και με έναν πιο εμπειρικό τρόπο. Θεωρούμε ότι σε κάθε σκεδασμό το ποσό ενέργειας που χάνει ένα ηλεκτρόνιο ισούται με την ενέργεια του φωτονίου μετά τον σκεδασμό του. Ισχύει λοιπόν η σχέση

⁹ G.B. Blumenthal, R.J. Gould, Reviews of Modern Physics 42, 237, 1970

Ενεργειακές απώλειες = (Μέση ενέργεια φωτονίου) × (Ρυθμός σκεδασμών).
Ο ρυθμός σκεδασμών δίνεται από την σχέση

$$\left(\frac{dN}{dt}\right) = \sigma_T c n_0 \quad (5.35)$$

ενώ οι ενεργειακές απώλειες δίνονται από τη σχέση (5.28). Χρησιμοποιώντας επιπλέον τη σχέση

$$U_{\phi\omega\tau} = \int d\varepsilon \cdot \varepsilon n(\varepsilon) = \int d\varepsilon \cdot \varepsilon \cdot n_0 \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) = n_0 \varepsilon_0 \quad (5.36)$$

βρίσκουμε ότι

$$\text{Μέση ενέργεια φωτονίου μετά τον σκεδασμό} = \frac{4}{3} \beta^2 \gamma^2 \varepsilon_0$$

η οποία για $\gamma \gg 1$ (οπότε $\beta \approx 1$) γίνεται η σχέση (5.34).

Η σημασία του αντίστροφου σκεδασμού Compton για την Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών γίνεται τώρα προφανής. Ηλεκτρόνια με παράγοντα Lorentz γ σκεδάζουν φωτόνια χαμηλών ενεργειών σε ενέργειες που είναι υψηλότερες κατά ένα παράγοντα γ^2 . Για παράδειγμα, ηλεκτρόνια με $\gamma=1000$ σκεδάζουν ραδιοφωτόνια στο υπεριώδες, υπέρυθρα φωτόνια στις ακτίνες X και οπτικά φωτόνια στις ακτίνες γ .

5.3.4. Παραγόμενο φάσμα: Ηλεκτρόνια με κατανομή νόμο δύναμης

Στις περισσότερες περιπτώσεις με αστροφυσικό ενδιαφέρον τα ηλεκτρόνια δεν έχουν μονοενεργητική κατανομή αλλά κατανομή που είναι νόμος δύναμης, δηλαδή

$$N_e(\gamma) = k_e \gamma^{-p} \quad \text{για } \gamma_{\min} \leq \gamma \leq \gamma_{\max} \quad (5.37)$$

και $N_e(\gamma) = 0$ για $\gamma < \gamma_{\min}$ ή $\gamma > \gamma_{\max}$.

Τα όρια της κατανομής των ηλεκτρονίων δεν είναι γνωστά αλλά εξαρτώνται από το μηχανισμό επιτάχυνσης που δρα στην συγκεκριμένη περίπτωση. Εδώ θα τα θεωρήσουμε σαν ελεύθερες παραμέτρους.

Το φάσμα των σκεδασμένων φωτονίων που παράγεται σε αυτή την περίπτωση βρίσκεται αν ολοκληρώσουμε το φάσμα (5.33) –το οποίο παράγεται από μονοενεργητικά ηλεκτρόνια – ως προς όλες τις ενέργειες των ηλεκτρονίων. Έχουμε λοιπόν

$$I_{pl}(\varepsilon_1) = \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} d\gamma N_e(\gamma) I_\gamma(\varepsilon_1). \quad (5.38)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται αναλυτικά (δες π.χ. το άρθρο των Blumenthal και Gould). Ωστόσο είναι πιο απλό να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι η

συνάρτηση $I_\gamma(\varepsilon_1)$ παρουσιάζει ένα μέγιστο κοντά στην ενέργεια $\varepsilon_1^* = \frac{4}{3} \gamma^2 \varepsilon_0$ και να

θέσουμε

$$I_\gamma(\varepsilon_1) = A \varepsilon_1 \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^*) \quad (5.39)$$

προσεγγίζουμε δηλαδή, όπως υποδηλώνει η συνάρτηση δέλτα, το φάσμα του Σχήματος 5.7 με μονοενεργητική εκπομπή στη μέση ενέργεια σκεδασμού. Η σταθερά A υπολογίζεται από την απαίτησή μας ο ρυθμός της ακτινοβολούμενης ενέργειας των φωτονίων να ισούται με τον ρυθμο απώλειας ενέργειας του ηλεκτρονίου (σχέση 5.28). Εξισώνοντας βρίσκουμε $A = n_0 \sigma_T c$.

Άσκηση: Να δειχτεί η παραπάνω σχέση.

Αντικαθιστώντας την (5.39) στην (5.38) βρίσκουμε

$$I_{pl}(\varepsilon_1) = \frac{1}{2} k_e n_0 \sigma_T c \varepsilon_0^2 \varepsilon_1^{\frac{p-1}{2}} \quad \text{για } \varepsilon_1^{\min} \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_1^{\max} \quad (5.40)$$

$$\text{όπου } \varepsilon_1^{\min} = \frac{4}{3} \varepsilon_0 \mathcal{N}_{\min}^2 \quad \text{και} \quad \varepsilon_1^{\max} = \frac{4}{3} \varepsilon_0 \mathcal{N}_{\max}^2. \quad (5.41)$$

Άσκηση: Να αποδειχτεί η παραπάνω σχέση.

Παρατηρούμε ότι η εκπομπή είναι νόμος δύναμης με εκθέτη ο οποίος καθορίζεται από την κατανομή των ηλεκτρονίων. Έχουμε δηλαδή ότι το παραγόμενο φάσμα (και κατά συνέπεια η ροή) των φωτονίων είναι της μορφής $F_\nu \propto I_\nu \propto \nu^{-a}$ με

$$a = \frac{p-1}{2}. \quad (5.42)$$

Η διαφορά στους εκθέτες ηλεκτρονίων και φωτονίων οφείλεται στο ότι η μέση ενέργεια των φωτονίων μετά την σκέδαση συνδέεται με το τετράγωνο της ενέργειας του ηλεκτρονίου. Η παραπάνω σχέση είναι σημαντική γιατί μας επιτρέπει να εξαγάγουμε από παρατηρησιακά δεδομένα την ενεργειακή κατανομή των ηλεκτρονίων, συνεπώς μας δίνει πληροφορίες για τις φυσικές συνθήκες στη πηγή των φωτονίων. Πράγματι σε πολλές περιπτώσεις έχουμε μετρήσεις για τις παραμέτρους n_0 και ε_0 του πεδίου φωτονίων καθώς και το φάσμα της πηγής στις υψηλές ενέργειες. Με βάση αυτά τα στοιχεία μπορούμε να υπολογίσουμε τα χαρακτηριστικά των ηλεκτρονίων υψηλών ενεργειών που υπάρχουν σε αυτές.

5.3.5. Εφαρμογές

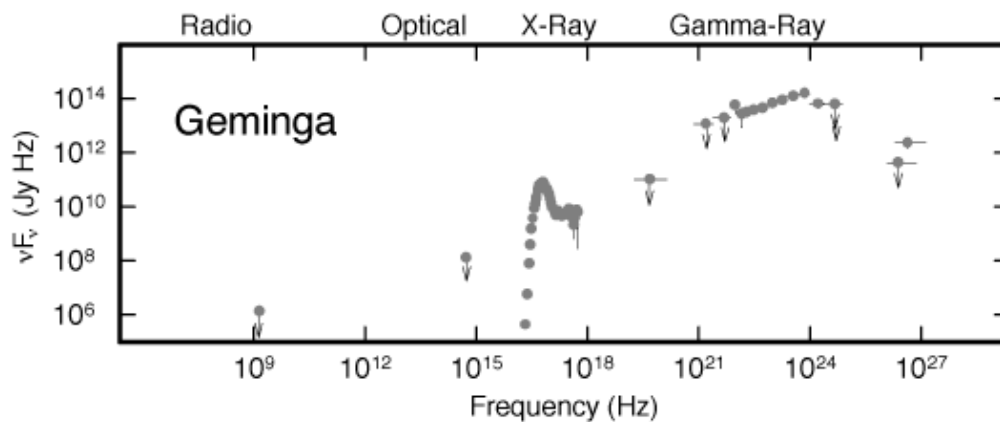
Ο αντίστροφος σκεδασμός Compton βρίσκει πολλές εφαρμογές στην Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών, καθώς πολλές πηγές περιέχουν σχετικιστικά ηλεκτρόνια από τη μία και φωτόνια χαμηλών ενεργειών από την άλλη. Παρακάτω αναφέρουμε τρία χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Εφαρμογή 1: Στις αρχές της δεκαετίας του 1990 ο ανιχνευτής ακτίνων γ EGRET, μέρος του δορυφόρου Compton Gamma Ray Observatory (Σχήμα 2.7.), ανακάλυψε έξι pulsars να εκπέμπουν ακτινοβολία γ στην περιοχή 100 MeV-30 GeV με φάσμα που είναι νόμος δύναμης¹⁰. Το Σχήμα 5.8 παρουσιάζει την εκπομπή ενός από αυτούς, του επονομαζόμενου Geminga pulsar, σε όλο το εύρος του H/M φάσματος. Ο Geminga pulsar είναι μία περίεργη περίπτωση αστέρα νετρονίων. Έχει περίοδο περιστροφής 0.237 sec, $\dot{P} = 1.097 \times 10^{-14}$ και, με απόσταση $D=552$ έτη φωτός, είναι μία από τις λαμπρότερες πηγές ακτίνων γ στον ουρανό —ωστόσο δεν έχει ανιχνευθεί ακόμα στα ραδιοκύματα¹¹. Επίσης εκπέμπει στις ακτίνες X, αλλά αυτή η εκπομπή μοιάζει να συνδέεται με θερμική ακτινοβολία από μέρος της επιφανείας του. Η παράμετρος νF_ν που χρησιμοποιούμε για να εκφράσουμε την εκπομπή (συχνότητα παρατήρησης \times ροή ενέργειας στη συγκεκριμένη συχνότητα—μονάδες Jansky.Hz,

¹⁰ Ο ανιχνευτής ακτίνων γ GLAST που θα τεθεί σε τροχιά το 2006 αναμένεται να παρατηρήσει μία τάξη μεγέθους περισσότερους pulsars.

¹¹ Υπενθυμίζουμε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των pulsars έχουν ανακαλυφθεί εξαιτίας των παλμών που εκπέμπουν στα ραδιοκύματα.

όπου $1 \text{ Jy} = 10^{-23} \text{ erg.s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$) υποδηλώνει το μέγιστο της εκπομπής. Στην προκειμένη περίπτωση παρατηρούμε ότι η νF_ν παρουσιάζει μέγιστο για $\nu \approx 10^{24} \text{ Hz}$



Σχήμα 5.8: Εκπομπή του Geminga pulsar σε όλο το εύρος του H/M φάσματος. Τα βέλη δηλώνουν πάνω όρια.

που βρίσκεται στην περιοχή των ακτίνων γ υψηλών ενεργειών ($\sim 4 \text{ GeV}$). Επίσης παρατηρούμε ότι η εκπομπή στις ακτίνες γ υπερβαίνει τουλάχιστον κατά ένα παράγοντα 10^3 την εκπομπή στις ακτίνες X και κατά 10^9 την ραδιοεκπομπή. Συνεπώς ο Geminga pulsar παράγει πολύ αποτελεσματικά ακτίνες γ και η ανακάλυψή του, όπως και αυτή των υπόλοιπων πέντε pulsars που εκπέμπουν σε αυτές τις ενέργειες, άλλαξε ριζικά τις θεωρίες για το πως λειτουργούν τα αντικείμενα αυτά.

Μία εξήγηση της ακτινοβολίας γ είναι ο αντίστροφος σκεδασμός Compton από σχετικιστικά ηλεκτρόνια τα οποία επιταχύνονται στις μαγνητόσφαιρες των αστέρων αυτών και σκεδάζουν θερμικά φωτόνια της επιφανείας τους. Το ζητούμενο είναι, ξεκινώντας από αυτή την υπόθεση, να βρούμε την ενεργειακή κατανομή των σχετικιστικών ηλεκτρονίων.

1) Ο νόμος δύναμης που παρατηρείται στην περιοχή των ακτίνων γ έχει φασματικό δείκτη $\alpha=0.5$ (γιατί από το Σχήμα 5.8 έχουμε $\nu F_\nu \propto \nu^{0.5} \Rightarrow F_\nu \propto \nu^{-0.5}$). Αυτό σημαίνει ότι τα ηλεκτρόνια έχουν κατανομή που είναι νόμος δύναμης με εκθέτη $p=2$ (από σχέση 5.42).

2) Από τις παρατηρήσεις στις μαλακές ακτίνες X διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε το φάσμα εκεί με μονοχρωματική εκπομπή της μορφής $A_0 \delta(\nu - \nu_0)$ όπου $A_0 \approx 10^{11} \text{ JyHz}$ και $\nu_0 \approx 10^{17} \text{ Hz}$. Εάν λοιπόν θεωρήσουμε αυτά τα φωτόνια σαν τα φωτόνια χαμηλών ενεργειών, τότε από τις σχέσεις (5.41) βρίσκουμε ότι $\gamma_{\min} = \sqrt{\nu_1^{\min} / \nu_0} \approx 10^{2.5}$ και $\gamma_{\max} = \sqrt{\nu_1^{\max} / \nu_0} \approx 10^{3.5}$ (χρησιμοποιώντας από το Σχήμα 5.8 ότι $\nu_1^{\min} \approx 10^{22} \text{ Hz}$ και $\nu_1^{\max} \approx 10^{24} \text{ Hz}$).

3) Για να βρούμε την αριθμητική πυκνότητα n_0 των φωτονίων των ακτίνων X θεωρούμε ότι προέρχονται από την επιφάνεια του αστήρα νετρονίων, οπότε γράφουμε

$$L_0 = 4\pi R_*^2 c U_0 = 4\pi R_*^2 c h \nu_0 n_0 \quad (5.43)$$

όπου L_0 η λαμπρότητα στις ακτίνες X, R_* η ακτίνα του αστήρα νετρονίων και $U_0 = h \nu_0 n_0$ η ενεργειακή πυκνότητα των ακτίνων X. Επειδή η λαμπρότητα δίνεται κατευθείαν από τα παρατηρησιακά δεδομένα, δηλ.

$$L_0 = 4\pi D^2 \int d\nu \cdot F_0 = 4\pi D^2 A_0$$

βρίσκουμε $L_0 = 3.4 \times 10^{30}$ erg/sec. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην σχέση (5.43) και χρησιμοποιώντας $R_* = 10^6$ cm, βρίσκουμε $n_0 \approx 1.4 \times 10^{16}$ φωτόνια/cm³.

4) Έχοντας μια τιμή για το n_0 μπορούμε να βρούμε την σταθερά k_e των ηλεκτρονίων από τη σχέση (5.40). Από το σχήμα 5.8 βρίσκουμε ότι για $\nu_1 = 10^{24}$ Hz, $\nu F_\nu \approx 10^{14}$ JyHz και συνεπώς η ένταση ακτινοβολίας στην μαγνητόσφαιρα του pulsar είναι για τη συγκεκριμένη συχνότητα (υποθέτοντας ισοτροπική εκπομπή) $I_\nu = 4\pi D^2 F_\nu \approx 5 \times 10^{35}$ erg/sec/Hz. Χρησιμοποιούμε στη συνέχεια την σχέση (5.40) και λύνουμε ως προς k_e (που είναι πλέον ο μοναδικός άγνωστος) και βρίσκουμε $k_e = 1.2 \times 10^{37}$. Η συνολική ενέργεια που υπάρχει στα ηλεκτρόνια δίνεται από τη σχέση $E_{ολ} = \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} d\gamma \cdot \gamma m_e c^2 N(\gamma)$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.37) παίρνουμε $E_{ολ} \approx 4.5 \times 10^{31}$ erg.

5) Το ενεργειακό περιεχόμενο των ηλεκτρονίων δεν δίνει όλη την ιστορία για την ακτινοβολία τους στη μαγνητόσφαιρα του pulsar. Από τη σχέση (5.28) για τις ενεργειακές απώλειες έχουμε ότι ο χρόνος ζωής ηλεκτρονίου με παράγοντα Lorentz γ είναι

$$\tau(\gamma) = \frac{E_e}{-\frac{dE}{dt}} = \frac{\gamma m_e c^2}{\frac{4}{3} \sigma_T c U_{\phi\omega\tau} \gamma^2}$$

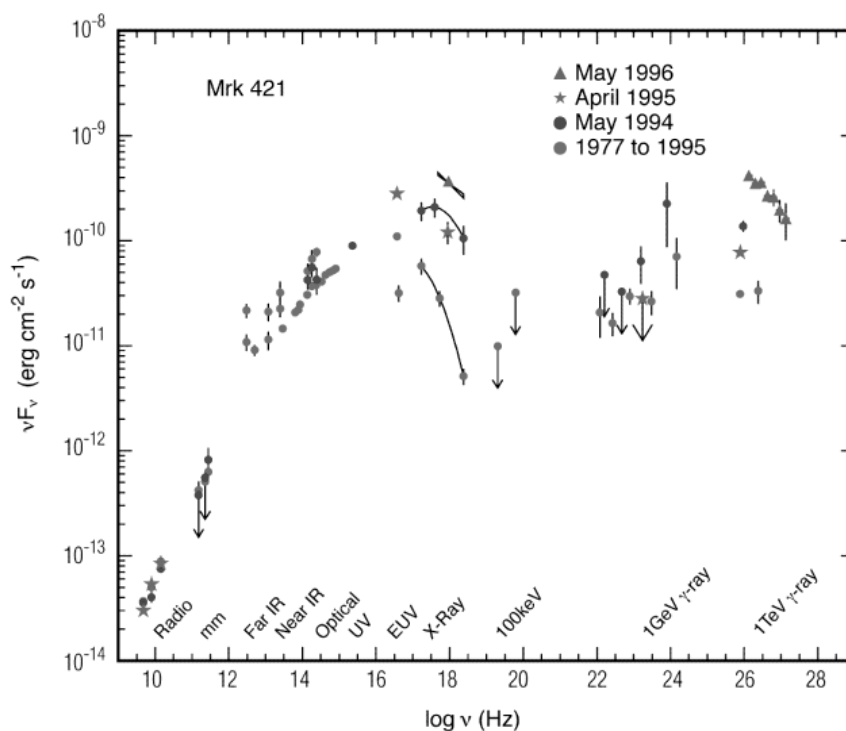
Θέτοντας $U_{\phi\omega\tau} = U_0 \square h n_0 \nu_0 = 9.3 \times 10^6$ erg/cm³ βρίσκουμε $\tau(\gamma) \approx 3.3\gamma^{-1}$. Συνεπώς ο χρόνος ζωής των ηλεκτρονίων με $\gamma = \gamma_{\max} \approx 3 \times 10^3$ είναι μόλις sec. Αυτό σημαίνει ότι μέσα σε αυτό τον χρονικό διάστημα νέα ηλεκτρόνια πρέπει να έχουν επιταχυνθεί σε αυτή την ενέργεια για να αντικαταστήσουν αυτά που έχασαν την ενέργειά τους εξαιτίας των σκεδασμών. Αυτός ο απλός υπολογισμός αποτελεί μία απόδειξη ότι στις μαγνητόσφαιρες των pulsars έχουμε συνεχή επιτάχυνση σωματιδίων σε υψηλές ενέργειες.

6) Τέλος, είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε και το εξής. Η συνολική λαμπρότητα του pulsar στις ακτίνες γ είναι $L_\gamma = 4\pi D^2 \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu F_\nu \approx 7 \times 10^{33}$ erg/sec. Από την άλλη, ο ρυθμός ακτινοβολίας περιστρεφόμενου διπόλου¹² δίνει για τις παραμέτρους του Geminga pulsar $\dot{E} = 1.2 \times 10^{34}$ erg/sec. Συγκρίνοντας τα δύο αυτά μεγέθη παρατηρούμε ότι ο συγκεκριμένος pulsar μετατρέπει τουλάχιστον το 60% της συνολικής ακτινοβολούμενης ενέργειάς του σε ακτινοβολία γ .

Εφαρμογή 2: Ο ανιχνευτής EGRET ανακάλυψε επίσης 60 ενεργούς γαλαξίες (που όλοι ανήκουν στην κατηγορία των blazars) να εκπέμπουν στις σκληρές ακτίνες γ . Αυτή η ανακάλυψη φανέρωσε για πρώτη φορά ότι οι ενεργοί γαλαξίες επιταχύνουν σωματίδια σε υψηλές ενέργειες. Μία σχεδόν καθολικά αποδεκτή θεωρία για τους blazars προτείνει ότι πρόκειται περί ενεργών γαλαξιών με τους πίδακες τους στραμμένους προς την κατεύθυνση της Γης (σε αντίθεση με τους ραδιογαλαξίες που έχουν τους πίδακες σε μεγάλες γωνίες ως προς την κατεύθυνση Γης-ενεργού γαλαξία). Αυτός ο χαρακτηριστικός προσανατολισμός είναι που προσδίδει στους

¹² Δες σχέση (2.13) των σημειώσεων του μαθήματος Αστροφυσική I

blazars τις ιδιομορφίες τους (ταχύτατες αυξομειώσεις στην ένταση, ισχυρή πόλωση, σε πολλές περιπτώσεις υπερφωτεινή κίνηση και ακτινοβολία γ) μιας και η συνολική εκπομπή τους κυριαρχείται από την εκπομπή του πίδακά τους.

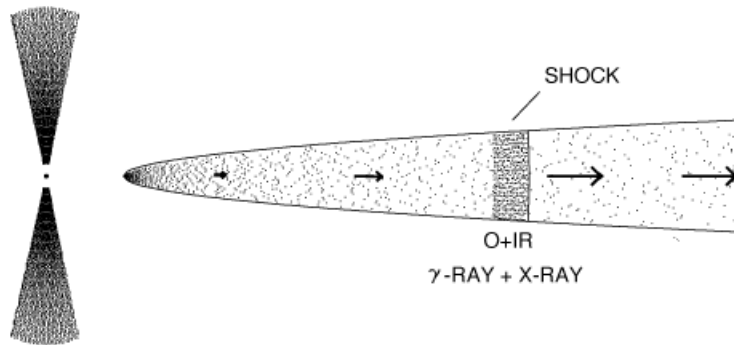


Σχήμα 5.9: Εκπομπή του Ενεργού Γαλαξία Markarian 421 σε όλο το εύρος του H/M φάσματος και για διάφορες εποχές παρατήρησης. Τα βέλη δηλώνουν πάνω όρια.

Το Σχήμα 5.9 παρουσιάζει το φάσμα εκπομπής από τον blazar Markarian 421. Το εύρος του καλύπτει από τα ραδιοκύματα (1 GHz) έως ενέργειες γ πολύ υψηλών ενεργειών (10 TeV). Αυτό που προκαλεί εντύπωση δεν είναι μόνο οι 19 τάξεις μεγέθους που καλύπτει η εκπομπή του συγκεκριμένου blazar, αλλά και η συνεχής μεταβολή της ροής που παρατηρείται κυρίως σε ακτίνες X και γ .

Όπως και στην περίπτωση των pulsars, μία από τις βασικές απόψεις για την ακτινοβολία γ (ενέργειες από 1 MeV έως 10 TeV) είναι ότι πρόκειται για αντίστροφο σκεδασμό Compton σχετικιστικών ηλεκτρονίων. Τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται σε οστικά κύματα που οδεύουν στους πίδακες¹³ και σκεδάζουν σε υψηλές ενέργειες είτε φωτόνια του δίσκου προσαύξησης της κεντρικής μελανής οπής είτε φωτόνια των γραμμών εκπομπής (Σχήμα 5.10). Επειδή τα φωτόνια αυτά έχουν ενέργειες από υπέρυθρο έως το υπεριώδες μέρος του φάσματος ($\epsilon_0 \approx .1 - 3\text{eV}$) και οι ακτίνες γ μπορούν να φτάσουν τουλάχιστον μέχρι 3-10 TeV, βρίσκουμε ότι απαιτούνται ηλεκτρόνια με παράγοντες Lorentz $\gamma \approx \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_0} = 10^7$. Αν και θα μπορούσε κανείς να ακολουθήσει τα βήματα της προηγούμενης περίπτωσης, αυτό δεν κρίνεται σκόπιμο προς το παρόν.

¹³ Πρόκειται για μηχανισμό επιτάχυνσης ανάλογο με αυτόν που έχει παρατηρηθεί στα οστικά κύματα των υπερκαινοφανών



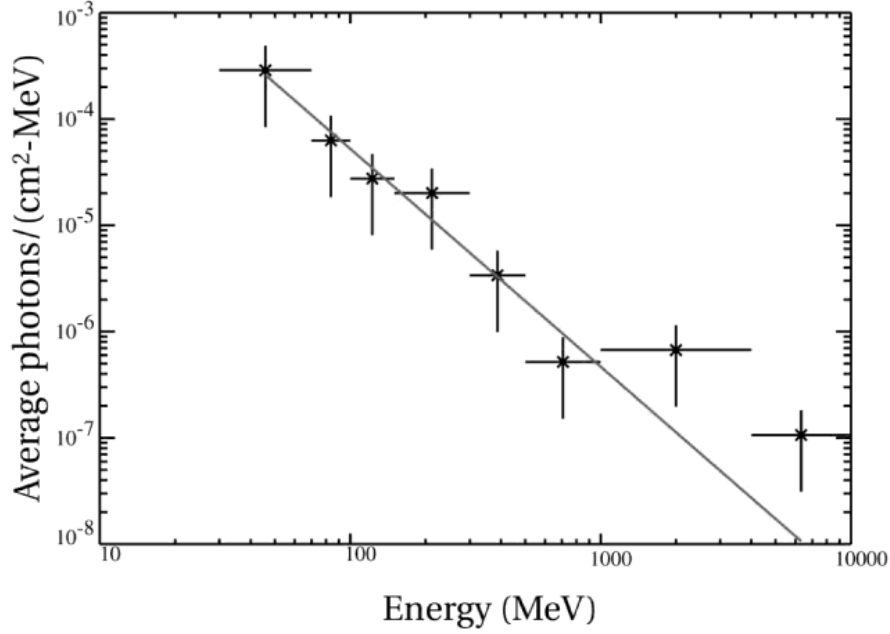
Σχήμα 5.10: Σχηματική αναπαράσταση της γεωμετρίας του πυρήνα ενός ενεργού γαλαξία. Ωστικά κύματα που κινούνται μέσα στον πίδακα (δεξί μέρος του σχήματος) επιταχύνουν ηλεκτρόνια τα οποία σκεδάζουν φωτόνια του δίσκου προσαύξεσης (αριστερό μέρος του σχήματος) σε υψηλές ενέργειες.

Εφαρμογή 3: Ένα μικρό μέρος από τις 2700+ εκλάμψεις ακτίνων γ που έχουν παρατηρηθεί από τον ανιχνευτή BATSE (δες Σχήμα 2.7) εκπέμπει στις σκληρές ακτίνες γ ($E > 100 \text{ MeV}$)¹⁴. Η φασματική κατανομή είναι νόμος δύναμης. Παρόλο που δεν υπάρχουν πολλά στοιχεία για τα μυστηριώδη αυτά αντικείμενα, εικάζεται ότι τουλάχιστον όσον αφορά τον μηχανισμό επιτάχυνσης και ακτινοβολίας φορτίων, υπάρχει μία αναλογία με τους ενεργούς γαλαξίες. Έτσι η εκπομπή στις ακτίνες γ αποδίδεται στον αντίστροφο σκεδασμό Compton.

5.3.6. Το όριο Klein-Nishina

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, σε περιπτώσεις όπου ο παράγοντας Lorentz των ηλεκτρονίων και η ενέργεια ϵ των φωτονίων πριν την σκέδαση ικανοποιούν την σχέση $\gamma\epsilon \gg m_e c^2$ δεν μπορούμε πλέον να χρησιμοποιήσουμε την κλασσική προσέγγιση για να περιγράψουμε την αλληλεπίδραση. Αντίθετα θα πρέπει να θεωρήσουμε το φωτόνιο ως σωματίο και να χρησιμοποιήσουμε την κβαντική εκδοχή της ενεργού διατομής του σκεδασμού που δίνεται από τη σχέση (5.10). Επειδή αυτή ελαττώνεται όσο αυξάνει η ενέργεια της σύγκρουσης, ελαττώνεται και ο ρυθμός των συγκρούσεων ηλεκτρονίων-φωτονίων. Ταυτόχρονα μπορεί να δειχθεί, με ανάλογη μέθοδο με αυτή που οδήγησε στη σχέση (5.20), ότι η μέση τιμή της ενέργειας που λαμβάνει ένα φωτόνιο μετά τον σκεδασμό αυξάνεται και ότι για πολύ υψηλές τιμές του γινομένου $\gamma\epsilon$ αυτή μπορεί να πλησιάσει την ενέργεια του ηλεκτρονίου. Στο ακραίο δηλαδή σχετικιστικό όριο του αντίστροφου σκεδασμού Compton έχουμε μεν πιο αραιές συγκρούσεις ηλεκτρονίων-φωτονίων αλλά σε αυτές τις συγκρούσεις τα ηλεκτρόνια δίνουν όλη τους σχεδόν την ενέργεια στα φωτόνια σκεδάζοντάς τα σε πολύ υψηλές ενέργειες. Υπενθυμίζουμε ότι στο μη σχετικιστικό όριο Thomson ισχύουν τα αντίθετα. Οι συγκρούσεις ηλεκτρονίων-φωτονίων είναι πιο συχνές αλλά τα ηλεκτρόνια χάνουν ένα μικρό μέρος της ενέργειάς τους σε κάθε σύγκρουση. Μία σε βάθος ανάλυση του ορίου Klein Nishina ξεφεύγει του παρόντος καθώς

¹⁴ Για την συντριπτική πλειοψηφία των εκλάμψεων δεν υπάρχουν στοιχεία για την εκπομπή τους σε ενέργειες $> 100 \text{ MeV}$.



Σχήμα 5.11: Το φάσμα εκπομπής μίας έκλαμψης ακτίνων γ.

η ενεργειακή εξάρτηση της ενεργού διατομής κάνει τους υπολογισμούς πολύπλοκους. Εδώ θα παρουσιάσουμε μόνο έναν απλό τρόπο να υπολογίσουμε τις ενεργητικές απώλειες των ηλεκτρονίων.

Έστω λοιπόν ότι μονοενεργητικά ηλεκτρόνια ενέργειας $\gamma m_e c^2$ εισέρχονται σε μονοχρωματικό πεδίο φωτονίων χαρακτηριστικής ενέργειας ε_0 και αριθμητικής πυκνότητας n_0 και έστω ότι ισχύει $\gamma \varepsilon_0 \gg m_e c^2$. Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε στην παράγραφο 5.3.3 οι ενεργειακές απώλειες των ηλεκτρονίων δίνονται από την σχέση

$$-\frac{dE}{dt} = \langle \varepsilon_1 \rangle \frac{dN}{dt} = \langle \varepsilon_1 \rangle n_0 \sigma_{KN} c$$

Εάν λοιπόν θέσουμε $\langle \varepsilon_1 \rangle \approx \gamma m_e c^2$ και χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (5.10) παίρνουμε

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{3}{8} \frac{\sigma_T c n_0}{\varepsilon_0} m_e c^2 \ln \left(2 \frac{\gamma \varepsilon_0}{m_e c^2} + \frac{1}{2} \right) \quad (5.43)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω σχέση με την σχέση (5.28) διαπιστώνουμε ότι όσο αυξάνεται η ενέργεια των ηλεκτρονίων και ο σκεδασμός κινείται από το μη σχετικιστικό στο σχετικιστικό όριο, οι ενεργειακές απώλειες των ηλεκτρονίων ουσιαστικά γίνονται σχεδόν ανεξάρτητες της ενέργειας των ηλεκτρονίων. Δεν θα ασχοληθούμε άλλο εδώ με το όριο Klein Nishina παρόλο που αυτό συναντάται συχνά στην Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών— με αποτέλεσμα βέβαια να δυσχεραίνει σημαντικά τους υπολογισμούς.

6. ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ ΣΥΓΧΡΟΤΡΟΝ

Η ακτινοβολία σύγχροτρον αποτελεί αναμφίβολα τον πιο συχνά απαντώμενο μηχανισμό μη θερμικής ακτινοβολίας στην Αστροφυσική. Όπως αναφέραμε και στο Κεφάλαιο 2 πολλές παρατηρήσεις αποδίδονται σε αυτή: Ακτινοβολία από υπολείμματα υπερκαινοφανών, από pulsars, από τον δίσκο τόσο του Γαλαξία μας όσο και αυτού άλλων γαλαξιών καθώς και από πυρήνες, πίδακες και ραδιολοβούς Ενεργών Γαλαξιών. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τα κυριότερα γνωρίσματα του μηχανισμού όπως τις ενεργειακές απώλειες των σωματίων που ακτινοβολούν και το δημιουργούμενο φάσμα εκπομπής. Επίσης θα δώσουμε μια σειρά αστροφυσικών εφαρμογών.

6.1. ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΕΣ ΑΠΩΛΕΙΕΣ

Ο μηχανισμός σύγχροτρον, σε αντίθεση με τον σκεδασμό Compton, αποτελεί έναν ``γνήσιο`` μηχανισμό εκπομπής φωτονίων¹⁵. Η ακτινοβολία αυτή δημιουργείται από την κίνηση σχετικιστικών ηλεκτρονίων μέσα σε μαγνητικά πεδία. Τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται καθώς διαγράφουν ελικοειδείς τροχιές και αποτέλεσμα αυτής της επιτάχυνσης είναι η ακτινοβολία σύγχροτρον. Μία πλήρης παρουσίαση της σχετικής θεωρίας ξεφεύγει των ορίων του παρόντος. Εδώ θα παρουσιάσουμε μόνο τα αναγκαία εκείνα στοιχεία που είναι απαραίτητα για μια πρώτη κατανόηση του μηχανισμού αυτού.

Το σημείο αφετηρίας είναι η σχέση Larmor (4.1). Ωστόσο χρειάζεται μία γενίκευσή της ώστε να περιλαμβάνει και την περίπτωση ακτινοβολίας σχετικιστικών σωματίων. Αυτό αφήνεται ως άσκηση.

Άσκηση: Ξεκινώντας από την μη σχετικιστική εξίσωση του Larmor $P = \frac{2q^2 a^2}{3c^3}$ (όπου

P η ακτινοβολουμένη ισχύς, q το φορτίο του σωματιδίου και a η επιτάχυνσή του) να δείξετε ότι αυτή γενικεύεται για σχετικιστικές ταχύτητες με τη σχέση

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 (a_{\perp}^2 + \gamma^2 a_{\parallel}^2) \quad (6.1)$$

όπου a_{\perp} και a_{\parallel} οι συνιστώσες της επιτάχυνσης κάθετα και παράλληλα στο άνυσμα

της ταχύτητας \vec{v} ενώ $\gamma = \left[1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right]^{-1/2}$ είναι ο παράγοντας Lorentz του σωματιδίου.

Υπόδειξη: Στο στιγμιαίο σύστημα ηρεμίας K' του σωματιδίου ισχύει προφανώς η

σχέση $P' = \frac{2q^2 |a'|^2}{3c^3}$ όπου P' η ισχύς και $|a'|$ το μέτρο του τετρανύσματος της

επιτάχυνσης. Εάν P είναι η ισχύς ως προς σύστημα ακίνητου παρατηρητή K , τότε να δειχθεί ότι $P = P'$ και ότι το τετρανύσμα της επιτάχυνσης έχει μέτρο

¹⁵ Υπενθυμίζουμε ότι ο αντίστροφος σκεδασμός Compton δεν παράγει φωτόνια αλλά σκεδιάζει ήδη υπάρχοντα φωτόνια χαμηλών ενεργειών σε υψηλές ενέργειες.

$|\underline{a}'|^2 = \gamma^4 \left[\underline{a}^2 + \gamma^2 \left(\frac{\vec{v} \cdot \underline{a}}{c^2} \right)^2 \right]$ όπου \underline{a} η (συνήθης) επιτάχυνση και \vec{v} η ταχύτητα του συστήματος K' ως προς το σύστημα K .

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (6.1) απαιτείται να βρούμε την επιτάχυνση του σωματίου καθώς αυτό κινείται σε μαγνητικό πεδίο έντασης B . Από την σχετικιστική μορφή της εξίσωσης του Νεύτωνα έχουμε

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (6.2)$$

η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση γράφεται (γιατί;)

$$\gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (6.3)$$

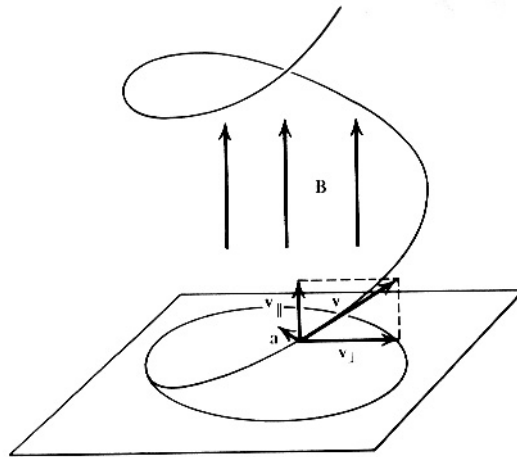
Άσκηση: Να λυθεί η εξίσωση (6.3) και ναδειχθεί ότι το σωματίο εκτελεί ελικοειδή κίνηση (δες Εικόνα 6.1) με συχνότητα περιστροφής (γυροσυχνότητα)

$$\omega_B = \frac{qB}{\gamma mc} \quad (6.4)$$

Επίσης ναδειχθεί ότι η γυροακτίνα του σωματιδίου δίνεται από την σχέση

$$r_g = \frac{E v_{\perp}}{q c B} \quad (6.5)$$

όπου E η ενέργεια του σωματιδίου και v_{\perp} η συνιστώσα της ταχύτητας που είναι κάθετη στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.



Σχήμα 6.1: Ελικοειδής κίνηση φορτισμένου σωματίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.

Επειδή η κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης δίνεται από την σχέση $a_{\perp} = \omega_B v_{\perp}$, αντικαθιστώντας στην (6.1) παίρνουμε με τη βοήθεια της (6.3)

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^4}{m^2 c^3} B^2 \beta_{\perp}^2 \gamma^2 \quad (6.6)$$

όπου $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c = v \sin \alpha/c$. Η γωνία α είναι η γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στη διεύθυνση της έντασης του μαγνητικού πεδίου και της ταχύτητας. Για ισοτροπική κατανομή των ηλεκτρονίων έχουμε

$$\langle \beta_{\perp}^2 \rangle = \frac{\beta^2}{4\pi} \int \sin^2 \alpha d\Omega_{\alpha} = \frac{2}{3} \beta^2. \quad (6.7)$$

Στην περίπτωση όπου το φορτισμένο σωματίο είναι ηλεκτρόνιο τότε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.7), (5.8) και (6.7) βρίσκουμε

$$P = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 u_B \quad (6.8)$$

όπου $u_B = B^2/8\pi$ είναι η ενεργειακή πυκνότητα του μαγνητικού πεδίου.

Άσκηση: Να αποδείξετε την παραπάνω σχέση.

Η σχέση (6.8) δίνει τη συνολική ισχύ της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας και κατά συνέπεια τις ενεργειακές απώλειες των σχετικιστικών ηλεκτρονίων. Χρησιμοποιώντας την μπορούμε να βρούμε τον χρόνο ζωής των ηλεκτρονίων (δες ανάλογη περίπτωση με τον αντίστροφο σκεδασμό Compton—σχέση 5.28)

$$\tau_{syn} = \frac{E_e}{P} = \frac{\gamma mc^2}{\frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 u_B} = \frac{6\pi mc^2}{\sigma_T c \gamma B^2} = 7.7 \times 10^8 \gamma^{-1} B^{-2} \text{ sec} \quad (6.9)$$

δηλαδή τα ηλεκτρόνια υψηλών ενεργειών χάνουν γρηγορότερα την ενέργειά τους από ότι αυτά που έχουν χαμηλές ενέργειες.

Άσκηση: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $-\frac{dE}{dt} = P = \frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 u_B$ με αρχικές συνθήκες $\gamma(t=0) = \gamma_0$. Στη συνέχεια να αντικατασταθεί ο χρόνος με την έκφραση από την σχέση (6.9) και να δειχθεί ότι $\gamma(\tau_{syn}) = \gamma_0$.

Σημείωση: Μία ενδιαφέρουσα ερώτηση αφορά την ακτινοβολία σύγχροτρον από φορτισμένα σωματίδια που δεν είναι ηλεκτρόνια. Με την βοήθεια της σχέσης (6.8) είναι εύκολο να δειχτεί ότι εάν αυτά είναι π.χ. πρωτόνια ίδιου παράγοντα Lorentz με τα ηλεκτρόνια τότε ισχύει

$$\frac{P_e}{P_p} = \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^2 \quad (6.10)$$

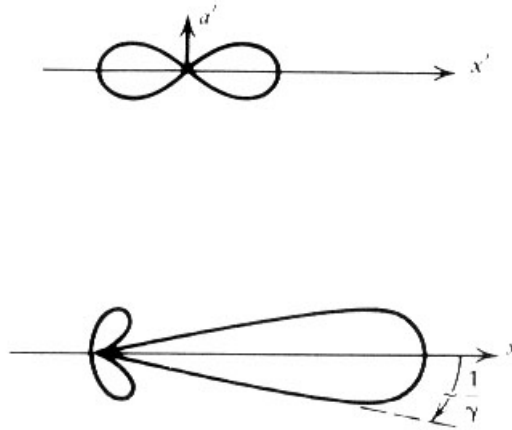
συνεπώς η ακτινοβολία των ηλεκτρονίων είναι πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από την ακτινοβολία των πρωτονίων. Εάν λοιπόν μία πηγή περιέχει σχετικιστικά ηλεκτρόνια και πρωτόνια, η ακτινοβολία των πρωτονίων μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα σε σχέση με αυτή που παράγουν τα ηλεκτρόνια και κατά συνέπεια μη ανιχνεύσιμη. Αυτός είναι και ο λόγος που δεν γνωρίζουμε το ποσό των σχετικιστικών πρωτονίων που περιέχουν οι διάφορες πηγές υψηλών ενεργειών.

6.2. ΤΟ ΦΑΣΜΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ: ΜΟΝΟΕΝΕΡΓΗΤΙΚΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΑ

Η μέθοδος εύρεσης του συντελεστή εκπομπής της ακτινοβολίας σύγχροτρον ξεφεύγει των ορίων του παρόντος μαθήματος. Θα αρκεστούμε λοιπόν στη σκιαγράφιση μερικών βασικών νόμων και αρχών που την διέπουν.

Ας ξεκινήσουμε από την μη σχετικιστική περίπτωση. Το ηλεκτρόνιο διαγράφει κυκλική τροχιά με συχνότητα $\omega_{cycl} = eB/mc$ --σχέση (6.4) με $\gamma = 1$, και η ακτινοβολία του είναι όλη σε αυτή τη συχνότητα. Αυτή είναι η γνωστή ακτινοβολία κύκλοτρον που αποτελεί την μη σχετικιστική εκδοχή της σύγχροτρον, η δε συχνότητα ω_{cycl} ονομάζεται συχνότητα κύκλοτρον.

Ποιοτικά θα μπορούσαμε να εξηγήσουμε τη μετάβαση από την ακτινοβολία κύκλοτρον στην σύγχροτρον ως εξής: Από τις σχέσεις για την αποπλάνηση του φωτός (5.11) και (5.12) μπορεί ναδειχθεί ότι καθώς αυξάνει η ταχύτητα του ηλεκτρονίου, η ακτινοβολία που εκπέμπεται με μορφή διπόλου στο σύστημα ηρεμίας του (σύστημα K') αρχίζει σταδιακά να παραμορφώνεται για ακίνητο παρατηρητή (σύστημα K)—δες Σχήμα 6.2.

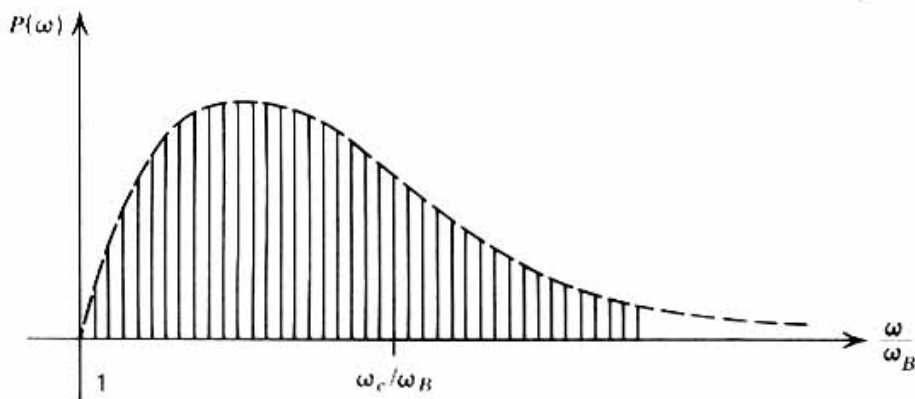


Σχήμα 6.2: Γωνιακή κατανομή της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας στην περίπτωση όπου η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι κάθετες μεταξύ τους. Το πάνω διάγραμμα είναι όπως αυτή παρουσιάζεται στο σύστημα ηρεμίας του ηλεκτρονίου K' ενώ το κάτω διάγραμμα είναι στο σύστημα του παρατηρητή K .

Άσκηση: Ναδειχθεί το παραπάνω για την περίπτωση που η πηγή ακτινοβολίας εκπέμπει ισοτροπικά στο σύστημα K' . [Υπόδειξη: Να λύσετε τις σχέσεις (5.11) και (5.12) ως προς θ και να διαπιστώσετε τι συμβαίνει όταν $\theta' = \pi/2$ --προφανώς αφού η ακτινοβολία εκπέμπεται ισοτροπικά στο σύστημα K' , το ποσό της ακτινοβολίας που εκπέμπεται ανάμεσα στις γωνίες $(-\pi/2, \pi/2)$ θα ισούται με το ήμισυ της συνολικής εκπομπής. Στη συνέχεια να κάνετε μία γραφική παράσταση της γωνίας $\theta(\theta' = \pi/2)$ σαν συνάρτηση του παράγοντα Lorentz του ηλεκτρονίου γ και ναδειχθεί ότι για $\gamma \gg 1$, $\theta(\theta' = \pi/2)$ —Υπάρχει μία προφανής αναλογία της παρούσας άσκησης με αυτή της σ.29].

Εάν λοιπόν θεωρήσουμε μία πρώτη διόρθωση στο ηλεκτρικό πεδίο (και κατά συνέπεια στο πεδίο ακτινοβολίας) λόγω της μη αμελητέας ταχύτητας του ηλεκτρονίου, τότε είναι δυνατόν ναδειχθεί ότι το ηλεκτρόνιο αρχίζει να ακτινοβολεί

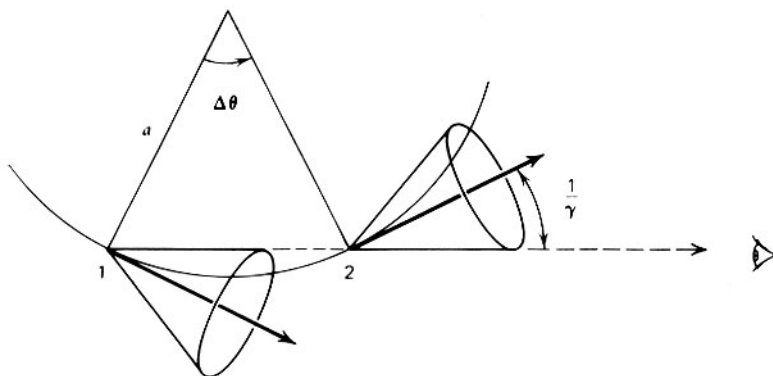
σε μια σειρά αρμονικές της βασικής γυροσυχνότητας ω_B . Όσο αυξάνεται η ταχύτητα του ηλεκτρονίου τόσο αυξάνεται το πλάτος αυτών των αρμονικών και το φάσμα από γραμμικό γίνεται σταδιακά συνεχές. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 6.3 όπου παρουσιάζεται το φάσμα των αρμονικών τις οποίες εκπέμπει ένα σχετικιστικό ηλεκτρόνιο.



Σχήμα 6.3: Ανάλυση του φάσματος αρμονικών για την περίπτωση $v \sim c$.

Το ζητούμενο είναι να βρούμε την μέγιστη συχνότητα που μπορεί να εκπέμπει ηλεκτρόνιο ενέργειας γmc^2 κινούμενο σε μαγνητικό πεδίο έντασης B . Όπως αποδεικνύεται από τη θεωρία της ακτινοβολίας, με την βοήθεια των μετασχηματισμών Fourier, εάν ένας ηλεκτρομαγνητικός παλμός έχει χρονική διάρκεια Δt , τότε η εκπομπή φτάνει μέχρι συχνότητες της τάξης $\omega_{\max} \sim \Delta t^{-1}$, δηλαδή οι αρμονικές εκτείνονται σε υψηλότερες συχνότητες για βραχύβιους παλμούς.

Εστω $\Delta\theta$ το άνοιγμα του κώνου μέσα στον οποίο ακτινοβολεί το ηλεκτρόνιο. Ο παρατηρητής θα λαμβάνει εκπομπή όσο αυτό βρίσκεται ανάμεσα στις θέσεις 1 και 2—δες Σχήμα 6.4. Ζητάμε λοιπόν την διάρκεια του παλμού όπως την μετράει ένας ακίνητος παρατηρητής. Αυτή προφανώς είναι διαφορετική από τον χρόνο Δt που χρειάζεται το ηλεκτρόνιο να φτάσει από τη θέση 1 στη θέση 2.



Σχήμα 6.4: Κώνοι εκπομπής του ηλεκτρονίου κατά μήκος της τροχιάς του.

Η εξίσωση (6.3) γράφεται κατά μέτρο και για μικρές διαφορές Δv , Δt

$$\gamma m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{q}{c} v B \sin \alpha$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση $|\Delta\vec{v}| = \Delta v = v\Delta\theta$ και τον ορισμό της γυροσυχνότητας, σχέση (6.4), βρίσκουμε (να δειχθεί!)

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega_B \sin \alpha}.$$

Όπως όμως δείξαμε και στην αρχή της παρούσας παραγράφου, για την περίπτωση μας ισχύει ότι $\Delta\theta \approx 2/\gamma$, οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\Delta t = t_2 - t_1 \approx \frac{2}{\gamma\omega_B \sin \alpha}. \quad (6.11)$$

Ωστόσο η διαφορά Δt εξαρτάται από τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 που αποτελούν τις χρονικές στιγμές εκπομπής του παλμού. Η χρονική διαφορά που θα μετρήσει ο παρατηρητής θα είναι σημαντικά μικρότερη γιατί το σωματίδιο κινείται προς τη διεύθυνση του παρατηρητή και με ταχύτητα σχεδόν ίση με την ταχύτητα του φωτός¹⁶. Αφήνεται ως άσκηση να δειχτεί ότι εάν $\Delta\tilde{t}$ η χρονική διαφορά των χρόνων άφιξης, τότε ισχύει

$$\Delta\tilde{t} = \Delta t \left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx \frac{\Delta t}{2\gamma^2}. \quad (6.12)$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε προηγουμένως για την μέγιστη συχνότητα, έχουμε $\omega_{\max} \sim \Delta\tilde{t}^{-1} \approx \gamma^3 \omega_B \sin \alpha$. Εάν επί πλέον χρησιμοποιήσουμε την σχέση (6.4) και θέσουμε $\omega = 2\pi\nu$, βρίσκουμε

$$\nu_{\max} \approx \frac{qB}{2\pi mc} \gamma^2 \sin \alpha \quad (6.13)$$

που αποτελεί και μία πρώτη ποιοτική προσέγγιση της μέγιστης συχνότητας εκπομπής.

Όπως λεπτομερείς υπολογισμοί αποδεικνύουν¹⁷ το φάσμα που ακτινοβολείται από μονοενεργητικά ηλεκτρονια δίνεται από την σχέση

$$j_{\text{syn}}(\nu) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{mc^2} F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right). \quad (6.14)$$

Η συχνότητα ν_c ονομάζεται *κρίσιμη* και δίνεται από τη σχέση

$$\nu_c \equiv \frac{3}{4\pi} \gamma^3 \omega_B \sin \alpha = \frac{3}{4\pi} \frac{qB}{mc} \gamma^2 \sin \alpha. \quad (6.15)$$

Η συνάρτηση $F(x)$ είναι μία από τις λεγόμενες *ειδικές συναρτήσεις* και για λόγους πληρότητας δίνουμε τον ορισμό της

$$F(x) \equiv x \int_x^\infty K_{5/3}(\xi) d\xi$$

όπου $K_{5/3}(\xi)$ είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ασυμπτωτικές μορφές της $F(x)$:

$$F(x) \propto x^{1/3} \quad \text{για } x \ll 1$$

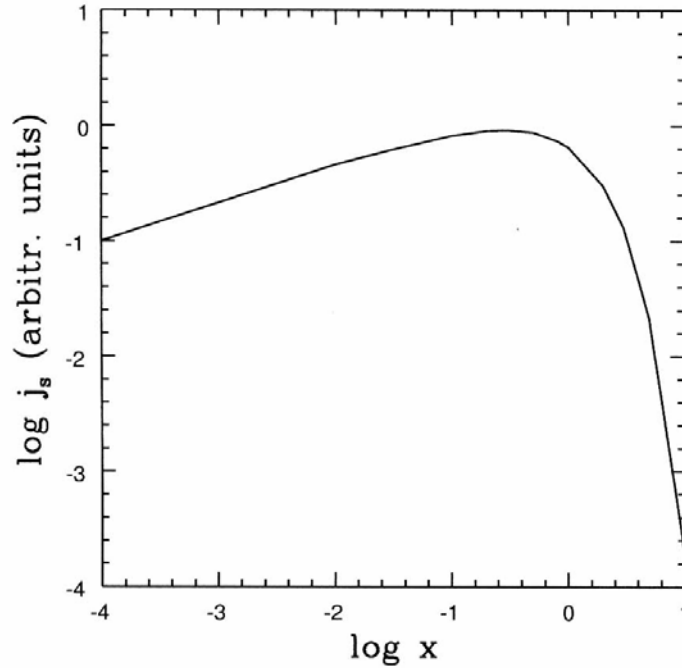
$$F(x) \propto e^{-x} x^{1/2} \quad \text{για } x \gg 1$$

ενώ αυτή παρουσιάζει μέγιστο για $x \approx 0.3$.

¹⁶ Στην (μη φυσική) οριακή περίπτωση όπου το σωματίδιο κινείται με την ταχύτητα του φωτός η χρονική διάρκεια του παλμού θα ήταν μηδέν.

¹⁷ Δες Rybicki and Lightman, παράγραφος 6.4.

Το Σχήμα 6.5 παρουσιάζει την γραφική παράσταση του εκπεμπόμενου φάσματος [ή, ισοδύναμα, της συνάρτησης $F(x)$].



Σχήμα 6.5: Φάσμα ακτινοβολίας σύγχροτρον που παράγεται από μονοενεργητικά ηλεκτρόνια σε μαγνητικό πεδίο έντασης B . Η παράμετρος x ισούται με $x = v/v_c$ όπου v_c είναι η κρίσιμη συχνότητα και δίνεται από τη σχέση (6.14).

Παρατηρούμε ότι το φάσμα της ακτινοβολίας σύγχροτρον –σχέση (6.14), παρουσιάζει ένα μέγιστο που περιγράφεται κατά προσέγγιση από την σχέση (6.15). Και οι δύο αυτές συναρτήσεις εξαρτώνται από τρεις παραμέτρους, δηλαδή τον παράγοντα Lorentz του σωματιδίου, την ένταση του μαγνητικού πεδίου και την γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα του σωματιδίου με το μαγνητικό πεδίο. Στις αστροφυσικές εφαρμογές αυτές οι παράμετροι είναι άγνωστες. Είναι φανερό ότι απαιτούνται, τουλάχιστον σε πρώτη προσέγγιση, μερικές υποθέσεις για να απαλείψουμε αυτούς τους αγνώστους. Η πρώτη υπόθεση είναι προφανής και μπορεί να εφαρμοσθεί στην πλειοψηφία των αστροφυσικών πηγών. Θεωρούμε λοιπόν ότι τα ηλεκτρόνια έχουν *ισοτροπική* κατανομή, και συνεπώς μπορούμε να ολοκληρώσουμε το φάσμα εκπομπής (6.14) ως προς $d\Omega_\alpha$. Προσεγγιστικά μπορούμε να θεωρήσουμε ως συχνότητα της μέγιστης εκπομπής --που είναι ανεξάρτητη βέβαια της γωνίας α , την συχνότητα

$$\nu_0 \approx \frac{1}{2\pi} \frac{qB}{mc} \gamma^2. \quad (6.16)$$

Για την περίπτωση όπου τα σωματίδια είναι ηλεκτρόνια, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\nu_0 \approx 2.8 \times 10^6 B \gamma^2 \text{ Hz} \quad (6.17)$$

όπου το B δίνεται σε Gauss. Αυτή η σχέση, αν και προσεγγιστική, επιτρέπει μία εύκολη εκτίμηση της ενέργειας των ηλεκτρονίων που ακτινοβολούν, εάν γνωρίζουμε βέβαια την ένταση του μαγνητικού πεδίου. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την σχέση στην παράγραφο όπου θα εξετάσουμε τις εφαρμογές της ακτινοβολίας σύγχροτρον.

6.3. ΤΟ ΦΑΣΜΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ: ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΑ ΜΕ ΝΟΜΟ ΔΥΝΑΜΗΣ

Όπως θα δείξουμε για την ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου τα ηλεκτρόνια έχουν κατανομή που είναι νόμος δύναμης, δηλαδή

$$N_e(\gamma) = k_e \gamma^{-p} \quad \text{για } \gamma_{\min} \leq \gamma \leq \gamma_{\max} \quad (6.18)$$

και $N_e(\gamma) = 0$ για $\gamma < \gamma_{\min}$ ή $\gamma > \gamma_{\max}$

το παραγόμενο φάσμα της ακτινοβολίας σύγχροτρον έχει πολλά κοινά με αυτό του αντίστροφου σκεδασμού Compton (δες παράγραφο 5.3.4)

Όπως και σε εκείνη την περίπτωση, το φάσμα εκπομπής των φωτονίων που παράγεται βρίσκεται αν ολοκληρώσουμε το φάσμα ενός ηλεκτρονίου (σχέση 6.14) ως προς όλες τις ενέργειες. Για να κρατήσουμε μια αναλογία με την σχέση (5.38) χρησιμοποιούμε την ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου αντί της συχνότητάς του. Έχουμε λοιπόν

$$I_{syn}^{pl}(\varepsilon) = \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} d\gamma N_e(\gamma) j_{syn}(\varepsilon). \quad (6.19)$$

Παρόλο που το ολοκλήρωμα υπολογίζεται αναλυτικά¹⁸, σε μία πρώτη προσέγγιση θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε, όπως και στην ανάλογη περίπτωση του αντίστροφου σκεδασμού Compton, ότι όλη η ακτινοβολία μονοενεργητικών ηλεκτρονίων εκπέμπεται σε ενέργεια $\varepsilon_0 = h\nu_0$ (σχέση 6.16), οπότε γράφουμε

$$j_{syn}(\varepsilon) \approx A \varepsilon_0 \delta(\varepsilon - \varepsilon_0).$$

Η σταθερά A υπολογίζεται από την απαίτηση ο ρυθμός της ακτινοβολούμενης ενέργειας να ισούται με τον ρυθμο απώλειας ενέργειας των ηλεκτρονίων που δίνεται από την σχέση (6.8).

Άσκηση: Ναδειχθεί ότι $A = \frac{\sigma_T mc^2}{3hq} B$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε προσεγγιστικά την σχέση (6.19)

$$I_{syn}^{pl}(\varepsilon) = \frac{1}{6} k_e \frac{\sigma_T mc^2}{eh} \left[\frac{\hbar e}{mc} \right]^{\frac{p-1}{2}} B^{\frac{p+1}{2}} \varepsilon^{-\frac{p-1}{2}} \quad \text{για } \varepsilon_{\min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} \quad (6.20)$$

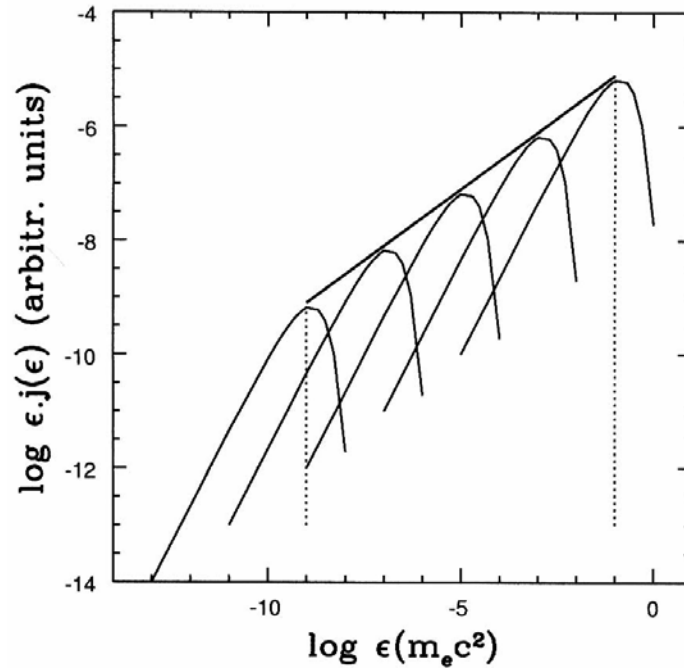
όπου $\varepsilon_{\min} \approx \frac{\hbar q B}{mc} \gamma_{\min}^2$ και $\varepsilon_{\max} \approx \frac{\hbar q B}{mc} \gamma_{\max}^2$.

Άσκηση: Να αποδειχτεί η παραπάνω σχέση.

Η σχέση (6.20) φανερώνει ότι, όπως και στην περίπτωση του αντίστροφου σκεδασμού Compton, ηλεκτρόνια με κατανομή νόμο δύναμης εκθέτη $-p$ δημιουργούν φωτόνια με δείκτη $-(p-1)/2$, ισχύει δηλαδή και πάλι η σχέση (5.42). Τον ίδιο νόμο δύναμης θα βρίσκαμε εάν χρησιμοποιούσαμε την σχέση (6.14) αντί της συνάρτησης δέλτα. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα (6.6) που δείχνει την συνέλιξη του συντελεστή

¹⁸ Δες Longair παράγραφο 18.1.5.

εκπομπής με την κατανομή των ηλεκτρονίων. Το πρώτο (από αριστερά) είναι το φάσμα εκπομπής που δημιουργούν ηλεκτρόνια με παράγοντες Lorentz γ_{\min} , το αμέσως επόμενο αυτό που δημιουργούν ηλεκτρόνια με παράγοντες $\gamma_{\min} + \Delta\gamma$, κ.ο.κ. μέχρι το τελευταίο που δημιουργείται από ηλεκτρόνια με παράγοντες Lorentz γ_{\max} . Στο σχήμα φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο αυτός ο αλγόριθμος δημιουργεί ένα νόμο δύναμης.



Σχήμα 6.6: Σχηματική παράσταση του φάσματος που δημιουργείται από ηλεκτρόνια με νόμο δύναμης.

6.4. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΟΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΣΚΕΔΑΣΜΟ COMPTON

Τόσο η ακτινοβολία σύγχροτρον, όσο και ο αντίστροφος σκεδασμός Compton, αποτελούν πολύ σημαντικές φυσικές διαδικασίες για την Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών καθώς όλες οι αστροφυσικές πηγές υψηλών ενεργειών περιέχουν και μαγνητικά πεδία και φωτόνια χαμηλών ενεργειών. Το πρώτο ερώτημα είναι ποιά διαδικασία θα επικρατήσει καθώς οι δύο ανταγωνίζονται για τις ενεργειακές απώλειες των σχετικιστικών ηλεκτρονίων. Μία απλή σύγκριση των ενεργειακών απωλειών στη περίπτωση της ακτινοβολίας σύγχροτρον και του αντίστροφου σκεδασμού Compton (σχέσεις 5.28 και 6.8) δίνει

$$\frac{P_{syn}}{P_{ics}} = \frac{u_B}{u_{\phi\omega\tau}} \quad (6.21)$$

που είναι ανεξάρτητη της ενέργειας των ηλεκτρονίων. Εάν ο λόγος αυτός είναι >1 θα επικρατήσει η ακτινοβολία σύγχροτρον ενώ εάν <1 θα επικρατήσει ο αντίστροφος σκεδασμός Compton.

Ένα δεύτερο ερώτημα αφορά τη σύγκριση των ενεργειών που αυτοί οι μηχανισμοί δημιουργούν/σκεδάζουν φωτόνια. Από τις σχέσεις (5.34) και (6.17) παρατηρούμε ότι αυτές είναι ανάλογες του τετράγωνου της ενέργειας του

ηλεκτρονίου. Έστω τώρα μία πηγή, π.χ. ένας ενεργός γαλαξίας, που περιέχει μαγνητικό πεδίο έντασης B , υπόβαθρο μονοχρωματικών φωτονίων χαμηλής ενέργειας ε_0 και σχετικιστικά ηλεκτρόνια ενέργειας γmc^2 . Για να συγκρίνουμε καλύτερα τις ενέργειες εκπομπής/σκεδασμού των φωτονίων τις μετατρέπουμε καταρχή στις ίδιες μονάδες –και μια καλή εκλογή είναι να τις εκφράσουμε σε μονάδες της ενέργειας ηρεμίας του ηλεκτρονίου mc^2 . Για την περίπτωση του αντίστροφου σκεδασμού Compton έχουμε από την σχέση (5.34) ότι το μέσο φωτόνιο σκεδάζεται σε ενέργεια

$$\tilde{\varepsilon}_{ics} \approx \frac{\varepsilon_0}{mc^2} \gamma^2$$

όπου έχουμε παραλείψει τον παράγοντα $4/3$ για λόγους απλότητας. Από την άλλη, η ενέργεια ενός μέσου φωτονίου που παράγεται κατά την ακτινοβολία σύγχροτρον είναι

$$\tilde{\varepsilon}_{syn} \approx \frac{h\nu_0}{mc^2} \approx \frac{B}{B_{cr}} \gamma^2$$

όπου $B_{cr} = m^2 c^3 / e\hbar = 4.413 \times 10^{13}$ Gauss είναι η κρίσιμη ένταση του μαγνητικού πεδίου.

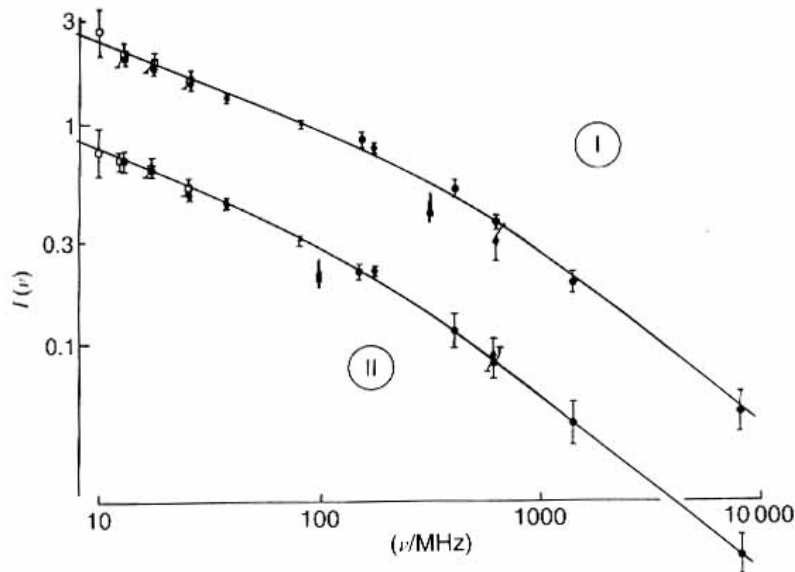
Σημείωση: Η κρίσιμη ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι η ιδεατή εκείνη ένταση για την οποία ένα μη σχετικιστικό σωματίο ακτινοβολεί την μάζα ηρεμίας του. Πράγματι εάν αντικαταστήσουμε στη συχνότητα κύκλου το B με το B_{cr} βρίσκουμε $\hbar\omega_{cycl} = mc^2$.

Επειδή για την συντριπτική πλειοψηφία των αστροφυσικών πηγών ισχύει $B/B_{cr} \ll \varepsilon_0/mc^2$ διαπιστώνουμε ότι ο αντίστροφος σκεδασμός Compton παράγει πολύ πιο ενεργητικά φωτόνια από ότι η ακτινοβολία σύγχροτρον παρόλο που τα ηλεκτρόνια έχουν την ίδια ενέργεια και στις δύο περιπτώσεις—παραδείγματα θα δοθούν αμέσως πιο κάτω στις εφαρμογές.

6.5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1: Από ραδιοπαρατηρήσεις σε συχνότητες από 10 MHz έως 10 GHz διαπιστώνουμε ότι υπάρχει εκπομπή που είναι διάχυτη σε όλο τον Γαλαξία. Αυτή προέρχεται από ακτινοβολία σύγχροτρον ηλεκτρονίων καθώς αυτά κινούνται στο δίσκο και την άλω του Γαλαξία που περιέχει μαγνητικό πεδίο έντασης ~ 3 μ Gauss.

Η σχέση (6.17) μας επιτρέπει να βγάλουμε μερικά συμπεράσματα για την ενέργεια των ηλεκτρονίων εάν γνωρίζουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου μέσα στο οποίο αυτά ακτινοβολούν. Μία απλή εφαρμογή της αποδεικνύει ότι τα ηλεκτρόνια που ακτινοβολούν σε αυτές τις συχνότητες έχουν ενέργειες από 500 MeV έως 15 GeV. Αυτές οι παρατηρήσεις αποτελούν απόδειξη ότι η κοσμική ακτινοβολία βρίσκεται παντού στον Γαλαξία και δεν είναι απλώς ένα τοπικό φαινόμενο. Ο χρόνος ζωής των ηλεκτρονίων αυτών υπολογίζεται, ανάλογα με την ενέργειά τους, από 80 έως 2.500 εκατομμύρια χρόνια, αλλά αυτός είναι μόνο ένα πάνω όριο (γιατί:).



Σχήμα 6.7: Το φάσμα της ραδιοεκπομπής του Γαλαξία από το αντίκεντρο (I) και το τον εσωτερικό βραχίονα (II).

Ωστόσο υπάρχει ακόμα μία ενδιαφέρουσα συνέπεια των παραπάνω συμπερασμάτων. Τα ηλεκτρόνια που παράγουν την ραδιοεκπομπή θα σκεδάσουν επίσης τα φωτόνια του μικροκυματικού υπόβαθρου σε ενέργειες από $\varepsilon_{\min} \approx (4/3)(2.7kT_b)\gamma_{\min}^2 \approx .8 \text{ keV}$ σε $\varepsilon_{\max} \approx (4/3)(2.7kT_b)\gamma_{\max}^2 \approx .8 \text{ MeV}$ (σχέση 5.34), που βρίσκονται στην περιοχή των ακτίνων X/γ – εδώ φαίνεται και αυτό που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο σχετικά με τη διαφορά στις ενέργειες των φωτονίων που παράγουν οι δύο μηχανισμοί. Το ερώτημα που τίθεται είναι εάν αυτά τα φωτόνια υψηλών ενεργειών θα έχουν κάποια αξιόλογη λαμπρότητα. Η σχέση (6.21) μας παρέχει μία άμεση απάντηση. Πράγματι η ενεργειακή πυκνότητα του μαγνητικού πεδίου του Γαλαξία είναι $u_B = B^2/8\pi \approx 3.6 \times 10^{-13} \text{ erg/cm}^3 \approx .22 \text{ eV/cm}^3$, ενώ η ενεργειακή πυκνότητα των φωτονίων του μικροκυματικού υπόβαθρου είναι $u_{\text{φωτ}} = aT^4 = (4\sigma/c)T^4 = 4. \times 10^{-13} \text{ erg/cm}^3 \approx .25 \text{ eV/cm}^3$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα ηλεκτρόνια θα χάσουν το ίδιο ποσό της ενέργειάς τους ακτινοβολώντας φωτόνια σύγχροτρον και σκεδάζοντας φωτόνια του μικροκυματικού υπόβαθρου. Συνεπώς οι λαμπρότητες των φωτονίων στις δύο αυτές περιοχές θα είναι ίσες μεταξύ τους.

Εφαρμογή 2: Στο προηγούμενο παράδειγμα μπορέσαμε και βρήκαμε την ενέργεια των ηλεκτρονίων γιατί είναι γνωστό το μαγνητικό πεδίο του Γαλαξία μας από διάφορα άλλα δεδομένα. Ωστόσο στις περισσότερες περιπτώσεις η ένταση του μαγνητικού πεδίου διαφόρων κοσμικών πηγών δεν είναι γνωστή και αυτό αφήνει δύο ελεύθερες παραμέτρους στη σχέση (6.16). Για αυτό οι αστροφυσικοί υιοθετούν την υπόθεση ισοκαταμερισμού της ενέργειας που περικλείεται στο μαγνητικό πεδίο και αυτής που περικλείεται στα σωματίδια¹⁹. Όπως θα δείξουμε αυτή η υπόθεση ισοδυναμεί με ελαχιστοποίηση της ενέργειας που υπάρχει στην πηγή.

¹⁹ Αυτή η εφαρμογή έχει ήδη εξετασθεί στα πλαίσια της Αστροφυσικής II για τους ραδιολόβους Ενεργών Γαλαξιών.

Η ενέργεια U_B που εμπεριέχεται στο μαγνητικό πεδίο πηγής όγκου V δίνεται από την σχέση

$$(Ολική\ ενέργεια\ μαγνητικού\ πεδίου) = \\ = (Ενεργειακή\ πυκνότητα\ μαγνητικού\ πεδίου) \times (Όγκος\ πηγής)$$

και συνεπώς

$$U_B = u_B V = \frac{B^2}{8\pi} V. \quad (6.22)$$

Εάν η πηγή παρουσιάζει λαμπρότητα L σε κάποια συχνότητα ν_* τότε σε πρώτη προσέγγιση το ενεργειακό της περιεχόμενο σε σχετικιστικά ηλεκτρόνια δίνεται από τη σχέση

$$U_e \approx L \tau_{syn}$$

όπου τ_{syn} ο χρόνος ζωής των ηλεκτρονίων με παράγοντα Lorentz γ που εκπέμπουν στη συχνότητα ν_* (δες σχέση 6.9). Χρησιμοποιούμε στη συνέχεια τη σχέση (6.16) για να συνδέσουμε τη συχνότητα ν_* με τον παράγοντα Lorentz του ηλεκτρονίου και το μαγνητικό πεδίο, υποθέτοντας μονοενεργητική εκπομπή. Έχουμε λοιπόν

$$U_e \approx C L \nu_*^{-1/2} B^{-3/2} \quad (6.23)$$

όπου $C = 3\sqrt{2\pi}(emc)^{1/2}/\sigma_T$. Η παραπάνω σχέση εξαρτάται από δύο παρατηρησιακά δεδομένα, δηλαδή την συχνότητα ν_* και τη λαμπρότητα της πηγής L σε αυτή τη συχνότητα, και από μία άγνωστη ποσότητα, την ένταση του μαγνητικού πεδίου B . Για να προσδιορίσουμε το ολικό ενεργειακό περιεχόμενο της πηγής απαιτείται ακόμη και το ενεργειακό της περιεχόμενο σε πρωτόνια U_p . Αυτό, σύμφωνα με τα όσα είπαμε στην παράγραφο 6.2, είναι άγνωστό γιατί, αφού τα πρωτόνια δεν ακτινοβολούν, δεν γνωρίζουμε τίποτε για αυτά. Μπορούμε ωστόσο να διακρίνουμε δύο ακραίες περιπτώσεις ανάλογα με την υπόθεση που κάνουμε για τον μηχανισμό επιτάχυνσης: (i) Τα πρωτόνια επιταχύνονται στην ταχύτητα των ηλεκτρονίων και συνεπώς $U_p = (m_p/m_e)U_e$ και (ii) τα πρωτόνια επιταχύνονται στην ενέργεια των ηλεκτρονίων, οπότε $U_p = U_e$.

Άσκηση: Να αποδείξετε τις δύο παραπάνω σχέσεις.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε $U_p = (1+k)U_e$ με $1 \leq k < 2000$, οπότε το ολικό ενεργειακό περιεχόμενο της πηγής γράφεται

$$U = U_e + U_p + U_B = (1+k)U_e + U_B \quad (6.24)$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.22) και (6.23) μπορούμε να εκφράσουμε την ολική ενέργεια σαν συνάρτηση μετρούμενων μεγεθών και του μαγνητικού πεδίου B

$$U = C_1(1+k)B^{-3/2} + C_2B^2. \quad (6.25)$$

Η ελάχιστη ενέργεια δίνεται για εκείνη την τιμή του μαγνητικού πεδίου η οποία ικανοποιεί την σχέση $dU/dB = 0$. Αυτή ικανοποιείται όταν

$$U_B = \frac{3}{4}(1+k)U_e, \quad (6.26)$$

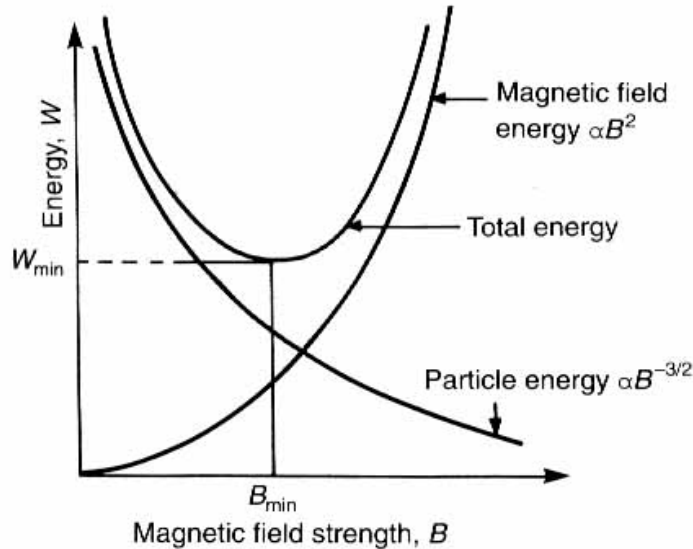
όταν δηλαδή η ενέργεια κατανέμεται (περίπου) εξίσου ανάμεσα στα ενεργητικά σωματίδια και στο μαγνητικό πεδίο. Τα παραπάνω παριστάνονται γραφικά στο Σχήμα 6.8.

Άσκηση: Ξεκινώντας από την σχέση (6.25) να αποδείξετε την (6.26).

Σε αυτή την περίπτωση το μαγνητικό πεδίο δίνεται από τη σχέση

$$B_{eq} = 3.7 \times 10^3 (1+k)^{2/7} L^{2/7} v_*^{-1/7} R^{-6/7} \text{ Gauss}, \quad (6.27)$$

όπου R η ακτίνα της πηγής (θεωρούμενης ως σφαιρικής).



Σχήμα 6.8: Γραφική αναπαράσταση της μεθόδου εύρεσης του μαγνητικού πεδίου που αντιστοιχεί στην ελάχιστη ενέργεια.

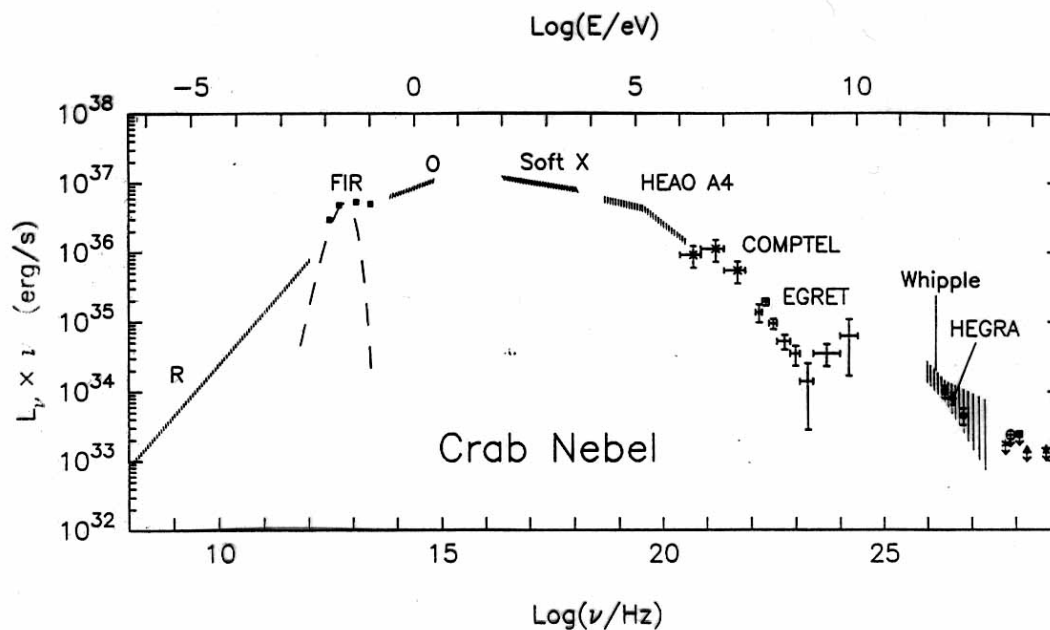
Μία εφαρμογή της παραπάνω αρχής μπορεί να γίνει στα υπολείμματα υπερκαινοφανών. Αυτά αποτελούν τις καλύτερες υποψήφιες πηγές επιτάχυνσης της κοσμικής ακτινοβολίας, τουλάχιστον για ενέργειες μέχρι 10^{15} eV, που είναι η περιοχή του λεγόμενου "γόνατου" στο φάσμα—δες Σχήμα 2.2. Ανάμεσα στους διάφορες ενδείξεις που έχουμε για αυτό, κεντρική θέση έχουν οι υπολογισμοί του ενεργειακού περιεχομένου τους σε σχετικιστικά ηλεκτρόνια—το γεγονός ότι τα υπολείμματα υπερκαινοφανών περιέχουν σχετικιστικά ηλεκτρόνια είναι αδιαμφισβήτητο από τις ραδιοπαρατηρήσεις που τα δείχνει να έχουν μη θερμική ακτινοβολία σύγχροτρον.

Το υπόλειμμα υπερκαινοφανούς Cassiopeia A παρουσιάζει λαμπρότητα $L_\nu \approx 3 \times 10^{25}$ erg/sec/Hz σε συχνότητα 1 GHz, ενώ η ακτίνα του είναι 1.6 pc. Με βάση αυτά τα δεδομένα βρίσκουμε από τη σχέση (6.27)—χρησιμοποιώντας $L \approx \nu L_\nu \approx 3 \times 10^{34}$ erg/sec—ότι $B_{min} \approx .13(1+k)^{2/7}$ mGauss. Από την σχέση (6.17) βρίσκουμε ότι η απαιτούμενη ενέργεια των σχετικιστικών ηλεκτρονίων είναι ~ 800 MeV. Το ενεργειακό περιεχόμενο της πηγής σε σχετικιστικά σωματίδια (ηλεκτρόνια και πρωτόνια) υπολογίζεται (πως;) σε $4 \times 10^{47} (1+k)^{4/7}$ erg. Αυτός είναι ένας μεγάλος αριθμός εάν αναλογισθεί κανείς ότι ένας υπερκαινοφανής εκλύει κατά την έκρηξή του συνολικά $\sim 10^{51}$ erg. Συνεπώς το φαινόμενο του υπερκαινοφανούς μπορεί να μετατρέψει, κατά κάποιο τρόπο, ένα ποσοστό του αρχικού ενεργειακού του προϋπολογισμού σε μη θερμική ενέργεια. Παρατηρησιακά δεδομένα αλλά και θεωρητικές έρευνες υποδεικνύουν ότι τα σχετικιστικά ηλεκτρόνια επιταχύνονται στα ισχυρά κύματα κρούσης που δημιουργούνται κατά την έκρηξη—πράγματι το υλικό του υπερκαινοφανούς κινείται κατά τα πρώτα 300-1000 χρόνια με ταχύτητες ~ 10.000 km/sec ενώ η ταχύτητα του ήχου στο μεσοαστρικό υλικό είναι μόλις 10 km/sec.

Άσκηση: Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων που κινούνται με την ταχύτητα της έκρηξης. Θα μπορούσαν αυτά να δημιουργούν την ραδιοεκπομπή;

Σημείωση: Το πρόβλημα της επιτάχυνσης σωματιδίων στα οπτικά κύματα που συνδέονται με τα κελύφη υπερκαινοφανών προσκρούει και σε ένα άλλο πρόβλημα. Από τους υπολογισμούς που κάναμε παραπάνω φαίνεται ότι η ενέργεια των ηλεκτρονίων που παράγουν την ραδιοεκπομπή είναι της τάξης $\sim \text{GeV}$. Αυτές οι ενέργειες είναι μεν σχετικιστικές, δεν μπορούν όμως να συγκριθούν με τις ενέργειες της κοσμικής ακτινοβολίας στο "γόνατο" που φτάνουν έως 10^{14} eV . Μία νέα διάσταση του προβλήματος έδωσαν μόλις το 1996 παρατηρήσεις του ιαπωνικού ανιχνευτή ακτίνων X ASCA. Αυτός ανακάλυψε μη θερμικές²⁰ ακτίνες X από ορισμένα υπολείμματα υπερκαινοφανών που εκτείνονται έως 30 keV . Όλες οι ενδείξεις συγκλίνουν στο ότι η ακτινοβολία αυτή είναι σύγχροτρον. Σε αυτή την περίπτωση μία ακόμα εφαρμογή της σχέσης (6.17) δίνει την ενέργεια των ηλεκτρονίων σε $\sim 70 - 100 \text{ TeV}$ που είναι πολύ κοντά στις ζητούμενες.

Εφαρμογή 3: Αναμφίβολα η μη θερμική πηγή με το καλύτερα καταγραμμένο φάσμα είναι το Νεφέλωμα του Καρκίνου. Το φάσμα της εκτείνεται 21 τάξεις μεγέθους, από τα ραδιοκύματα έως τις ακτίνες γ πολύ υψηλών ενεργειών. Η πηγή αυτή είναι το υπόλειμμα της έκρηξης ενός υπερκαινοφανούς το $1054 \mu.X.$ στον αστερισμό του Ταύρου. Πηγή ενέργειάς του είναι ο Crab pulsar που περιστρέφεται 190 φορές το δευτερόλεπτο. Η ακτινοβολία από συχνότητες $\sim 10^8 \text{ Hz}$ έως 10^{23} Hz προέρχεται από



Σχήμα 6.9: Το φάσμα εκπομπής του Νεφελώματος του Καρκίνου. Αυτό προέρχεται από μη θερμική εκπομπή σχετικιστικών ηλεκτρονίων (σύγχροτρον/αντίστροφος σκεδασμός Compton). Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνει κανείς την φασματική αυτή μορφή με το φάσμα μελανού σώματος που εκπέμπεται στο υπέρυθρο (FIR) από θερμή σκόνη και σημειώνεται στο σχήμα με διακεκομμένη γραμμή.

²⁰ Τα υπολείμματα υπερκαινοφανών εκπέμπουν στις ακτίνες X αλλά η εκπομπή τους αποδίδεται σε θερμική ακτινοβολία πέδης από αέριο που έχει θερμανθεί από το κύμα κρούσης του υπερκαινοφανούς. Η μη θερμική ακτινοβολία που ανακαλύφθηκε πρόσφατα αποτελεί μία άλλη συνιστώσα, εντελώς διαφορετικής προέλευσης.

ακτινοβολία σύγχροτρον²¹, ενώ οι ακόμα μεγαλύτερες συχνότητες παράγονται από αντίστροφο σκεδασμό Compton. Το μαγνητικό πεδίο του υπολείμματος υπολογίζεται σε ~ 1 mGauss που σημαίνει ότι η υψηλότερη ενέργεια των ηλεκτρονίων είναι της τάξης των $\sim 3 \times 10^{15}$ eV ενώ τα ραδιοκύματα δημιουργούνται από ηλεκτρόνια ~ 100 MeV. Παρατηρούμε επίσης ότι το φάσμα του αποτελείται από νόμο δύναμης με μεταβαλλόμενο δείκτη που μάλιστα αυξάνει όσο αυξάνει η ενέργεια. Αυτό οφείλεται στους διαφορετικούς χρόνους γήρανσής των ηλεκτρονίων που ακτινοβολούν. Πράγματι από τη σχέση (6.9) συνάγουμε ότι για τα χαμηλής ενέργειας ηλεκτρόνια ο χρόνος ζωής είναι περί τα 100.000 χρόνια, που είναι πολύ μεγαλύτερος της ηλικίας του υπολείμματος (~ 1.000 χρόνια). Αντίθετα τα ηλεκτρόνια υψηλών ενεργειών έχουν χρόνο ζωής περί την μία ημέρα. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι τα χαμηλής ενέργειας ηλεκτρόνια δεν έχουν προλάβει ακόμα να ακτινοβολήσουν ένα σημαντικό μέρος της ενέργειας τους ενώ αντίθετα για τα ηλεκτρόνια υψηλών ενεργειών απαιτείται συνεχής ανανέωση. Αυτές οι διαφορές οδηγούν στο ενδιαφέρον πρόβλημα της εξέλιξης των σχετικιστικών ηλεκτρονίων μέσα σε πηγές ακτινοβολίας σύγχροτρον και προκαλούν τη συγκεκριμένη μορφή του φάσματος εκπομπής του Νεφελώματος.

Εφαρμογή 4: Μία ακόμα μεγάλη κατηγορία πηγών ακτινοβολίας σύγχροτρον αποτελούν οι ενεργοί γαλαξίες. Για παράδειγμα, οι χαμηλές ενέργειες (ράδιο έως ακτίνες X) του φάσματος εκπομπής του blazar Markarian 421 (Σχήμα 5.9) προέρχονται από τον μηχανισμό αυτό. Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι υψηλές ενέργειες (ακτίνες γ) προέρχονται από αντίστροφο σκεδασμό Compton. Αποδεικνύεται ότι είναι τα ίδια ηλεκτρόνια που δημιουργούν την ακτινοβολία στις δύο αυτές φασματικές περιοχές. Ο συνδυασμός των δύο αυτών μηχανισμών σκεδασμού και ακτινοβολίας και η σύγκριση με τα παρατηρησιακά δεδομένα σε όλο το εύρος του H/M φάσματος οδήγησε, κατά την τελευταία δεκαετία, σε μία πληθώρα στοιχείων για τις μέχρι τότε άγνωστες φυσικές συνθήκες στις πηγές αυτές.

²¹ Το Νεφέλωμα του Καρκίνου ήταν η πρώτη αστροφυσική πηγή για την οποία εφαρμόστηκε η θεωρία της ακτινοβολίας σύγχροτρον από τον Ρώσο αστροφυσικό Shklovskii.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Thomas K. Gaisser 'Cosmic Rays and Particle Physics', Cambridge University Press.
Μία συνοπτική μονογραφία που συνδυάζει στοιχεία Φυσικής Κοσμικής Ακτινοβολίας, Φυσικής Στοιχειωδών Σωματίων και Αστροφυσικής Υψηλών Ενεργειών. Από τα πρώτα εγχειρίδια που είναι γραμμένα στο πνεύμα της Αστροσωματιδιακής Φυσικής.

George B. Rybicki, Alan P. Lightman 'Radiative Processes in Astrophysics', John Wiley & Sons: Ένα εξαιρετικό, αλλά απαιτητικό, βιβλίο με έμφαση στις εφαρμογές της θεωρίας της Ακτινοβολίας στην Αστροφυσική. Το βιβλίο από το οποίο διδάσκεται η Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών (και όχι μόνο) στα περισσότερα Πανεπιστήμια.

Malcolm S. Longair 'High Energy Astrophysics', Cambridge University Press: Δύο τόμοι που καλύπτουν σε βάθος τα θέματα της Αστροφυσικής Υψηλών Ενεργειών και της Φυσικής της Κοσμικής Ακτινοβολίας, τόσο από πλευράς φυσικών μηχανισμών όσο και από πλευράς εφαρμογών. Λιγότερο μαθηματικά δομημένο από το προηγούμενο, αλλά πιο ευρύ.

Frank Shu 'The Physics of Astrophysics. Volume I: Radiation', University Science Books: Παρόμοιο σε πνεύμα με το βιβλίο των Rybicki και Lightman, αλλά με λιγότερες εφαρμογές στην Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών.

George R. Blumenthal, Robert J. Gould 'Bremsstrahlung, Synchrotron Radiation, and Compton Scattering of High-Energy Electrons Traversing Dilute Gases' Reviews of Modern Physics, vol. 42, pp. 237-270, 1970.
Άρθρο επισκόπησης.

*Νεκτάριος Βλαχάκης
Επίκουρος Καθηγητής*

Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών

Σημειώσεις από τις παραδόσεις του μαθήματος

*Πανεπιστήμιο Αθηνών
2009-2010*

Περιεχόμενα

1	Επιτάχυνση σωματιδίων σε υψηλές ενέργειες	1
1.1	Το πρόβλημα	1
1.2	Δεύτερης τάξης επιτάχυνση Φέρμι	3
1.3	Πρώτης τάξης επιτάχυνση Φέρμι	5
1.4	Επιτάχυνση από μεταβολές δυναμικού	9
1.5	Ασκήσεις	12
2	Σχετικιστική ιδεατή μαγνητοϋδροδυναμική	21
2.1	Εισαγωγή	21
2.2	Οι εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής	21
2.2.1	Οι εξισώσεις του Μάξουελ	22
2.2.2	Νόμος Ω	23
2.2.3	Θερμοδυναμικές σχέσεις	23
2.2.4	Εξίσωση συνέχειας	24
2.2.5	Εξίσωση ορμής	25
2.3	Αξισυμμετρικές στάσιμες εκροές	25
2.3.1	Τα ολοκληρώματα της κίνησης	26
2.3.2	Η επιφάνεια Αλφβέν	30
2.3.3	Οι εξισώσεις για τα M και A	31
2.3.4	Οι δυνάμεις στο πολοειδές επίπεδο	31
2.4	Ασκήσεις	34
3	Αστροφυσικοί δίσκοι προσαύξησης	39
3.1	Εισαγωγή	39
3.2	Το πρόβλημα της απώλειας στροφορμής	39
3.3	Λεπτοί ισόθερμοι δίσκοι	43
3.3.1	Δομή λεπτού δίσκου	43
3.3.2	Εξίσωση συνέχειας	44
3.3.3	Απώλεια στροφορμής	44
3.3.4	Ενεργειακές απώλειες	45
3.3.5	Εκπεμπόμενη ισχύς	45
3.3.6	Εκπεμπόμενο φάσμα	46
3.3.7	Η α -παράμετρος	47
3.4	Άλλα μοντέλα δίσκων	47

3.5	Ασκήσεις	49
4	Παράρτηματα:	57
4.1	Το σύστημα μονάδων Γκάους	57

Κεφάλαιο 1

Επιτάχυνση σωματιδίων σε υψηλές ενέργειες

1.1 Το πρόβλημα

Οι συχνότητες φωτονίων που παρατηρούμε και εξετάζουμε στα πλαίσια της Αστροφυσικής Υψηλών Ενέργειών αντιστοιχούν σε – όπως δηλώνει και ο τίτλος του κλάδου – πολύ υψηλές ενέργειες. Γεννάται το ερώτημα πώς αυτά τα φωτόνια έχουν παραχθεί. Για παράδειγμα, έστω ότι σ' εμάς φτάνει ένα φωτόνιο ενέργειας 1 TeV. Τι θα μπορούσε να παράξει ένα τέτοιο φωτόνιο; Θα μπορούσε να έχει παραχθεί θερμικά; Όχι, διότι η ισοδύναμη θερμοκρασία θα ήταν $E/k_B \approx 10^{16}K$ και τίποτα στο γνωστό σύμπαν δεν είναι τόσο ζεστό. Ένας επιπλέον τρόπος για να ελέγξουμε αν η εκπομπή φωτονίων είναι θερμική, είναι το να συγκρίνουμε το φάσμα της ακτινοβολίας με φάσμα μέλανος σώματος. Για φωτόνια υψηλής ενέργειας το φάσμα είναι πάντα νόμος δύναμης, άρα η ακτινοβολία έχει παραχθεί με κάποιο μη θερμικό μηχανισμό. Αυτό σημαίνει πως το φωτόνιο έχει πάρει ενέργεια από κάποιο υψηλής ενέργειας σωματίδιο.

Το ερώτημα μετατοπίζεται στο πώς ένα σωματίο μπορεί να αποκτήσει υψηλή ενέργεια, δηλ. πολύ μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας του, $E = \gamma mc^2 \gg mc^2$, όπου $\gamma = 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$ είναι ο παράγοντας Λόρεντζ. Αντιλαμβανόμαστε την ύπαρξη σωματιδίων με $V \approx c \Leftrightarrow \gamma \gg 1$, είτε έμμεσα (οδηγούν στην δημιουργία παρατηρήσιμων φωτονίων υψηλής ενέργειας), είτε άμεσα (κοσμική ακτινοβολία).

Ας εξετάσουμε την δράση όλων των γνωστών δυνάμεων πάνω στο σωματίδιο:

Η ισχυρή πυρηνική δύναμη, λόγω της μικρής της εμβέλειας, θα χρειαζόταν να δώσει εξωπραγματικά υψηλή επιτάχυνση σε αποστάσεις της τάξης $\sim 10^{-13}cm$. Το ίδιο ισχύει για την ασθενή πυρηνική δύναμη.

Θα μπορούσε η βαρύτητα να λύσει το πρόβλημα; Η βαρύτητα σαν συντηρητική δύναμη που είναι, δεν μπορεί να δώσει υψηλές ταχύτητες μακριά από την βαρυτική πηγή που επιταχύνει το σωματίο. Αν σκεφτούμε κάποιο σωματίο να πλησιάζει κάποια βαρυτική πηγή, η κινητική του ενέργεια $(\gamma - 1)mc^2$ αυξάνει. Καθώς όμως απομακρύνεται από την πηγή για να φτάσει σ' εμάς, η ενέργειά του μειώνεται και

γίνεται όση ήταν και πριν πλησιάσει την πηγή. Η απάντηση λοιπόν είναι πάλι αρνητική.

Το τελικό συμπέρασμα αυτού του συλλογισμού, είναι ότι μόνο ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις μπορούν να επιταχύνουν σωματίια σε μεγάλες ενέργειες.

Η ενέργεια που αποκτά ένα σωματίιο εξαρτάται από το φορτίο του. Ας σκεφτούμε για παράδειγμα ένα πρωτόνιο, ένα νετρόνιο και ένα σωματίιο άλφα να βρίσκονται μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Ποιό θα αποκτήσει μεγαλύτερη ενέργεια; Βέβαια το σωματίιο άλφα, διότι έχει μεγαλύτερο φορτίο (ανεξάρτητα του γεγονότος ότι λόγω της μεγαλύτερης αδράνειάς του θα κινηθεί δυσκολότερα). Μικρότερη ενέργεια θα πάρει το πρωτόνιο και τελευταίο στη σειρά θα είναι το ουδέτερο νετρόνιο.

Ας σκεφτούμε ένα φορτίο να μπαίνει σε χώρο με στατικό (χρονοαμετάβλητο) μαγνητικό πεδίο και μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο. Το φορτίο θα εκτελέσει ελικοειδή κίνηση στην οποία η ταχύτητά του αλλάζει διεύθυνση αλλά όχι μέτρο, άρα η ενέργεια παραμένει αμετάβλητη. Αν όμως το μαγνητικό πεδίο κινείται; Αφού η ενέργεια του φορτίου είναι σταθερή στο κινούμενο σύστημα, θα έχουμε μετατόπιση Doppler στο ακίνητο σύστημα αναφοράς. Έτσι, κινούμενα μαγνητικά πεδία μπορούν να αυξήσουν την ενέργεια ενός φορτίου. Άλλος τρόπος να αυξήσουμε την ενέργεια ενός φορτίου είναι βέβαια η επιτάχυνση λόγω ηλεκτρικού πεδίου. Έτσι κάποια πτώση δυναμικού ή σκέδαση Compton επιταχύνει φορτία.

Συνοψίζοντας, ο μόνος τρόπος να έχουμε φωτόνια υψηλής ενέργειας είναι αυτά να παράγονται χρησιμοποιώντας ενέργεια σωματιδίων, τα οποία με τη σειρά τους έχουν επιταχυνθεί είτε σε κινούμενα μαγνητικά πεδία, είτε σε ηλεκτρικά πεδία.

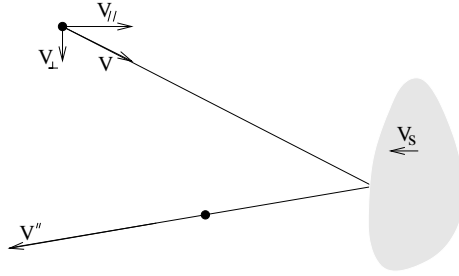
Στη συνέχεια θα περιγράψουμε συγκεκριμένους μηχανισμούς επιτάχυνσης αυτού του τύπου με απώτερο σκοπό να προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε το παρατηρούμενο φάσμα σωματιδίων υψηλής ενέργειας (π.χ. κοσμικών ακτίνων), το οποίο τυπικά είναι ένας νόμος δύναμης με εκθέτη 2-3 (εννοώντας ότι ο αριθμός σωματιδίων με ενέργειες από E ως $E + dE$ είναι $N(E)dE \propto E^{-\alpha}dE$, με $\alpha = 2 - 3$). Τα φάσματα εκτείνονται σε πολύ μεγάλες ενέργειες· π.χ. κοσμικές ακτίνες έχουν παρατηρηθεί μέχρι $3 \times 10^{20} \text{eV}$. Σ' αυτήν λοιπόν την περίπτωση έχουμε επιτάχυνση ενός μικρού κλάσματος σωματιδίων σε υπερ-υψηλές ενέργειες, ενώ περισσότερα σωματίδια έχουν μικρότερες ενέργειες. Υπάρχουν επίσης ισχυρές ενδείξεις σε εκροές από ενεργούς γαλαξιακούς πυρήνες για κίνηση του συνόλου της εκροής – την οποία θα ονομάζουμε κίνηση υποβάθρου σε αντιδιαστολή με την κίνηση μεμονωμένων σωματιδίων – με παράγοντα Λόρεντζ μέχρι μερικές δεκάδες. Επίσης, το επικρατέστερο μοντέλο για την εξήγηση των εκλάμψεων γάμμα ακτινοβολίας απαιτεί επιτάχυνση του συνόλου της εκροής σε παράγοντα Λόρεντζ μερικές εκατοντάδες. Τα δύο τελευταία παραδείγματα δείχνουν ότι κάποιες φορές όλη η ύλη σε κάποια περιοχή μπορεί να κινείται ισχυρά σχετικιστικά.

Το αντικείμενό μας είναι λοιπόν να εξηγήσουμε:

(α) φάσματα νόμου δύναμης και υπερ-υψηλές ενέργειες για μικρό κλάσμα σωματιδίων, και

(β) σχετικιστική κίνηση υποβάθρου.

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με το πρώτο· το δεύτερο θέμα θα μας απασχολήσει σε επόμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 1.1: Κρούση σωματίου με κινούμενο νέφος.

1.2 Δεύτερης τάξης επιτάχυνση Φέρμι

Ο μηχανισμός αυτός προτάθηκε από τον Φέρμι (1949). Πρώτα θα τον περιγράψουμε αφαιρετικά (μόνο την ιδέα) και στη συνέχεια θα δούμε που μπορεί να συναντάται στη φύση.

Έστω ότι ένα σωματίο μάζας m κινείται σε χώρο όπου υπάρχουν διάσπαρτα κατανεμημένα κινούμενα σώματα (θα τα αποκαλούμε «νέφη»), μεγάλης ως προς το σωματίο μάζας, τα οποία ανακλούν ελαστικά το σωματίο. Αν αυτά τα νέφη κινούνται με ταχύτητα V_s και το σωματίο κινείται με ταχύτητα V , μετά κάθε κρούση το σωματίο κερδίζει ή χάνει ενέργεια ανάλογα με το αν τα σώματα πριν την κρούση κινούνται σε αντίθετη ή στην ίδια κατεύθυνση.

Ας εξετάσουμε πρώτα το μη σχετικιστικό ισοδύναμο. Στο σύστημα αναφοράς του νέφους το σωματίο φαίνεται να πλησιάζει με ταχύτητα $(V_{||} - V_s) + V_{\perp}$ (δες σχ. 1.1). Μετά την κρούση η ταχύτητα στο σύστημα του νέφους θα είναι $-(V_{||} - V_s) + V_{\perp}$. Άρα, στο αρχικό σύστημα αναφοράς $V'' = -V_{||} + 2V_s + V_{\perp}$. Το κέρδος στην κινητική ενέργεια είναι $2mV_s(V_{||} + V_s)$ στην περίπτωση μετωπικής κρούσης $V \cdot V_s < 0$, και η ζημία στην περίπτωση ακόλουθης κρούσης (δηλ. κρούσης «στην ουρά») $V \cdot V_s > 0$ είναι $2mV_s(V_{||} - V_s)$.

Στην σχετικιστική περίπτωση ο συλλογισμός είναι ο ίδιος: πρέπει όμως να χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμούς Λόρεντζ όταν σκεφτόμαστε τη σχέση μεταξύ ταχυτήτων και ενεργειών από το ένα σύστημα στο άλλο. Το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$\gamma'' = \gamma \left(1 + \frac{2V_s^2/c^2 - 2\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_s/c^2}{1 - V_s^2/c^2} \right). \quad (1.1)$$

Αναπτύσσοντας κατά Τέυλορ την εξ. 1.1 ως προς V_s/c και κρατώντας μέχρι δεύτερης τάξης όρους, έχουμε για το κέρδος ενέργειας ($V \cdot V_s < 0$ για μετωπική κρούση)

$$\Delta E = (\gamma'' - \gamma)mc^2 = \left(-2\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_s}{c^2} + 2\frac{V_s^2}{c^2} \right) \gamma mc^2. \quad (1.2)$$

Για να υπολογίσουμε ένα στατιστικό μέσο όρο θα πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι η πιθανότητα για μετωπική κρούση είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα για ακόλουθη κρούση. Σκεφτείτε τα συγκρουόμενα αυτοκινητάκια. Πόσα θα σας τρακάρουν μετωπικά σε κάποιο χρονικό διάστημα Δt αν η ταχύτητά σας είναι V ;

Όχι μόνο όσα βρίσκονται σε απόσταση $< V\Delta t$, αλλά και κάποια άλλα τα οποία σας πλησιάζουν και θα αποκτήσουν απόσταση $< V\Delta t$ μέσα στο χρόνο Δt . Αντίθετα, οι ακόλουθες χρούσεις θα είναι λιγότερες από τα αυτοκινητάκια που βρίσκονται σε απόσταση $V\Delta t$, διότι πρέπει να αφαιρέσουμε αυτά που θα φύγουν από αυτή την απόσταση στο χρόνο Δt . Στην απλούστερη μονοδιάστατη και μη σχετικιστική περίπτωση η πιθανότητα η επόμενη χρούση να είναι μετωπική είναι ανάλογη του $(V + V_s)\Delta t$, ενώ για ακόλουθη χρούση ανάλογη του $(V - V_s)\Delta t$. Άρα, η μέση αύξηση στην ενέργεια μετά από μια χρούση είναι

$$\Delta E = 2mV_s(V + V_s)\frac{V + V_s}{2V} - 2mV_s(V - V_s)\frac{V - V_s}{2V} = 8\left(\frac{V_s}{V}\right)^2 E_k. \quad (1.3)$$

Ακριβείς υπολογισμοί στην τριδιάστατη κίνηση και με σχετικιστικές ταχύτητες οδηγεί σε παρόμοιο αποτέλεσμα $\Delta E = (8/3)(V_s/c)^2 E$ (προσέξτε: $E = \gamma mc^2$ είναι η ολική ενέργεια του σωματίου, συμπεριλαμβανομένης της ενέργειας ηρεμίας mc^2 και όχι η κινητική ενέργεια $E_k = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$). Η αύξηση της ενέργειας εξαρτάται από το τετράγωνο του (V_s/c) και γι' αυτό ο μηχανισμός αυτός ονομάστηκε «δεύτερης τάξης». Να σημειώσουμε ότι ο μηχανισμός αυτός βασίζεται στην ιδιότητα μιας συλλογής από αλληλοσυγκρουόμενα σωματάρια να φτάσουν σε ισοκατανομή της ενέργειας.

Επειδή ο χρόνος μεταξύ των χρούσεων είναι σταθερός – ίσος με $< L/V \sin \phi > \approx 2L/c$, όπου L η μέση απόσταση μεταξύ νεφών – και $\Delta E/E$ επίσης σταθερό,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\Delta E}{2L/c} = \frac{E}{t_a} \Leftrightarrow E = E_0 e^{t/t_a}, \quad t_a = \frac{3cL}{4V_s^2}, \quad (1.4)$$

και άρα οι συνεχείς χρούσεις θα οδηγήσουν σε εκθετική αύξηση της ενέργειας του σωματίου. Όμως, τα σωματάρια δεν μένουν για πάντα στην περιοχή των νεφών αλλά διαχέονται. Έστω ότι ο μέσος χρόνος παραμονής (και επιτάχυνσης) είναι t_d . Τότε, το πλήθος των σωματιδίων που θα επιταχύνονται συνολικό χρονικό διάστημα από t ως $t + dt$, είναι $N(t)dt \propto e^{-t/t_d} dt$. Αυτά τα σωματάρια όταν διαφύγουν θα έχουν ενέργεια $E = E_0 e^{t/t_a} \Leftrightarrow t(E) = \log_e(E/E_0)t_a$. Συνεπώς, τα σωματάρια που φεύγουν με ενέργειες από E ως $E + dE$ είναι $N(E)dE = N(t)dt \propto E^{-1-t_a/t_d} dE$, δηλ. βρήκαμε νόμο δύναμης.

Ας σκεφτούμε τώρα την εφαρμογή αυτού του μηχανισμού. Η αρχική ιδέα του Φέρμι ήταν πως τα «νέφη» είναι ανομοιογένειες μαγνητικού πεδίου (δηλ. έχουμε κινούμενο μαγνητικό πεδίο) στον μεσοαστρικό χώρο, οι οποίες δρουν σαν μαγνητικοί καθρέπτες¹ για τα φορτισμένα σωματάρια, αναγκάζοντάς τα να ανακλώνται ελαστικά.

¹Όπως ξέρουμε, ένα φορτισμένο σωματάρια εκτελεί ελικοειδή τροχιά μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Μπορούμε να χωρίσουμε την κίνηση σε ευθύγραμμη και ομαλή με ορμή $p_{\parallel} = \gamma mV_{\parallel}$ παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο, και ομαλή κυκλική με ορμή $p_{\perp} = \gamma mV_{\perp}$ και ακτίνα $r = p_{\perp}/qB$ κάθετα στο πεδίο. Αν το πεδίο είναι ανομοιογενές τα p_{\parallel}^2 και p_{\perp}^2 δεν διατηρούνται πια σταθερά, αν και το άθροισμά τους είναι σταθερό (η δύναμη από μαγνητικό πεδίο είναι κάθετη στην ταχύτητα και άρα δεν παράγει έργο). Αποδεικνύεται ότι η ποσότητα p_{\perp}^2/B μένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης, κάτι που οδηγεί στο ακόλουθο ενδιαφέρον συμπέρασμα: Όταν το φορτίο κινείται προς μεγαλύτερες εντάσεις πεδίου, η συνιστώσα p_{\perp} αυξάνει, οπότε η p_{\parallel} μειώνεται. Δηλ. το βήμα της έλικας συνεχώς μικραίνει και για αρκούντως μεγάλες τιμές του B μπορεί να μηδενιστεί. Στην περίπτωση αυτή το φορτίο ανακλάται σε ένα «μαγνητικό καθρέπτη».

Παρότι ο μηχανισμός οδήγησε σε νόμο δύναμης παρουσιάζει διάφορα προβλήματα. Ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει η ενέργεια ενός σωματίου σε επιθυμητά επίπεδα είναι αρκετά μεγάλος, κάτι που δεν δικαιολογεί να αμελήσουμε ενεργειακές απώλειες. Για παράδειγμα, έστω ότι $V_s/c \sim 10^{-4}$ και $L \sim 1\text{pc}$. Ο χρόνος μεταξύ δυο χρούσεων είναι περίπου $2L/c \sim 7$ χρόνια, ενώ ο χρόνος που χρειάζεται το σωματίο για να επιταχυνθεί από κάποια ενέργεια σε e φορές μεγαλύτερη είναι $\sim [(8/3)(V_s/c)^2]^{-1}$ φορές μεγαλύτερος, δηλ. κοντά ένα δισεκατομμύριο χρόνια! Φυσικά αν το πεδίο είναι εντονότερα ανομοιογενές, δηλ. το L είναι μικρότερο, ο χρόνος ελαττώνεται.

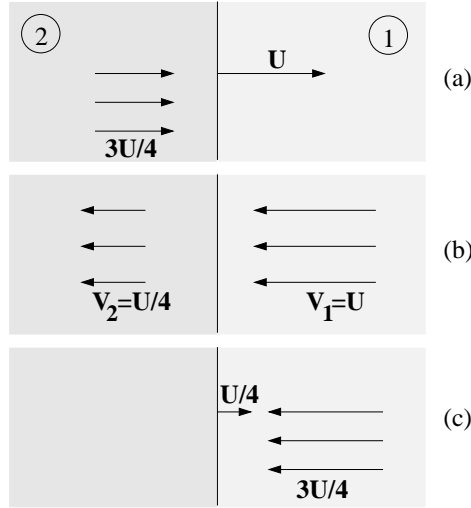
Ακόμα κι αν λύσουμε αυτό το πρόβλημα, είναι δύσκολο να απαντήσουμε μια άλλη ερώτηση: γιατί ο φασματικός δείκτης $(-1 - t_a/t_d)$ έχει πάντα σχεδόν την ίδια τιμή. Με άλλα λόγια γιατί το t_d είναι συγκρίσιμο με το t_a και συνδέεται με την ίδια σχέση με τα L και V_s σε όλα τα νέφη;

1.3 Πρώτης τάξης επιτάχυνση Φέρμι

Βελτίωση του προηγούμενου μηχανισμού αποτελεί ο μηχανισμός Φέρμι πρώτης τάξης. Η ιδέα είναι απλή. Όπως είδαμε στον μηχανισμό δεύτερης τάξης, το μέσο κέρδος σε ενέργεια είναι ανάλογο του $(V_s/c)^2$, διότι οι μετωπικές χρούσεις μερικώς εξουδετερώνονται από τις ακόλουθες χρούσεις. Αν με κάποιο τρόπο εξασφαλίσουμε ότι μόνο μετωπικές χρούσεις είναι δυνατές, ο μηχανισμός θα γίνει πολύ αποδοτικότερος. Το κέρδος σε ενέργεια θα είναι, σύμφωνα με την εξ. (1.2), $\Delta E/E = 2VV_s/c^2$, δηλ. ανάλογο του V_s/c . Για το λόγο αυτό ο μηχανισμός ονομάστηκε «πρώτης τάξης».

Το μηχανικό ανάλογο είναι ένα σωματίο να κινείται μεταξύ δύο νεφών τα οποία πλησιάζουν μεταξύ τους. Το ερώτημα είναι βέβαια πού μπορεί να υλοποιηθεί ένας τέτοιος μηχανισμός στη φύση. Η αρχική ιδέα ήταν σε ασυνέχειες σε ροή μάζας (ωστικά κύματα ή shocks²) που παράγονται λόγω εκρήξεων υπερκαινοφανών.

²Γενικά η ροή πλάσματος δεν είναι πάντα ομαλή. Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι αναπόφευκτη η δημιουργία ασυνεχειών, μέσα στις οποίες το πλάσμα δεν βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία. Ένα παράδειγμα για τη δημιουργία ασυνέχειας είναι το ακόλουθο: Έστω ότι έχουμε ένα κυλινδρικό δοχείο μεγάλου μήκους γεμάτο με ιδανικό μονατομικό αέριο, το οποίο είναι κλειστό στην μια μεριά με ένα έμβολο το οποίο μπορεί να κινηθεί και να αλλάξει τον όγκο του δοχείου. Έστω ότι για $t = 0$ αρχίζουμε να κινούμε το έμβολο με σταθερή ταχύτητα V_I . Προφανώς τα άτομα που βρίσκονται κοντά στην επιφάνεια του εμβόλου εξαναγκάζονται να κινηθούν με ταχύτητα V_I και αρχικά δημιουργείται ένα πύκνωμα και μια αύξηση πίεσης (να σημειώσω εδώ ότι η μέση ταχύτητα της ροής είναι ανεξάρτητη από τις θερμικές κινήσεις μέτρο των οποίων είναι η θερμοκρασία). Η πληροφορία ότι η πίεση αυξήθηκε, η οποία θα οδηγήσει σε κίνηση τελικά όλα τα άτομα του δοχείου, διαδίδεται με πεπερασμένη ταχύτητα, την ταχύτητα του ήχου C_s . Για μικρές ταχύτητες του εμβόλου $V_I < C_s$ υπάρχει αρκετός χρόνος να διαδοθεί η πληροφορία και να αποκατασταθεί ισορροπία. Τα τελευταία άτομα που «μαθαίνουν τα νέα» στην χρονική στιγμή t βρίσκονται σε απόσταση $(C_s - V_I)t$ από το έμβολο. Τι γίνεται όμως αν κινήσουμε το έμβολο με ταχύτητα $V_I > C_s$; Τότε δεν δίνουμε χρόνο στα άτομα να αντιδράσουν και να μεταδώσουν την πληροφορία ομαλά, αφού τα ηχητικά κύματα είναι πιο αργά από το έμβολο. Σίγουρα βέβαια κοντά στο έμβολο τα άτομα έχουν ταχύτητα V_I όπως πριν, ενώ σε κάποια απόσταση το αέριο παραμένει ακίνητο. Έτσι δημιουργείται μεγάλη αύξηση στην πίεση κοντά στο έμβολο, η κλίση της οποίας στο τέλος γίνεται άπειρη. Το έμβολο σπρώχνει βίαια το αέριο όπως ένα εκχιονιστικό μηχάνημα σπρώχνει και συσσωρεύει μπροστά του το χιόνι. Και στις δύο περιπτώσεις δημιουργείται μια ασυνέχεια στη ροή (το άκρο αυτής της περιοχής βρίσκεται εκεί όπου τελειώνει η περιοχή μεγάλης πίεσης), η



Σχήμα 1.2: Ροή πλάσματος με ασυνέχεια. (a) Ταχύτητες στο σύστημα αναφοράς όπου το αδιατάρακτο μέρος «1» είναι ακίνητο. Η ασυνέχεια έχει ταχύτητα U , ενώ το μέρος «2» από το οποίο έχει περάσει η ασυνέχεια έχει ταχύτητα $3U/4$. (b) Ταχύτητες στο σύστημα αναφοράς της ασυνέχειας. Είναι $V_1 = 4V_2$ όπως δείχνει η υποσημείωση 2. (c) Ταχύτητες στο σύστημα αναφοράς του μέρους «2».

Στην περίπτωση αυτή το υλικό που εκτοξεύεται έχει ταχύτητες $\sim 10^4 \text{ km s}^{-1}$, κατά πολύ μεγαλύτερες από τυπικές ταχύτητες ήχου του μεσοαστρικού υλικού που είναι το πολύ 10 km s^{-1} . Έτσι δημιουργείται μια ισχυρή ασυνέχεια, η οποία

οποία κινείται με ταχύτητα V_s . Στο εσωτερικό της ασυνέχειας δεν είναι εύκολο να περιγράψουμε το αέριο. Όμως, μπορούμε να συνδέσουμε τις δύο καταστάσεις πριν και μετά την ασυνέχεια, δηλ. είναι δυνατόν να συνδέσουμε χαρακτηριστικά του μέρους του αερίου απ' όπου έχει περάσει η ασυνέχεια (πυκνότητα ρ_2 , πίεση P_2 , ταχύτητα V_2 ως προς την ασυνέχεια) με χαρακτηριστικά του υπόλοιπου μέρους (πυκνότητα ρ_1 , πίεση P_1 , ταχύτητα V_1 ως προς την ασυνέχεια στο σύστημα αναφοράς στο οποίο το αέριο ήταν αρχικά ακίνητο, η ασυνέχεια έχει ταχύτητα $-V_1$). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε νόμους διατήρησης, οι οποίοι για μη σχετικιστική κίνηση είναι ($\Gamma = 1 + 2/f$ είναι ο πολυτροπικός δείκτης του αερίου που συνδέεται με το πλήθος f των βαθμών ελευθερίας· για μονατομικό αέριο $\Gamma = 5/3$):

- διατήρηση μάζας $\rightarrow \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$
- διατήρηση ορμής $\rightarrow P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$
- διατήρηση ενέργειας $\rightarrow \frac{1}{2} V_1^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} V_2^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{P_2}{\rho_2}$

Οι σχέσεις αυτές συνεπάγονται

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\Gamma + 1}{\Gamma - 1 + 2/M_1^2}, \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{\Gamma + 1}{2\Gamma M_1^2 - \Gamma + 1}, \quad \text{όπου } M_1^2 = \frac{V_1^2}{C_{s1}^2} = \frac{V_1^2}{\Gamma P_1/\rho_1}. \quad (1.5)$$

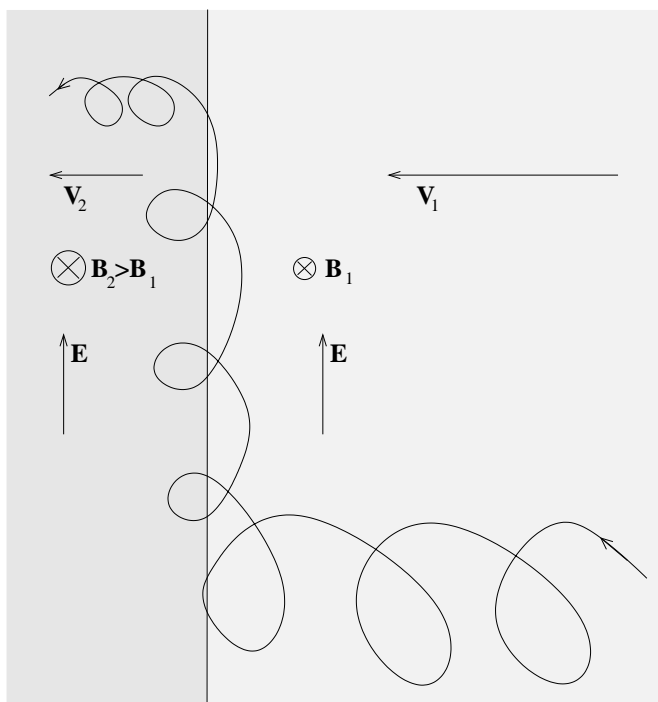
Στο όριο που η ταχύτητα του εμβόλου ($-V_1$) είναι πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ήχου στο αδιατάρακτο μέρος του αερίου (C_{s1}), είναι $M_1^2 \gg 1$ (ισχυρή ασυνέχεια) και η λύση απλοποιείται σε $\rho_2/\rho_1 = V_1/V_2 = (\Gamma + 1)/(\Gamma - 1)$. Στην περίπτωση που $\Gamma = 5/3$ αυτός ο λόγος ισούται με 4, οπότε $V_1 = 4V_2$. (Τα αποτελέσματα τροποποιούνται με την ύπαρξη μαγνητικού πεδίου.)

κινείται υπερηχητικά με ταχύτητα U , χωρίζοντας το χώρο σε δυο μέρη: το μέρος «2» από το οποίο έχει περάσει η ασυνέχεια και το μέρος «1», δεξ σχ. 1.2. Ένα σωματίο που αρχικά βρίσκεται στο «1», βλέπει το μέρος «2» να κινείται προς το μέρος με ταχύτητα $3U/4$ [δες σχ. 1.2(a)]. Κατά συνέπεια η χρούση με το μέρος «2» θα είναι μετωπική και το σχετικό κέρδος ενέργειας του σωματίου θα είναι $\Delta E/E = \mathcal{O}(U/c)$. Ακριβείς υπολογισμοί δείχνουν ότι το κέρδος είναι $\Delta E/E = U/2c$. Μετά την χρούση το σωματίο βρίσκεται μέσα στο μέρος «2», όπου λόγω της τιβώδους ροής αλλά και της ύπαρξης μαγνητικού πεδίου σκεδάζεται και αλλάζει κατεύθυνση κίνησης με τυχαίο τρόπο (χωρίς να αλλάζει ενέργεια) γιατί το μέσο είναι ιστροπικό στο σύστημα ηρεμίας του. Στη συνέχεια, το σωματίο είτε θα διαφύγει από τη γειτονιά της ασυνέχειας, είτε θα συγκρουστεί με το μέσο «1». Αν σκεφτούμε ότι η ροή σωματίων είναι το γινόμενο της αριθμητικής τους πυκνότητας με την ταχύτητα, η ροή σωματίων που απομακρύνεται από την ασυνέχεια και χάνεται στο μέσο «2» είναι $n_2(U/4)$ [σχ. 1.2(b)]. Πολύ κοντά στην ασυνέχεια και μέσα στο μέρος «2», τα μισά από τα σωματίδια απομακρύνονται και τα άλλα μισά ξαναπερνούν την ασυνέχεια. Αφού η μέση ταχύτητα αυτών των σωματίων είναι $c/2$, η ροή σωματίων προς την ασυνέχεια είναι $(n_2/2)(c/2) = n_2c/4$. Συμπέρασμα αυτού του συλλογισμού είναι ότι το κλάσμα των σωματίων που φεύγει μακριά από την ασυνέχεια σε σχέση με αυτά που την ξαναπερνούν είναι μόλις $U/c!$ Άρα η συντριπτική πλειοψηφία θα συγκρουστεί με το μέσο «1». Όπως βλέπουμε από το σχ. 1.2(c), πάλι η χρούση είναι μετωπική, οπότε το σωματίο θα ξανακερδίσει ενέργεια. Το φαινόμενο επαναλαμβάνεται και το σωματίο ποτέ δεν χάνει ενέργεια, σαν να συγκρούεται συνεχώς με δύο καθρέπτες που πλησιάζουν.

Μετά από δύο περάσματα από την ασυνέχεια (μπρος και πίσω, δηλ. ένας πλήρης κύκλος) είναι $\Delta E/E = U/2c + U/2c = U/c$. Άρα μετά από k κύκλους η ενέργεια θα είναι $E = E_0(1+U/c)^k$. Αφού η πιθανότητα να διαφύγει ένα σωματίο είναι U/c , αν αρχικά είχαμε N_0 σωματίδια, μετά από k κύκλους θα έχουμε $N = N_0(1 - U/c)^k$. Απαλείφοντας το k έχουμε

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{E}{E_0}\right)^{\frac{\log_e(1-U/c)}{\log_e(1+U/c)}} \approx \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-1} \Rightarrow N(E)dE \propto E^{-2}dE, \quad (1.6)$$

δηλ. ο εκθέτης στον νόμο δύναμης του ενεργειακού φάσματος είναι ακριβώς 2. Αν εξετάζουμε αέριο με $\Gamma \neq 5/3$ τα αποτελέσματα θα αλλάξουν οπότε ο εκθέτης δεν θα είναι ακριβώς 2, αλλά κοντά σ' αυτή την τιμή. Το αποτέλεσμα αυτό υπήρξε ενθαρρυντικό για την εξήγηση της προέλευσης των κοσμικών ακτίνων με υποψήφια πηγή τις ασυνέχειες από εκρήξεις υπερκαινοφανών. Όμως είναι δύσκολο να εξηγήσει παραγωγή σωματίων με ενέργεια πάνω από $\sim 10^{15}$ eV. Ο λόγος είναι ότι η ασυνέχεια επιβραδύνεται καθώς σπρώχνει όλο και μεγαλύτερη μάζα μεσοαστρικού υλικού. Κάποιος άλλος λόγος λοιπόν πρέπει να υπάρχει και να εξηγεί την παραγωγή σωματίων υπερ-υψηλής ενέργειας.



Σχήμα 1.3: Επιτάχυνση θετικού φορτίου από ολίσθηση πάνω σε επιφάνεια ασυνέχειας.

Μια παραλλαγή της επιτάχυνσης σε ασυνέχειες είναι η περίπτωση ολίσθησης πάνω στην επιφάνεια ασυνέχειας η οποία κινείται κάθετα σε μαγνητικό πεδίο. Στο σχήμα 1.3 φαίνεται η γεωμετρία της περίπτωσης αυτής. Ένα φορτίο q , μάζας m , βρίσκεται στο δεξιό μέρος του σχήματος, μέσα σε σταθερό μαγνητικό πεδίο \mathbf{B}_1 και ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} . Η κίνηση του φορτίου, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση $d(\gamma m \mathbf{v})/dt = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$, μπορεί να αναλυθεί σε μία ομαλή κυκλική γυροακτίνας $r_g = cp_{\perp}/|q|B$ και ταχύτητας v_{\perp} , της οποίας το οδηγό κέντρο εκτελεί (1) ευθύγραμμη κίνηση με ταχύτητα v_{\parallel} στην διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, και (2) ολίσθηση «ηλεκτρικού πεδίου» με ταχύτητα

$$\mathbf{V}_E = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (1.7)$$

Η ταχύτητα \mathbf{V}_E είναι τέτοια που οδηγεί το σωματίο προς την ασυνέχεια, δεξιά σχ. 1.3. (Παρατηρήστε ότι η \mathbf{V}_E είναι ανεξάρτητη του πρόσημου του φορτίου.) Όταν το σωματίο περάσει την ασυνέχεια και βρεθεί στο αριστερό μέρος του σχήματος 1.3, το μαγνητικό πεδίο έχει μεγαλύτερη ένταση, ενώ το ηλεκτρικό μένει ίδιο³. Συνεπώς η γυροακτίνα του σωματίου θα είναι μικρότερη (όπως και η ταχύτητα \mathbf{V}_E), οπότε το σωματίο ολισθαίνει πάνω στο επίπεδο της ασυνέχειας. Παρατηρούμε ότι

³Οι συνθήκες της ασυνέχειας, οι οποίες είναι οι γενικεύσεις της υποσημείωσης 2 όταν υπάρχει

η ολίσθηση είναι παράλληλη στο ηλεκτρικό πεδίο, οπότε το σωματίο κερδίζει ενέργεια. Το σχήμα 1.3 παριστάνει την κίνηση θετικού φορτίου· για αρνητικό φορτίο ο ίδιος συλλογισμός οδηγεί σε ολίσθηση προς διεύθυνση αντίθετη του \mathbf{E} , οπότε έχουμε ξανά επιτάχυνση. Αυτή η ολίσθηση προέρχεται από την ανομοιογένεια του μαγνητικού πεδίου, και στην γενική περίπτωση είναι

$$\mathbf{V}_{\nabla B} = -c \frac{p_{\perp}^2}{2m\gamma B} \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{qB^2}. \quad (1.9)$$

Δηλ. εκτός την κυκλική κίνηση, την ομαλή κίνηση στην διεύθυνση του \mathbf{B} , και την ολίσθηση λόγω της ύπαρξης ηλεκτρικού πεδίου, επιπρόσθετα υπάρχει μία δεύτερη ολίσθηση λόγω ανομοιογένειας του μέτρου του μαγνητικού πεδίου. (Παρατηρήστε ότι η $\mathbf{V}_{\nabla B}$ είναι αντίθετη για αντίθετα φορτία.)

1.4 Επιτάχυνση από μεταβολές δυναμικού

Φορτία μέσα σε χώρο με ισχυρά ηλεκτρικά πεδία επιταχύνονται αν το δυναμικό στα διάφορα σημεία της τροχιάς τους μεταβάλλεται (ισοδύναμα αν η ταχύτητά τους έχει μη μηδενική προβολή πάνω στο ηλεκτρικό πεδίο). Πτώση δυναμικού \mathcal{V} προκαλεί αύξηση ενέργειας $q\mathcal{V}$ σ' ένα θετικό φορτίο q (αντίστοιχα αύξηση δυναμικού επιταχύνει αρνητικό φορτίο). Αν έχουμε ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} , τότε το φορτίο κερδίζει ενέργεια $q\mathcal{V} \sim qEL$ όταν διανύει απόσταση L .

Πτώσεις δυναμικού συναντώνται οποτεδήποτε υπάρχει μαγνητικό πεδίο σε περιοχή περιστρεφόμενου αγωγού. Αφού τα φορτία του αγωγού είναι ευκίνητα (άπειρη αγωγιμότητα), ο νόμος του Ωμ δίνει το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού

$$\frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} \quad \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} \quad \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B}. \quad (1.10)$$

Αν ο χώρος έξω από τον αγωγό είναι σχεδόν κενός, το ηλεκτρικό πεδίο δεν ακολουθεί την σχέση (1.10) και άρα δεν είναι απαραίτητα κάθετο στο μαγνητικό πεδίο. Αφού τα φορτία κινούνται κυρίως κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών, η συνιστώσα του \mathbf{E} πάνω στο \mathbf{B} τα επιταχύνει, ενώ η κάθετη συνιστώσα καθορίζει τι είδους φορτία (θετικά ή αρνητικά) θα κινηθούν σε κάθε δυναμική γραμμή, δηλ. διαχωρίζει τα θετικά από τα αρνητικά φορτία. Τα παραπάνω θα γίνουν καλύτερα κατανοητά μελετώντας την ακόλουθη περίπτωση, η οποία είναι σημαντική σε θέματα σχετικά με μαγνητόσφαιρες των πάλσαρς.

μαγνητικό πεδίο πάνω στο επίπεδο της ασυνέχειας, δίνουν

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{\Gamma + 1}{\frac{\Gamma - 1}{2} + \frac{\beta_1 + 1}{\beta_1 M_1^2} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma - 1}{2} + \frac{\beta_1 + 1}{\beta_1 M_1^2}\right)^2 + \frac{2(2 - \Gamma)(\Gamma + 1)}{\Gamma \beta_1 M_1^2}}}, \quad (1.8)$$

με $\beta_1 = 8\pi P_1/B_1^2$ και $M_1^2 = V_1^2/C_{s1}^2 = \rho_1 V_1^2/\Gamma P_1$. Σε περίπτωση ισχυρής ασυνέχειας όπως αυτή που εξετάζουμε ($M_1 \gg 1$) είναι $\rho_2/\rho_1 = V_1/V_2 = B_2/B_1 \approx (\Gamma + 1)/(\Gamma - 1) = 4$ (για $\Gamma = 5/3$), ακριβώς όπως και στην περίπτωση με αμελητέο μαγνητικό πεδίο (δες υποσημείωση 2).

Πάλσαρς είναι αστέρες νετρονίων γρήγορα περιστρεφόμενοι και ισχυρά μαγνητισμένοι⁴. Κοντά στο αστέρι το ηλεκτρικό πεδίο έχει μη μηδενική συνιστώσα παράλληλα στο μαγνητικό (δες υποσημείωση 4). Έτσι καθώς ένα φορτίο κινείται πάνω σε μία από τις ανοιχτές δυναμικές γραμμές του \mathbf{B} επιταχύνεται και

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{acc} = \frac{e\mathbf{E} \cdot \mathbf{V}}{mc^2} \sim \frac{eE}{mc}. \quad (1.14)$$

Λεπτομέρειες για το πώς μεταβάλλεται το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο με την απόσταση στην περιοχή όπου $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \neq 0$ παραμένουν αντικείμενο έρευνας. Προσεγγιστικά μπορούμε να πούμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι στην επιφάνεια $B_R \sim 10^{12}\text{G}$ και σε μεγαλύτερες αποστάσεις ελαττώνεται σαν $B = B_R(R/r)^3$. Το ηλεκτρικό πεδίο κοντά στο άστρο είναι $E \sim (R\Omega/c)B \sim 10^{10}\text{sV cm}^{-1}$, θεωρώντας ακτίνα του αστέρα νετρονίων $R = 10^6\text{cm}$ και περίοδο περιστροφής 0.03s . Στην απόσταση του κυλίνδρου φωτός τα πεδία είναι όμοιας έντασης $E \sim B \sim 4 \times 10^5\text{G}$.

Έστω ένα ηλεκτρόνιο έχει αποσπαστεί από την επιφάνεια του αστέρα νετρονίων και αρχίζει να επιταχύνεται καθώς κινείται πάνω σε μια δυναμική γραμμή του μαγνητικού πεδίου. Αφού η δυναμική γραμμή είναι καμπύλη η ταχύτητα του φορτίου αλλάζει φορά, δηλ. υπάρχει επιτάχυνση, οπότε θα εκπεμφθεί «ακτινοβολία

⁴Το μαγνητικό πεδίο ενός αστέρα νετρονίων είναι σε πρώτη προσέγγιση διπολικό, δηλ. σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ)

$$\mathbf{B} = \frac{B_0 R^3}{2 r^3} (2 \sigma \sin \theta \hat{r} + \eta \mu \theta \hat{\theta}), \quad (1.11)$$

όπου B_0 είναι το πεδίο στην επιφάνεια του αστέρα, πάνω στους πόλους ($r = R, \theta = 0$ ή π). Οι δυναμικές γραμμές έχουν εξίσωση $dr/B_r = r d\theta/B_\theta \Leftrightarrow \eta \mu^2 \theta/r = \eta \mu^2 \theta_R/R$, όπου θ_R είναι η τιμή της γωνίας θ πάνω στην επιφάνεια του αστέρα $r = R$. Η γωνία αυτή είναι διαφορετική για κάθε δυναμική γραμμή.

Το εσωτερικό του αστέρα νετρονίων είναι πολύ καλός αγωγός και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω (στην πιο απλή προσέγγιση σταθερή). Άρα $\mathbf{V} = \Omega r \eta \mu \theta \hat{\phi}$ οπότε η εξ. (1.10) δίνει

$$\mathbf{E}_{in} = \frac{B_0 \Omega R^3}{2c r^2} (\eta \mu^2 \theta \hat{r} - 2 \eta \mu \theta \sigma \sin \theta \hat{\theta}), \quad \mathcal{V}_{in} = \frac{B_0 \Omega R^3}{2c r} \eta \mu^2 \theta. \quad (1.12)$$

Αν το εξωτερικό ($r > R$) είναι κενό, τότε $\nabla^2 \mathcal{V} = 0$. Λύνοντας την τελευταία εξίσωση για $r > R$, και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (1.12) για τις οριακές συνθήκες στην επιφάνεια $r = R$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{out} &= \frac{B_0 \Omega R^3}{c r^2} \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{R^2}{2r^2} (1 - 3 \sigma \sin^2 \theta) \right) \hat{r} - \frac{R^2}{r^2} \eta \mu \theta \sigma \sin \theta \hat{\theta} \right], \\ \mathcal{V}_{out} &= \frac{B_0 \Omega R^3}{c r} \left[\frac{1}{3} + \frac{R^2 (1 - 3 \sigma \sin^2 \theta)}{6r^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Εύκολα μπορεί ναδειχθεί ότι για τυπικές τιμές των φυσικών μεγεθών που αντιστοιχούν σε πάλσαρς η δύναμη λόγω του \mathbf{E}_{out} υπερνικά κατά πολύ τη βαρύτητα. Έτσι φορτία θα αποσπασθούν από την επιφάνεια του αστέρα και θα γεμίσουν την μαγνητόσφαιρά του. Κοντά στους πόλους $E_r < 0$, οπότε θα αποσπαστούν αρνητικά φορτία, ενώ κοντά στον ισημερινό $E_r > 0$ και αποσπώνται θετικά φορτία. Τα φορτία αυτά περιστρέφονται μαζί με το άστρο, με γωνιακή ταχύτητα Ω . Όταν όμως φτάνουν σε κυλινδρικές αποστάσεις ω τέτοιες ώστε $\omega \Omega \geq c$ αυτό αποκλείεται σύμφωνα με την θεωρία της σχετικότητας. Έτσι, οι δυναμικές γραμμές δεν είναι πια κλειστές διπολικές, αλλά ανοίγουν, και πάνω σ' αυτές εκρέει πλάσμα το οποίο έχει $V_\phi \ll \omega \Omega$. Η επιφάνεια $\omega \Omega = c$ λέγεται κύλινδρος φωτός.

λόγω καμπυλότητας της τροχιάς». Από την γενική σχέση Λαμμόρ,

$$\frac{d(\gamma mc^2)}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 [(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2], \quad (1.15)$$

στην περίπτωση που η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα (ισοδύναμα όταν το μέτρο της ταχύτητας αλλάζει αργά) έχουμε

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{cr} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{mc\mathcal{R}^2} \beta^4 \gamma^4 \approx -\frac{2}{3} \frac{e^2}{mc\mathcal{R}^2} \gamma^4, \quad (1.16)$$

όπου \mathcal{R} είναι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς⁵.

Η τελική επιτάχυνση του σωματίου δίνεται από (σε υψηλές ενέργειες η απώλεια λόγω ακτινοβολίας καμπυλότητας υπερσχύουν έναντι των υπολοίπων)

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{acc} + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{cr} = \frac{eE}{mc} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc\mathcal{R}^2} \gamma^4. \quad (1.17)$$

Η οριακή τιμή του παράγοντα Λόρεντζ αντιστοιχεί σε $d\gamma/dt = 0$, δηλ.

$$\gamma = \left(\frac{3E\mathcal{R}^2}{2e}\right)^{1/4} = 7 \times 10^7 \left(\frac{E}{10^6 \text{ sV cm}^{-1}}\right)^{1/4} \left(\frac{\mathcal{R}}{10^8 \text{ cm}}\right)^{1/2}. \quad (1.18)$$

Το σωματίο λοιπόν θα δώσει ένα φωτόνιο (γ). Το φωτόνιο αυτό με τη σειρά του αλληλεπιδρά με το μαγνητικό πεδίο και μπορεί να δώσει ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου ($\gamma \mathbf{B} \rightarrow e^- e^+ \mathbf{B}$). Τα δύο νέα σωματίδια επιταχύνονται και δίνουν νέα φωτόνια κ.ο.κ. Παρουσιάζεται λοιπόν φαινόμενο χιονοστιβάδας το οποίο έχει σαν αποτέλεσμα να γεμίσει η μαγνητόσφαιρα με ηλεκτρόνια-ποζιτρόνια.

⁵Υποπερίπτωση αποτελεί η ακτινοβολία σύγχροτρον. Για $\mathcal{R} = r_g = \gamma mc^2 \beta / eB$ παίρνουμε το γνωστό αποτέλεσμα $mc^2 (d\gamma/dt)_{syn} = -(2/3)(e^4/m^2 c^3) B^2 \beta^2 \gamma^2$.

1.5 Ασκήσεις

- Έστω ότι ένα φορτισμένο σωματίο μάζας m κινείται σε χώρο όπου υπάρχουν διάσπαρτα κατανεμημένοι μαγνητικοί καθρέπτες, οι οποίοι ανακλούν ελαστικά το σωματίο. Οι καθρέπτες κινούνται με ταχύτητα $V_s \ll c$. Θεωρείστε ότι το σωματίο κινείται αρχικά με μη σχετικιστική ταχύτητα V . Θεωρείστε ότι οι ταχύτητες V και V_s έχουν ίδια διεύθυνση, αλλά όχι απαραίτητα ίδια φορά.
 - Υπολογίστε την διαφορά στην ενέργεια του σωματίου μετά από μία χρούση.
 - Αφού βρείτε τις πιθανότητες που αντιστοιχούν σε $\mathbf{V} \nearrow \mathbf{V}_s$ και $\mathbf{V} \nearrow \swarrow \mathbf{V}_s$, υπολογίστε το μέσο κέρδος στην ενέργεια του σωματίου μετά από κάθε χρούση.
 - Επαναλάβετε τα προηγούμενα στην περίπτωση όπου η ταχύτητα V είναι σχετικιστική.
 - Έστω L η μέση απόσταση μεταξύ των καθρεπτών. Επίσης θεωρείστε ότι υπάρχει πλήθος σωματιδίων στην περιοχή των καθρεπτών, το οποίο – λόγω της διαφυγής κάποιων από τα σωματίια – μειώνεται εκθετικά, με χρόνο υποδιπλασιασμού t_d . Δείξτε ότι τα σωματίια που φεύγουν από αυτή την περιοχή έχουν ενέργειες με φάσμα ένα νόμο δύναμης του οποίου βρείτε τον εκθέτη.
- Δείξτε ότι στην περίπτωση όπου ένα σωματίο κινείται με ταχύτητα \mathbf{V} και ανακλάται ελαστικά από ένα μεγάλης μάζας σώμα που έχει ταχύτητα \mathbf{V}_s η ενέργειά του μετά την χρούση δίνεται από την σχέση (1.1).
 Στη συνέχεια δείξτε ότι η πιθανότητα σε μια χρούση η γωνία $\theta \in [0, \pi]$ μεταξύ \mathbf{V}_s και \mathbf{V} να είναι από θ ως $\theta + d\theta$ είναι $(1/2) [1 - (V_s/c) \cos \theta] \eta_m \theta d\theta$. (Θεωρήστε ότι το σωματίο έχει ταχύτητα $V \approx c$).
 Δείχνοντας πρώτα ότι η μέση τιμή $\langle \cos \theta \rangle$ είναι $-V_s/3c$, βρείτε το μέσο κέρδος σε ενέργεια $\langle \Delta\gamma/\gamma \rangle$ μετά από μια χρούση, στο όριο που $V_s \ll c$.
- Πλήθος σωματιδίων N_0 με αρχική ενέργεια E_0 επιταχύνεται σε ασυνέχεια ροής. Θεωρούμε ότι μετά κάθε κύκλο η ενέργεια ενός σωματίου γίνεται ε επί την ενέργεια που είχε στην αρχή του κύκλου, με $\varepsilon = \text{σταθερά}$ (μεγαλύτερη της μονάδας).
 - Ποια η ενέργεια E_k σωματιδίων μετά από k κύκλους;
 - Αν η πιθανότητα παραμονής σωματίου μετά από κάθε κύκλο είναι p , με $p = \text{σταθ.}$, πόσα σωματίια συνεχίζουν να επιταχύνονται μετά από k κύκλους (και άρα αποκτούν ενέργεια μεγαλύτερη από E_k); Συγκεκριμένα δείξτε ότι $N(> E) = N_0 (E/E_0)^{-s+1}$ με $s = 1 - \log_e p / \log_e \varepsilon$. Ποιος είναι ο εκθέτης του νόμου δύναμης του ενεργειακού φάσματος που παράγεται; Δείξτε ότι στο όριο $p \approx 1^-$, $\varepsilon \approx 1^+$ ο εκθέτης του νόμου δύναμης είναι $1 + (1 - p)/(\varepsilon - 1)$.
 - Έστω ότι η πιθανότητα παραμονής σωματίου μετά από κάθε κύκλο p δεν είναι σταθερή, αλλά μειώνεται όσο η ενέργεια αυξάνει. Θεωρούμε ότι η μείωση αυτή περιγράφεται από νόμο δύναμης, δηλ. ότι η πιθανότητα ένα σωματίο που έχει ήδη κάνει $k - 1$ κύκλους, να μείνει στην περιοχή της επιτάχυνσης εκτελώντας τον k κύκλο, δίδεται από τη σχέση $p_k = g/E_k^q$, όπου g και q

θετικές σταθερές. Δείξτε ότι $N(> E) = N_0 (E/E_0)^{-[s-1+r \log_e(E/E_0)]}$ με $s = 1 - q/2 - \log_e(g/E_0^q)/\log_e \varepsilon$, $r = q/(2 \log_e \varepsilon)$. Ποιό είναι το ενεργειακό φάσμα dN/dE σε αυτήν την περίπτωση; Σκεπτόμενοι ότι οι λογάριθμοι αλλάζουν πολύ αργά σε σχέση με τις δυνάμεις, απλοποιήστε την σχέση που δίνει το φάσμα και συμπεράνετε ότι το φάσμα είναι νόμος δύναμης με μεταβλητό εκθέτη.

(δ) Έστω ότι η πιθανότητα παραμονής σωματίου μένει σταθερή για μικρές τιμές της ενέργειας, $E \ll E_c$, ενώ μειώνεται για μεγαλύτερες τιμές. Αυτό μπορεί να περιγραφεί με τη σχέση $p_k = g/[1 + (E_k/E_c)^q]$. Συνδυάζοντας τις απαντήσεις στα (β), (γ) και χωρίς να κάνετε πράξεις, ποιό περιμένετε να είναι το φάσμα;

4. Έστω ένα μαγνητισμένο νέφος που κινείται με ταχύτητα \mathbf{V} . Αν το υλικό του νέφους παρουσιάζει άπειρη αγωγιμότητα ποιά η σχέση μεταξύ ηλεκτρικού (\mathbf{E}) και μαγνητικού (\mathbf{B}) πεδίου;

Φορτίο q κινείται με μη-σχετικιστική ταχύτητα \mathbf{w} στην περιοχή του νέφους.

Δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης γράφεται $\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{q}{m} \frac{\mathbf{w} - \mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B}$.

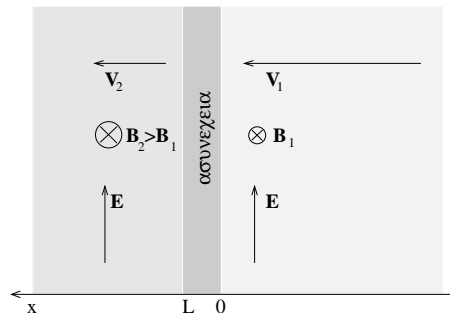
Δείξτε ότι ο ρυθμός αύξησης της ενέργειας του φορτίου ισούται με $\mathbf{V} \cdot q[(\mathbf{w}/c) \times \mathbf{B}]$, δηλ. σχετίζεται με το έργο της δύναμης που ασκεί το φορτίο στο νέφος.

Δείξτε ότι το προηγούμενο συμπέρασμα παραμένει ίδιο και στην περίπτωση σχετικιστικής κίνησης του φορτίου.

5. (Θέμα εξετάσεων Μαρτίου 2004 – 2.5 μονάδες)

(α) Περιγράψτε ποιοτικά την επιτάχυνση φορτισμένων σωματίων στην περίπτωση ολίσθησης πάνω σε επιφάνεια ασυνέχειας η οποία κινείται κάθετα σε μαγνητικό πεδίο.

(β) Έστω ότι το πάχος της ασυνέχειας είναι L και το μαγνητικό πεδίο αλλάζει μέσα σ' αυτήν σύμφωνα με τη σχέση $\frac{1}{B} = \frac{1}{B_1} - \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2}\right) \frac{x}{L}$. Δείξτε ότι η ενέργεια ενός σωματίου αυξάνει εκθετικά με χρόνο υπερδιπλασιασμού $t_a \log_e 2$, όπου $t_a = \frac{2L}{V_1(1 - B_1/B_2)}$.



Για την περίπτωση ισχυρής ασυνέχειας με $B_2/B_1 = 4$ και $L = 1$ pc, $V_1/c = 10^{-4}$, σε πόσο χρόνο ένα ηλεκτρόνιο θα αποκτήσει ενέργεια 10^{15} eV;

Υπόδειξη: Σκεφτείτε που οφείλεται η αύξηση της ενέργειας του σωματίου.

(γ) Αν ο μέσος χρόνος παραμονής των σωματίων στην περιοχή της ασυνέχειας είναι t_d (οπότε $N(t)dt \propto e^{-t/t_d} dt$) δείξτε ότι το πλήθος των σωματίων που φεύγοντας έχουν αποκτήσει ενέργεια από \mathcal{E} έως $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$ είναι

$$\propto \mathcal{E}^{-1-t_a/t_d} d\mathcal{E}.$$

Δίνεται $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$, $1 \text{ pc} = 3 \times 10^{18} \text{ cm}$ και ότι η αγωγιμότητα του υλικού είναι πρακτικά άπειρη. Επίσης η ολίσθηση «ηλεκτρικού πεδίου» $\mathbf{V}_E = c\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ και η ολίσθηση που προέρχεται από ανομοιογένεια μαγνητικού πεδίου $\mathbf{V}_{\nabla B} = -(cp_{\perp}^2/2qm\gamma B^3)\nabla B \times \mathbf{B}$.

6. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2004 – 2.5 μονάδες)
- (α) Ποια η διαφορά μεταξύ των μηχανισμών επιτάχυνσης Φέρμι πρώτης και δεύτερης τάξης;
- (β) Πως υλοποιείται ο μηχανισμός δεύτερης τάξης σύμφωνα με την αρχική ιδέα του Φέρμι και ποια είναι τα μειονεκτήματά του στο να εξηγήσει παρατηρήσεις;
- (γ) Περιγράψτε ποιοτικά πως υλοποιείται ο μηχανισμός επιτάχυνσης Φέρμι πρώτης τάξης σε ασυνέχειες ροής πλάσματος.
- (δ) Πλήθος σωματιδίων N_0 με αρχική ενέργεια E_0 επιταχύνεται σε ασυνέχεια ροής. Αν μετά κάθε κύκλο η ενέργεια ενός σωματίου αυξάνει κατά $\Delta E = nE$ με $n = \text{σταθ.}$, ποια η ενέργειά του μετά από k κύκλους; Αν η πιθανότητα διαφυγής σωματίου μετά από κάθε κύκλο είναι P , πόσα σωματίδια συνεχίζουν να επιταχύνονται μετά από k κύκλους; Ποιος είναι ο εκθέτης του νόμου δύναμης του ενεργειακού φάσματος που παράγεται; Δείξτε ότι στο όριο $P \ll 1$, $n \ll 1$ ο εκθέτης του νόμου δύναμης είναι $1 + P/n$.
7. (Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2005 – 2.0 μονάδες)
- Περιγράψτε την επιτάχυνση φορτίων στις μαγνητόσφαιρες των pulsars λόγω της ύπαρξης διαφορών δυναμικού πάνω στις καμπύλες δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου. Συγκεκριμένα βρείτε για τον παράγοντα Lorentz: τον ρυθμό αύξησής του λόγω επιτάχυνσης από το ηλεκτρικό πεδίο, τον ρυθμό μείωσής του λόγω ακτινοβολίας και την μέγιστη τιμή του. Δίδεται η σχέση Larmor για την ακτινοβολία από ένα φορτίο q : $P = (2q^2/3c)\gamma^6 [(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2]$.
8. (Θέμα εξετάσεων Μαΐου 2005 (επί πτυχίω) – 2.5 μονάδες)
- (α) Περιγράψτε την επιτάχυνση σωματιδίων στις μαγνητόσφαιρες των pulsars όπου το μαγνητικό πεδίο έχει δυναμικές γραμμές με ακτίνα καμπυλότητας \mathcal{R} και υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο E παράλληλα στις δυναμικές γραμμές του \mathbf{B} . Ποιά η μέγιστη τιμή του παράγοντα Lorentz που αποκτούν τα σωματίδια;
- (β) Έστω ότι οι δυναμικές γραμμές του \mathbf{B} είναι **ακτινικές** (οπότε $\mathcal{R} = \infty$). Αφού σκεφτείτε σε ποιο μηχανισμό ακτινοβολίας οφείλονται τώρα οι απώλειες, γράψτε την διαφορική εξίσωση για τον παράγοντα Lorentz και βρείτε την μέγιστη τιμή του. (Δίδεται η σχέση Larmor για την ακτινοβολία από ένα φορτίο q : $P = (2q^2/3c)\gamma^6 [(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2]$.)
9. (Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2006 – 2.5 μονάδες)
- Στη γειτονιά μιας μελανής οπής με μάζα $M = M_8 \times 10^8 M_{\odot}$ και σε αποστάσεις $r = r_{1RS}$ (όπου $r_S = 2GM/c^2$ η ακτίνα Schwarzschild), το υλικό του

δίσκου προσαύξησης περιστρέφεται Κεπλεριανά.

(α) Αν στην περιοχή αυτή υπάρχει μαγνητικό πεδίο $B_4 \times 10^4 \text{G}$, ποιό το ηλεκτρικό πεδίο;

(β) Ποιά η μέγιστη ενέργεια $\gamma_{\max} mc^2$ που αποκτούν σωμάτια φορτίου $q = q_1 e$ και μάζας $m = m_1 m_p$ σ' αυτή την περιοχή αν η ακτίνα καμπυλότητας του πεδίου \mathbf{B} είναι $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 r$; Εξαρτάται το αποτέλεσμα από τη μάζα του σωματίου;

(γ) Δείξτε ότι ο χρόνος που απαιτείται για την επιτάχυνση σε γ_{\max} είναι $\sim \gamma_{\max} mc/qE$ και υπολογίστε τον στην περίπτωση ενός πρωτονίου όταν $r_1 = \mathcal{R}_1 = B_4 = M_8 = 1$.

(δ) Για δεδομένα $r_1 = \mathcal{R}_1 = B_4 = M_8 = 1$, πώς θα μπορούσαμε να πάρουμε σωμάτια με ενέργεια 10^{20}eV ; Πόσος χρόνος θα χρειαζόταν γ' αυτή την επιτάχυνση και πόση απόσταση διανύει το φορτίο σε αυτό το χρόνο; Συγκρίνετε αυτή την απόσταση με την ακτίνα Schwarzschild και συμπεράνετε αν είναι καλή προσέγγιση να θεωρούμε το πεδίο \mathbf{E} σταθερό.

Δίδεται η σχέση Larmor για την ακτινοβολία από ένα φορτίο q : $P = (2q^2/3c)\gamma^6 [(\dot{\beta})^2 - (\beta \times \dot{\beta})^2]$. Επίσης $e = 4.8 \times 10^{-10} \text{ esu}$, $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$, $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$, $M_{\odot} = 2 \times 10^{33} \text{g}$, $m_p = 1.67 \times 10^{-24} \text{g}$, $1 \text{eV} = 1.6 \times 10^{-12} \text{ ergs}$.

10. (Θέμα εξετάσεων Μαΐου 2006 (επί πτυχίω) – 2.5 μονάδες)

Πλήθος σωματιών N_0 με αρχική ενέργεια E_0 επιταχύνεται σε ωστικό κύμα. Θεωρούμε ότι μετά κάθε κύκλο η ενέργεια ενός σωματίου γίνεται ε επί την ενέργεια που είχε στην αρχή του κύκλου, με $\varepsilon = \text{σταθερά}$ (μεγαλύτερη της μονάδας).

(α) Ποια η ενέργεια E_k σωματιών μετά από k κύκλους;

(β) Αν η πιθανότητα παραμονής σωματίου μετά από κάθε κύκλο είναι p , με $p = \text{σταθ.}$, πόσα σωμάτια συνεχίζουν να επιταχύνονται μετά από k κύκλους (και άρα αποκτούν ενέργεια μεγαλύτερη από E_k); Συγκεκριμένα δείξτε ότι $N(> E) = N_0 (E/E_0)^{-s+1}$ με $s = 1 - \log_e p / \log_e \varepsilon$. Ποιος είναι ο εκθέτης του νόμου δύναμης του ενεργειακού φάσματος που παράγεται; Δείξτε ότι στο όριο $p \approx 1^-$, $\varepsilon \approx 1^+$ ο εκθέτης είναι $1 + (1 - p)/(\varepsilon - 1)$.

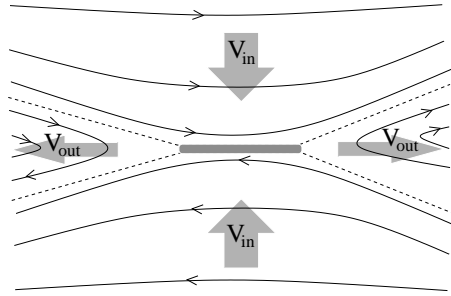
(γ) Σε ένα ωστικό κύμα επιταχύνονται ηλεκτρόνια. Θεωρείστε γνωστό ότι ο χρόνος που χρειάζεται ένα ηλεκτρόνιο για να αποκτήσει ενέργεια E είναι $t_{\text{acc}} = 4c\eta E/3V_{\text{sh}}^2 eB$, όπου V_{sh} η ταχύτητα του ωστικού κύματος, B το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή επιτάχυνσης και η μια σταθερά. Λαμβάνοντας υπόψη την ακτινοβολία synchrotron (αφού τα ηλεκτρόνια βρίσκονται μέσα σε μαγνητικό πεδίο ακτινοβολούν), υπολογίστε την μέγιστη ενέργεια E_{max} που μπορούν να αποκτήσουν. Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα το πόσος χρόνος απαιτείται για να ακτινοβολήσει ένα ηλεκτρόνιο όλη του την ενέργεια, χρησιμοποιώντας την σχέση $\dot{E}_{\text{syn}} = (4/3)\sigma_{\text{T}} c U_B (E/mc^2)^2$.

Γνωρίζοντας ότι ηλεκτρόνια ενέργειας E εκπέμπουν φωτόνια ενέργειας $h\nu_{\text{syn}} = mc^2 (E/mc^2)^2 (B/B_{\text{cr}})$, όπου $B_{\text{cr}} = 2\pi m^2 c^3 / eh$, ποιά η μέγιστη συχνότητα του φάσματος που εκπέμπεται;

11. (Θέμα εξετάσεων Ιουλίου 2007 (επί πτυχίω) – 2.5 μονάδες)

(α) Η επιτάχυνση Fermi δεύτερης τάξης οδηγεί σε ενεργειακό φάσμα $\propto E^{-1-t_a/t_d}dE$, όπου $t_a = 3cL/4V_s^2$. Ποιό το μηχανικό της ανάλογο και τι σημαίνουν τα διάφορα σύμβολα των προηγούμενων σχέσεων; Μπορούν να επιταχυνθούν ουδέτερα σωματάρια με αυτόν το μηχανισμό; Ποιάρ τα μειονεκτήματα του μηχανισμού αυτού; Ποιάρ η βελτιωμένη έκδοση του μηχανισμού Fermi; (Αναφέρατε μόνο το μηχανικό της ανάλογο.)

(β) Μια πιθανή υλοποίηση της επιτάχυνσης Fermi πρώτης τάξης μπορεί να λαμβάνει χώρα σε περιοχές μαγνητικής επανασύνδεσης (magnetic reconnection). Στο φαινόμενο αυτό, δυο μέρη μαγνητισμένου πλάσματος – με μαγνητικό πεδίο αντίθετης φοράς – κινούνται το ένα προς το άλλο με ταχύτητα υποβάθρου V_{in} .



Στο σχήμα τα δυο αυτά μέρη είναι το πάνω και το κάτω. Η επανασύνδεση συμβαίνει μέσα στην κεντρική περιοχή (κεντρικό σκιασμένο ορθογώνιο στο σχήμα) και το πλάσμα εξέρχεται από τις μικρότερες πλευρές του ορθογώνιου (δεξιά και αριστερά στο σχήμα) με ταχύτητα υποβάθρου V_{out} . Ένα σχετικιστικό σωματάρια που βρίσκεται στο πάνω μέρος και κινείται προς το κάτω, βλέπει το κάτω μέρος σαν ένα νέφος που πλησιάζει. Κατά συνέπεια μετά την ανάκλαση από αυτό θα κερδίσει ενέργεια. Στη συνέχεια, όντας μέσα στο κάτω μέρος, θα βλέπει το πάνω μέρος σαν ένα νέφος που επίσης πλησιάζει, κερδίζοντας ξανά ενέργεια μετά την ανάκλαση. Οι de Gouveia dal Pino & Lazarian (2005, A&A, 441, 845) υπολόγισαν ότι μετά κάθε κύκλο το σωματάρια κερδίζει ενέργεια $\Delta E = (8/3)(V_{in}/c)E$, όπου E η ενέργεια στην έναρξη του κύκλου, ενώ η πιθανότητα διαφυγής του σωματιού από την περιοχή επανασύνδεσης σε κάθε κύκλο είναι $4(V_{in}/c)$.

Ποιός ο εκθέτης του παραγόμενου ενεργειακού φάσματος; Ποιάρ η προσεγγιστική του τιμή αν $V_{in} \ll c$;

12. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2007 – 2.5 μονάδες)

(α) Πλήθος σωματιών N_0 με αρχική ενέργεια E_0 επιταχύνεται σε ωστικό κύμα. Μετά κάθε κύκλο η ενέργεια ενός σωματιού γίνεται ε επί την ενέργεια που είχε στην αρχή του κύκλου, με $\varepsilon = 1 + (4/3)(1 - 1/r)(V_s/c)$, όπου V_s η ταχύτητα του ωστικού κύματος και r ο λόγος συμπίεσης. Για ισχυρά ωστικά κύματα (στα οποία η ταχύτητα V_s είναι πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα διάδοσης κυμάτων μέσα στο ρευστό), ο λόγος συμπίεσης είναι $r = (\Gamma + 1)/(\Gamma - 1)$, όπου Γ ο πολυτροπικός δείκτης ($\Gamma = 1 + 2/f$, όπου f το πλήθος των βαθμών ελευθερίας). Η πιθανότητα παραμονής σωματιού μετά από κάθε κύκλο είναι $p = 1 - (4/r)(V_s/c)$. Δείξτε ότι το πλήθος των σωματιών που αποκτούν ενέργεια μεγαλύτερη από E είναι $N(> E) = N_0 (E/E_0)^{-s+1}$ με $s = 1 - \log_e p / \log_e \varepsilon$. Ποιος είναι ο εκθέτης του νόμου δύναμης του ενεργειακού φάσματος που παράγεται; Ποιάρ η προσεγγιστική

τιμή του σαν συνάρτηση του Γ , αν $V_s \ll c$;

(β) Το ωστικό κύμα ενός υπερκαινοφανούς κινείται με ταχύτητα $v_s = 10^4 \text{ km s}^{-1}$ μέσα στο μεσοαστρικό χώρο, για τον οποίο υποθέτουμε πυκνότητα ένα άτομο υδρογόνου ανά cm^3 , θερμοκρασία $T = 10^4 \text{ K}$ και μαγνητικό πεδίο $B = 3 \mu\text{G}$. Μπορεί να θεωρηθεί το ωστικό κύμα ισχυρό; (Λάβετε υπόψη τα κύματα ήχου με ταχύτητα $c_s = \sqrt{\Gamma P/\rho}$ και τα κύματα Alfvén με ταχύτητα $v_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$.) Ποιός ο εκθέτης του ενεργειακού φάσματος των κοσμικών ακτίνων που προέρχονται από τον υπερκαινοφανή; (Θεωρείστε μονατομικό αέριο.)

Δίνεται η μάζα του πρωτονίου $1/(6.023 \times 10^{23}) \text{ g}$, και η σταθερά του Boltzmann $k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{ (cgs)}$.

13. (Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2008 – 2.5 μονάδες)

(α) Πού οφείλονται οι ελαστικές ανακλάσεις που είναι απαραίτητες για την υλοποίηση του μηχανισμού επιτάχυνσης τύπου Φέρμι;

Πως συνδέεται η έκταση στην οποία αλλάζει φορά η ταχύτητα με την ενέργεια των σωματιών \mathcal{E} και το μαγνητικό πεδίο B ; Δείξτε ότι αν το μέγεθος της περιοχής επιτάχυνσης είναι R η μέγιστη ενέργεια που μπορεί να αποκτήσει ένα ιόν με φορτίο Ze είναι

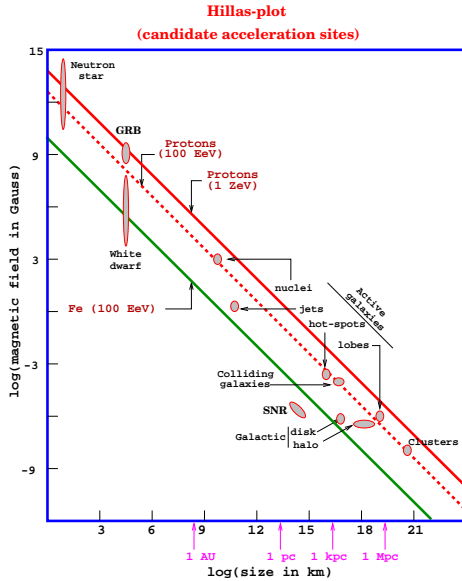
$$\mathcal{E}_{\text{max}} = Z \left(\frac{R}{\text{kpc}} \right) \left(\frac{B}{10^{-6} \text{G}} \right) \times 10^{18} \text{eV}.$$

Έτσι προκύπτει το διάγραμμα του Hillas (Hillas, A. M. 1984, ARA&A, 22, 425), στο οποίο φαίνονται οι πιθανοί τόποι επιτάχυνσης σε δεδομένη ενέργεια \mathcal{E} .

Μέχρι ποιάς ενέργειας πρωτόνια μπορούν να επιταχυνθούν σε υπολείμματα υπερκαινοφανών (SNR);

Δίδονται $1 \text{ pc} = 3 \times 10^{18} \text{ cm}$, $e = 4.8 \times 10^{-10} \text{ cgs}$, $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-12} \text{ ergs}$.

(β) Δείξτε ότι και στην περίπτωση που ένα φορτίο Ze επιταχύνεται από ηλεκτρικό πεδίο σε μαγνητόσφαιρα κάποιου αστρικού αντικειμένου η μέγιστη ενέργεια δίνεται από μια παρόμοια σχέση $\mathcal{E}_{\text{max}} = Z \left(\frac{R}{\text{kpc}} \right) \left(\frac{B}{10^{-6} \text{G}} \right) \left(\frac{R\Omega}{c} \right) \times 10^{18} \text{eV}$, όπου R η ακτίνα και Ω η γωνιακή ταχύτητα του αντικειμένου. (Θεωρείστε ότι και η μαγνητόσφαιρα έχει ίδια διάσταση R .)



14. (Θέμα εξετάσεων Μαΐου 2008 (επί πτυχίω) – 2.5 μονάδες)

(α) Περιγράψτε την επιτάχυνση σωματιών σε υψηλές ενέργειες από μεταβολές δυναμικού στη μαγνητόσφαιρα αστέρων νετρονίων. Ποιός ο ρυθμός αύξησης του παράγοντα Lorentz; Υπολογίστε τον αριθμητικά για ηλεκτρό-

για ($m_e = 9.1 \times 10^{-28} \text{g}$, $e = 4.8 \times 10^{-10} \text{cgs}$), που επιταχύνονται σε αστέρα με $R = 10^6 \text{cm}$, $B = 10^{12} \text{G}$ και $\Omega = 200 \text{rad s}^{-1}$.

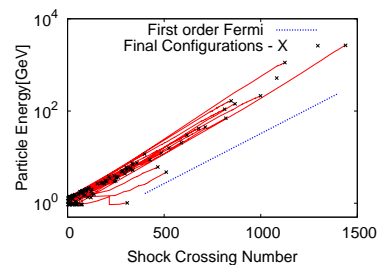
(β) Μέχρι τότε συνεχίζεται η αύξηση του παράγοντα Lorentz; Αναφέρατε τρεις λόγους που μπορούν να σταματήσουν την επιτάχυνση και σχολιάστε ποιός είναι ο κυρίαρχος και γιατί. Ποιά η μέγιστη τιμή του παράγοντα Lorentz;

Δίνεται $P = (2q^2/3c)\gamma^6 [(\dot{\beta})^2 - (\beta \times \dot{\beta})^2]$ και $c = 3 \times 10^{10} \text{cm s}^{-1}$.

15. (Θέμα εξετάσεων Μαρτίου 2009 (επί πτυχίω) – 2.5 μονάδες)

(α) Περιγράψτε περιληπτικά την επιτάχυνση Fermi σε μια ισχυρή ασυνέχεια ροής. Έστω αρχικά έχουμε πρωτόνια με θερμική κατανομή θερμοκρασίας $T \ll m_p c^2/k_B$. Ποιά η ενέργεια κάθε σωματίου μετά από n περάσματα από την ασυνέχεια (δηλ. $n/2$ κύκλους);

(β) Οι Muranushi, T. & Inutsuka, S. (2009, *ApJ*, 691, L24) προσομοίωσαν την επιτάχυνση πρωτονίων σε ένα ωστικό κύμα. Δίπλα βλέπετε την ενέργεια των σωματιδίων συναρτήσει του αριθμού περασμάτων από την ασυνέχεια. Οι γραμμές δείχνουν την πορεία κάθε σωματίου, ενώ η εστιγμένη γραμμή δείχνει τη μέση κλίση των γραμμών αυτών.



Συμφωνούν τα αποτελέσματα αυτά με τη θεωρία της επιτάχυνσης Fermi; Τι μπορούμε να βρούμε από την κλίση της εστιγμένης γραμμής; (Δώστε το σχετικό αποτέλεσμα.)

16. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2009 – 2 μονάδες)

(α) Σε ποιά από τις γνωστές μορφές δύναμης στη φύση οφείλεται η επιτάχυνση Fermi;

(β) Ποιό το μηχανικό ανάλογο της δεύτερης τάξης επιτάχυνσης Fermi;

(γ) Μπορεί η δεύτερης τάξης επιτάχυνση Fermi να εξηγήσει το φάσμα των κοσμικών ακτίνων;

17. (Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2010 – 3 μονάδες)

Ηλεκτρόνια επιταχύνονται στις μαγνητόσφαιρες των pulsars λόγω της ύπαρξης ηλεκτρικού πεδίου με μη-μηδενική συνιστώσα E_{\parallel} πάνω στην ταχύτητα των φορτίων $c\beta$ (με $\beta \approx 1$). Θεωρούμε ότι η επιτάχυνση λαμβάνει χώρα τοπικά, δηλ. οι τιμές του ηλεκτρικού πεδίου (E_{\parallel}), του μαγνητικού πεδίου B και της καμπυλότητας \mathcal{R} των δυναμικών γραμμών του πεδίου \mathbf{B} παραμένουν πρακτικά σταθερές όσο το φορτίο επιταχύνεται.

(α) Υπολογίστε το χρόνο $t_a = \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_a^{-1}$ στον οποίο ο παράγοντας Lorentz κάποιου ηλεκτρονίου γίνεται γ .

(β) Λόγω του μαγνητικού πεδίου το ηλεκτρόνιο επιταχύνεται – και άρα ακτινοβολεί – με δυο τρόπους:

(β₁) Ακτινοβολία καμπυλότητας δημιουργείται αν το ηλεκτρόνιο κινείται κυρίως κατά μήκος του \mathbf{B} , λόγω της καμπυλότητας της τροχιάς \mathcal{R} . Αν ο πα-

ράγοντας Lorentz του φορτίου είναι γ , υπολογίστε το χρόνο $t_c = \gamma \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|_c^{-1}$ στον οποίο ακτινοβολείται όλη η ενέργεια του φορτίου μέσω της ακτινοβολίας καμπυλότητας. Δίδεται ο ρυθμός ελάττωσης της ενέργειας φορτίου e που ακτινοβολεί λόγω επιτάχυνσης $c\dot{\beta}$: $(2e^2/3c)\gamma^6 [(\dot{\beta})^2 - (\beta \times \dot{\beta})^2]$ (σχέση Larmor).

(β₂) Ακτινοβολία σύγχροτρον δημιουργείται λόγω της ταχύτητας $c\beta_{\perp}$ κάθετα στο μαγνητικό πεδίο. Υπολογίστε το χρόνο t_s στον οποίο το φορτίο χάνει όλη την ενέργειά του (γmc^2) λόγω ακτινοβολίας σύγχροτρον. Δίδεται για την κίνηση ηλεκτρονίου σε μαγνητικό πεδίο $\dot{\beta} = \frac{eB\beta_{\perp}}{m\gamma c} \times \mathbf{B}$, με μέτρο $\dot{\beta} = \frac{eB\beta_{\perp}}{m\gamma c}$.

(γ) Στις μαγνητόσφαιρες, η επιτάχυνση λόγω ηλεκτρικού πεδίου δημιουργεί κίνηση κυρίως κατά μήκος του πεδίου \mathbf{B} , οπότε η κυρίαρχη επιτάχυνση οφείλεται στην καμπυλότητα \mathcal{R} . Αν $B = 10^6$ G, $E_{\parallel} = B$, $\mathcal{R} = 10^8$ cm (δίνονται επίσης $e = -4.8 \times 10^{-10}$, $m = 9.1 \times 10^{-28}$, $c = 3 \times 10^{10}$, όλα σε μονάδες cgs), βρείτε τους χρόνους t_a και t_c σαν συναρτήσεις του παράγοντα Lorentz γ και σχεδιάστε τους σε διάγραμμα $\log_{10} \gamma - \log_{10} t$. Με τη βοήθεια του διαγράμματος αυτού βρείτε το μέγιστο παράγοντα Lorentz και το χρόνο επιτάχυνσης. Είναι δικαιολογημένη η υπόθεση της τοπικής επιτάχυνσης;

(δ) Πόση πρέπει να είναι το πολύ η συνιστώσα της ταχύτητας κάθετα στο μαγνητικό πεδίο $c\beta_{\perp}$ ώστε οι απώλειες σύγχροτρον να είναι πράγματι αμελητέες; (Το ερώτημα αφορά μαγνητόσφαιρα με τα χαρακτηριστικά του προηγούμενου ερωτήματος.)

Βιβλιογραφία:

- Longair, M. S., High Energy Astrophysics, vol 2
- Choudhuri, A. R., The Physics of Fluids and Plasmas, an introduction for astrophysicists
- Chiuderi, C., & Einaudi, G. (eds.), Plasma Astrophysics
- Jackson, J. D., Classical Electrodynamics

Κεφάλαιο 2

Σχετικιστική ιδεατή μαγνητοϋδροδυναμική

2.1 Εισαγωγή

Το φαινόμενο των εκροών από αστρικά αντικείμενα - άστρα και γαλαξίες - είναι γενικό. Κάθε κοσμικό αντικείμενο χάνει μάζα με μορφή ανέμου και μαζί μ' αυτόν στροφορμή.

Οι πιο πολλές από τις εκροές έχουν την μορφή πίδακα πλάσματος, εστιασμένης εκροής που εκτείνεται σε πολύ μεγάλες αποστάσεις από το κεντρικό σώμα, τα jets. Ειδικά θα μας απασχολήσουν σχετικιστικές εκροές, οι οποίες είναι πλέον κοινά αποδεκτό ότι υπάρχουν σε περιβάλλοντα συμπαγών σωμάτων, όπως μελανές σπές και αστέρες νετρονίων. Η παρουσίαση αυτών των φαινομένων όπως προκύπτει από τις παρατηρήσεις, καθώς και οι ενδείξεις για σχετικιστική κίνηση και ύπαρξη ισχυρών μαγνητικών πεδίων θα γίνει αργότερα. Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε το πως μπορούμε να περιγράψουμε γενικά μία μαγνητισμένη εκροή.

Μιλώντας για ταχύτητα ή επιτάχυνση της ροής εννοούμε την ταχύτητα ή επιτάχυνση υποβάθρου που αφορά το κέντρο μάζας της και καθορίζεται από τη δυναμική. Οι μεμονωμένες κινήσεις σωματίων στο κινούμενο μαζί με τη ροή σύστημα αναφοράς είναι κάτι διαφορετικό: τις κινήσεις αυτές τις λαμβάνουμε υπόψη μέσω των θερμοδυναμικών μεγεθών εσωτερική ενέργεια και θερμοκρασία.

Επίσης θα μελετήσουμε μόνο ομαλές ροές οι οποίες δεν περιέχουν ασυνέχειες. Οι τελευταίες προκύπτουν όταν μια ομαλή ροή διαταραχθεί (π.χ. λόγω αλληλεπίδρασης με το μεσοαστρικό χώρο).

2.2 Οι εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής

Μια μαγνητισμένη ροή πλάσματος περιγράφεται από:

- Την ταχύτητα της ροής \mathbf{V} (ταχύτητα υποβάθρου). Επίσης ορίζουμε τον παράγοντα Λόρεντζ σαν $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Στην πραγματικότητα οι πλη-

θυσμοί θετικών και αρνητικών φορτίων κινούνται με ελάχιστα διαφορετικές ταχύτητες \mathbf{V}_+ και \mathbf{V}_- , οι οποίες είναι πολύ κοντά στην ταχύτητα του κέντρου μάζας \mathbf{V} .

- Την πυκνότητα μάζας της εκροής. Αν ρ_0 είναι η πυκνότητα στο σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα \mathbf{V} (δηλ. σε κάποια χρονική στιγμή και σε κάποιο σημείο του χώρου είναι «στερεωμένο» πάνω στην ροή), τότε στο σύστημα του εργαστηρίου η πυκνότητα είναι $\gamma\rho_0$ (λόγω συστολής του μήκους στην διεύθυνση της \mathbf{V}).
- Το μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} και το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} , όπως τα μετρούμε στο σύστημα αναφοράς του κεντρικού αντικειμένου. Το σύστημα αναφοράς αυτό θα το λέμε και σύστημα εργαστηρίου.
- Την πυκνότητα ρεύματος \mathbf{J} και την πυκνότητα φορτίου J^0/c , όπως τα μετρούμε στο σύστημα εργαστηρίου. Αν το πλάσμα αποτελείται από θετικά και αρνητικά φορτία με αριθμητικές πυκνότητες γ_+n_+ , γ_-n_- αντίστοιχα, τότε η πυκνότητα φορτίου είναι $J^0/c = \gamma_+n_+q_+ + \gamma_-n_-q_-$, ενώ η πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{J} = \gamma_+n_+q_+\mathbf{V}_+ + \gamma_-n_-q_-\mathbf{V}_-$. Στα παραπάνω συμβολίζουμε με q_+ και q_- το φορτίο των θετικών και αρνητικών σωματίων αντίστοιχα, που συνήθως είναι ίσο με το ηλεκτρονιακό φορτίο ($q_+ = e$, $q_- = -e$).
- Τις θερμοδυναμικές ποσότητες πίεση P , εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας e και θερμοκρασία T , όπως μετρούνται στο σύστημα αναφοράς της ροής.

Οι παραπάνω φυσικές ποσότητες συνδέονται μεταξύ τους με νόμους που περιγράφονται στην συνέχεια.

2.2.1 Οι εξισώσεις του Μάξουελ

Το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο συνδέονται με την πυκνότητα ρεύματος και φορτίου σύμφωνα με τις τέσσερις εξισώσεις του Μάξουελ. Συγκεκριμένα:

- Η εξίσωση που περιγράφει την ανυπαρξία μαγνητικών μονοπόλων

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.1)$$

- Η εξίσωση Γκάους

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} J^0. \quad (2.2)$$

- Η εξίσωση Αμπέρ

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (2.3)$$

- Η εξίσωση Φαραντέι

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Πρέπει να τονιστεί ότι λόγω της κίνησης της ροής, οι κινήσεις των φορτίων συνεπάγονται την ύπαρξη πυκνότητας ρεύματος και φορτίου. Δεν είναι σωστό όμως να θεωρούμε αυτές τις πυκνότητες υπεύθυνες για την δημιουργία των πεδίων \mathbf{E} και \mathbf{B} . Στην πραγματικότητα μάλλον το αντίθετο συμβαίνει: υπάρχουν άφθονα φορτία μέσα στη ροή και η ύπαρξη των πεδίων τα κινεί ώστε να «δημιουργήσουν» \mathbf{J} και \mathbf{J}^0/c . Σε κάθε περίπτωση, ασφαλέστερο είναι να θεωρούμε απλά ότι τα \mathbf{E} και \mathbf{B} συνυπάρχουν με κάποια \mathbf{J} και \mathbf{J}^0/c .

2.2.2 Νόμος $\Omega\mu$

Ο νόμος του $\Omega\mu$ συνδέει την πυκνότητα ρεύματος με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μέσω της ειδικής αγωγιμότητας $\mathbf{E}_{co} = \mathbf{J}_{co}/\sigma_e$, όπου \mathbf{E}_{co} το ηλεκτρικό πεδίο και \mathbf{J}_{co} η πυκνότητα ρεύματος στο σύστημα αναφοράς που κινείται με το ρευστό. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η αγωγιμότητα των ρευστών που μελετούμε είναι τόσο υψηλή (σε σχέση με τις χρονικές κλίμακες που εξετάζουμε), ώστε να ισχύει $\mathbf{E}_{co} = 0$. Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Λόρεντζ του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου¹ βρίσκουμε

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B}. \quad (2.5)$$

2.2.3 Θερμοδυναμικές σχέσεις

Θερμοκρασία

Θεωρώντας ιδανικό αέριο, ιστροπικό στο σύστημα της ροής, η θερμοκρασία είναι μια γνωστή συνάρτηση της πίεσης και της πυκνότητας. Συγκεκριμένα, $P = (n_+ + n_-)k_B T$. Αν έχουμε ηλεκτρόνια-πρωτόνια (ep πλάσμα) τότε $n_+ + n_- \approx 2\rho_0/m_p$, ενώ αν έχουμε ηλεκτρόνια-ποζιτρόνια (e^\pm πλάσμα), $n_+ + n_- = \rho_0/m_e$.

Εσωτερική ενέργεια

Σύμφωνα με την κινητική θεωρία των αερίων, αν έχουμε ένα αέριο με f βαθμούς ελευθερίας ($f = 3$ για μονατομικό αέριο), η εσωτερική ενέργεια για κάθε σωματίο είναι $(f/2)k_B T$. Έτσι, η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας είναι $e = (f/2)(P/\rho_0)$. Ορίζοντας τον πολυτροπικό δείκτη σαν $\Gamma = 1 + 2/f$ έχουμε

$$e = \frac{1}{\Gamma - 1} \frac{P}{\rho_0}. \quad (2.6)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει για μη σχετικιστικές θερμικές κινήσεις (δηλ. όταν η ταχύτητα κάθε σωματίου στο σύστημα της ροής είναι $\ll c$), όπου $mc^2 \gg k_B T$. Σε σχετικιστικές θερμοκρασίες $k_B T \gg mc^2$, οπότε η ενέργεια κάθε σωματίου είναι ανάλογη της ορμής του $\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \approx pc$, ένα μονατομικό αέριο συμπεριφέρεται σαν αέριο φωτονίων με $e = 3P/\rho_0$. Βλέπουμε ότι η σχέση (2.6) εξακολουθεί να ισχύει, αυτή τη φορά όμως με $\Gamma = 4/3$ (αυτή η τιμή του Γ δεν σχετίζεται με βαθμούς ελευθερίας).

¹ $\mathbf{E}_{co} = \gamma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} \right) - (\gamma - 1) \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{V}}{V} \right) \frac{\mathbf{V}}{V}$

Ενθαλπία

Είναι χρήσιμο να ορίσουμε την ενθαλπία ανά μονάδα μάζας, διαιρούμενη με c^2 ώστε να γίνει αδιάστατη. Αφού η ενθαλπία είναι το άθροισμα της ενέργειας ηρεμίας, της εσωτερικής ενέργειας και του γινομένου πίεση επί όγκο, το μέγεθος αυτό είναι $\xi = 1 + (e + P/\rho_0)/c^2$, ή

$$\xi = 1 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{P}{\rho_0 c^2}. \quad (2.7)$$

Όταν οι θερμοκρασίες είναι μη σχετικιστικές ο λόγος $P/\rho_0 c^2 \propto k_B T/mc^2 \ll 1$, και άρα $\xi \approx 1$.

Πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής

Μια ποσότητα του αερίου μάζας δm καταλαμβάνει όγκο $\delta m/\rho_0$ στο σύστημα ηρεμίας του. Αν η θερμότητα που παρέχεται σ' αυτή τη μάζα είναι δQ , τότε ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής (ο οποίος εκφράζει την διατήρηση της ενέργειας) γράφεται $d(e\delta m) = d(\delta Q) - Pd(\delta m/\rho_0)$. Σε περίπτωση αδιαβατικής μεταβολής $\delta Q = 0$ και έχουμε $de = -Pd(1/\rho_0)$, ή $de/dt = -Pd(1/\rho_0)/dt$. Η μεταβολή κάθε φυσικής ποσότητας που αφορά το ρευστό οφείλεται σε δύο παράγοντες: (1) στην τυχοϋσα άμεση χρονοεξάρτηση των ποσοτήτων και (2) στην κίνηση του ρευστού. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται σαν

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla,$$

και μπορεί να ιδωθεί ότι προκύπτει από το γεγονός ότι για κάθε συνάρτηση Φ των (t, \mathbf{r}) είναι

$$\frac{d\Phi(t, \mathbf{r})}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t + \Delta t, \mathbf{r} + \mathbf{V}\Delta t) - \Phi(t, \mathbf{r})}{\Delta t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \Phi.$$

Έτσι, ο πρώτος νόμος γράφεται

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) e = -P \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right).$$

Χρησιμοποιώντας την εξ. (2.6), προκύπτει η πολυτροπική σχέση

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \left(\frac{P}{\rho_0^\Gamma} \right) = 0, \quad (2.8)$$

που δείχνει ότι η ποσότητα P/ρ_0^Γ πρέπει να μένει αμετάβλητη καθώς το πλάσμα κινείται.

2.2.4 Εξίσωση συνέχειας

Έστω ένας όγκος δt ο οποίος περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια S . Αν δm είναι η μάζα του αερίου που υπάρχει σ' αυτό τον όγκο, τότε $-d(\delta m)/dt =$

$-\partial(\delta m)/\partial t$ είναι ο ρυθμός ελάττωσης της μάζας μέσα στον όγκο $\delta\tau$. Λόγω διατήρησης της μάζας, αυτός ο ρυθμός ελάττωσης ισούται με την ροή μάζας η οποία περνά την επιφάνεια S , η οποία είναι $\oint (\gamma\rho_0)\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot (\gamma\rho_0\mathbf{V})d\tau$, όπου $\gamma\rho_0$ είναι η πυκνότητα μάζας στο σύστημα του εργαστηρίου. Γράφοντας $\delta m = \int \gamma\rho_0 d\tau$ και εξισώνοντας τις δυο εκφράσεις έχουμε τελικά

$$\frac{\partial(\gamma\rho_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma\rho_0\mathbf{V}) = 0. \quad (2.9)$$

2.2.5 Εξίσωση ορμής

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο ρευστό ανά μονάδα του όγκου του είναι:

- κλίση της πίεσης $-\nabla P$,
- από το ηλεκτρικό πεδίο $(\gamma_+n_+q_+ + \gamma_-n_-q_-)\mathbf{E} = (J^0/c)\mathbf{E}$,
- από το μαγνητικό πεδίο $(\gamma_+n_+\mathbf{V}_+/c + \gamma_-n_-\mathbf{V}_-/c) \times \mathbf{B} = (1/c)\mathbf{J} \times \mathbf{B}$.

Στην περίπτωση μη σχετικιστικών θερμοκρασιών, το άθροισμα αυτών των δυνάμεων (μαζί με τυχόν άλλες εξωτερικές δυνάμεις) θα έδινε το αναμενόμενο $\gamma\rho_0 d(\gamma\mathbf{V})/dt = \gamma\rho_0(\partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla)(\gamma\mathbf{V})$. Ο γενικός τύπος είναι λίγο διαφορετικός:² το άθροισμα προκύπτει να είναι $\gamma\rho_0 d(\xi\gamma\mathbf{V})/dt = \gamma\rho_0(\partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla)(\xi\gamma\mathbf{V})$, οπότε η εξίσωση ορμής είναι

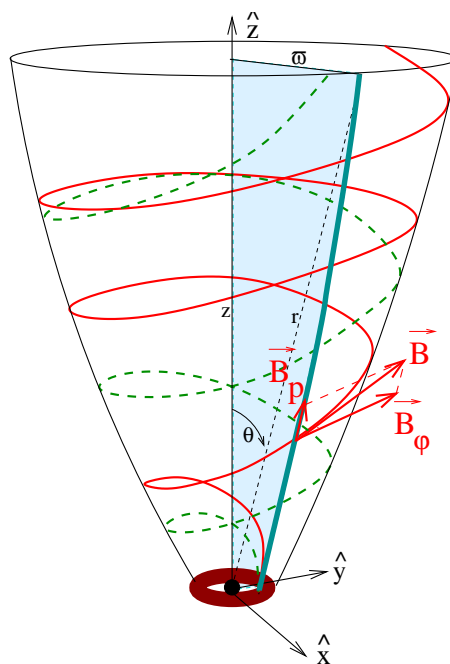
$$\gamma\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) (\xi\gamma\mathbf{V}) = -\nabla P + \frac{J^0\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c}. \quad (2.10)$$

2.3 Αξισυμμετρικές στάσιμες εκροές

Αφού οι εκροές που θα μας απασχολήσουν προέρχονται από περιστρεφόμενα κοσμικά αντικείμενα, μια πρώτη απλούστευση γίνεται αν υποθέσουμε αξισυμμετρία. Δηλ. σε σφαιρικές (r, θ, ϕ) ή κυλινδρικές (z, ϖ, ϕ) συντεταγμένες, με τον άξονα z άξονα περιστροφής, ισχύει $\partial/\partial\phi = 0$. Επίσης, όταν μελετούμε τις ροές σε χρονικές κλίμακες πολύ μικρότερες από αυτές που χρειάζονται για να αλλάξουν εντελώς μορφή, μπορούμε να υποθέσουμε χρονοανεξαρτησία $\partial/\partial t = 0$. Τότε, όλες οι άγνωστες ποσότητες εξαρτώνται από ένα ζευγάρι μεταβλητών, των (z, ϖ) ή (r, θ) ανάλογα με την επιλογή συντεταγμένων.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, σ' αυτή την περίπτωση το πρόβλημα σχετικά απλουστεύεται, διότι είναι δυνατή η μερική ολοκλήρωση των περισσότερων από τις προηγούμενες εξισώσεις. Τα ολοκληρώματα κίνησης περιέχουν σημαντικές πληροφορίες για το πώς εξελίσσεται η ροή και η μελέτη τους μας δίνει μια ευκαιρία να κατανοήσουμε καλύτερα το μέχρι τώρα πολύπλοκο σύστημα που εξετάζουμε.

²Η απόδειξη γίνεται με τη χρήση του ταυιστή ενέργειας-ορμής.



Σχήμα 2.1: Σκίτσο μιας γραμμής ροής (διακεκομμένη) και μιας δυναμικής γραμμής του μαγνητικού πεδίου. Η προβολές και των δύο τριδιάστατων καμπυλών πάνω στο πολοειδές επίπεδο (σκιασμένο) ταυτίζονται. Η εξίσωση της προβολής αυτής είναι $A = \text{σταθ}$.

2.3.1 Τα ολοκληρώματα της κίνησης

Η συνάρτηση μαγνητικής ροής A

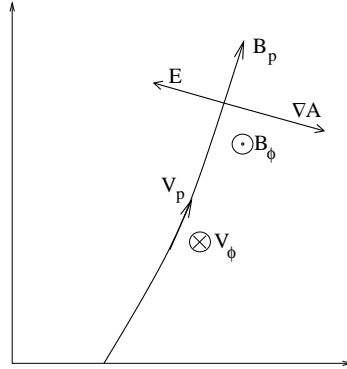
Η σημαντικότερη ποσότητα του προβλήματος είναι η συνάρτηση μαγνητικής ροής. Αρχικά θα ορίσουμε το πολοειδές επίπεδο σαν το επίπεδο (z, ϖ) σε κυλινδρικές (ή $[r, \theta]$ σε σφαιρικές) συντεταγμένες, δεξ σχ. 2.1. Έτσι, αναλύουμε την ταχύτητα σε πολοειδή \mathbf{V}_p και αξιμουθιακή \mathbf{V}_ϕ . Όμοια, αναλύουμε το μαγνητικό πεδίο σε πολοειδές \mathbf{B}_p και αξιμουθιακό \mathbf{B}_ϕ .

Η πρώτη εξίσωση Μάξουελ γίνεται $\nabla \cdot \mathbf{B}_p = 0$. Άρα υπάρχει συνάρτηση $A(\varpi, z)$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{B}_p = \frac{\nabla A \times \hat{\phi}}{\varpi}, \quad \text{ή} \quad \mathbf{B}_p = \nabla \times \left(\frac{A \hat{\phi}}{\varpi} \right). \quad (2.11)$$

Από τη δεύτερη γραφή φαίνεται ότι το A σχετίζεται με το διανυσματικό δυναμικό του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου. Εύκολα μπορεί ναδειχθεί ότι

$$A = \frac{1}{2\pi} \iint \mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.12)$$



Σχήμα 2.2: Σκίτσο μιας πολοειδούς γραμμής ροής/δυναμικής γραμμής του μαγνητικού πεδίου, $A = \text{σταθ}$. Φαίνονται η διεύθυνση και φορά του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, καθώς και της ταχύτητας.

συσχετίζοντας την συνάρτηση A με την μαγνητική ροή. Άρα η εξίσωση της πολοειδούς μαγνητικής γραμμής (που είναι και η προβολή του \mathbf{B} στο πολοειδές επίπεδο) είναι $A = \text{σταθ}$, δες σχ. 2.1.

Η γωνιακή ταχύτητα του πεδίου

Η εξίσωση του Φαραντέι, στην περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο δεν μεταβάλλεται χρονικά, δίνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο προέρχεται από βαθμωτό δυναμικό $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Λόγω της αξισυμμετρίας, $E_\phi = 0$. Όμως ο νόμος του Ωμ (2.5) δίνει σ' αυτήν την περίπτωση $(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\phi} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{V}_p \times \mathbf{B}_p) \cdot \hat{\phi} = 0$, κάτι που σημαίνει ότι τα \mathbf{V}_p και \mathbf{B}_p είναι παράλληλα. Αυτό είναι πολύ σημαντικό συμπέρασμα και σημαίνει ότι η ροή ακολουθεί το μαγνητικό πεδίο στο πολοειδές επίπεδο (αν και στις τρεις διαστάσεις οι γραμμή ροή δεν ταυτίζεται με την γραμμή του μαγνητικού πεδίου όπως δείχνει το σχ. 2.1).

Αφού τα \mathbf{V}_p , \mathbf{B}_p είναι παράλληλα, υπάρχουν συναρτήσεις Ψ_A και Ω τέτοιες ώστε

$$\mathbf{V} = \frac{\Psi_A}{4\pi\gamma\rho_0}\mathbf{B} + \omega\Omega\hat{\phi}, \quad \frac{\Psi_A}{4\pi\gamma\rho_0} = \frac{V_p}{B_p}. \quad (2.13)$$

Αντικαθιστώντας την προηγούμενη σχέση στον νόμο του Ωμ (2.5) έχουμε $\mathbf{E} = -(\omega\Omega/c)\hat{\phi} \times \mathbf{B}_p$. Χρησιμοποιώντας την εξ. (2.11) βρίσκουμε πως το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\mathbf{E} = -\frac{\Omega}{c}\nabla A, \quad \text{με μέτρο } E = \frac{\omega\Omega}{c}B_p. \quad (2.14)$$

Παρατηρήστε ότι η διεύθυνση του \mathbf{E} είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου (που όπως είπαμε έχουν προβολή πάνω στο πολοειδές επίπεδο $A = \text{σταθ}$). Η φορά του \mathbf{E} είναι αντίθετη από την φορά του ∇A , άρα το ηλεκτρικό πεδίο «κοιτάζει προς τον άξονα περιστροφής», όπως δείχνει το σχήμα 2.2.

Χρησιμοποιώντας την εξ. (2.14), ο νόμος του Φαραντέι (2.4) δίνει $\nabla \times (\Omega\nabla A) = 0 \Leftrightarrow \nabla\Omega \times \nabla A = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $\Omega = \Omega(A)$, δηλ. το Ω είναι μια σταθερά

κίνησης. Από γραμμή σε γραμμή το Ω μπορεί να είναι διαφορετικό, αλλά αφού το ρευστό κινείται πάνω στις γραμμές $A = \text{σταθ}$, το Ω μένει σταθερό κατά τη διάρκεια της κίνησης κάθε μέρους της ροής.

Αν κοντά στο κεντρικό σώμα απ' όπου ξεκίνησε η ροή η πυκνότητα είναι αρκούντως μεγάλη, βλέπουμε από την εξ. (2.13) ότι $V_\phi \approx \omega\Omega$. Δηλ. Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του ρευστού κοντά στην βάση της εκροής. Πιο μακριά πάντως ο άλλος όρος της αξιμουθιακής ταχύτητας δεν είναι πια αμελητέος και το προηγούμενο συμπέρασμα δεν ισχύει.

Ο λόγος ροής μάζας προς μαγνητική ροή

Αντικαθιστώντας την εξ. (2.13) στην εξίσωση συνέχειας (2.9), και αφού $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, προκύπτει ότι $\mathbf{B}_p \cdot \nabla \Psi_A = 0$. Δηλ. η παράγωγος του Ψ_A κατά μήκος της πολοειδούς δυναμικής γραμμής του \mathbf{B} είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι $\Psi_A = \Psi_A(A)$, οπότε το Ψ_A είναι άλλη μια σταθερά κίνησης. Από την εξ. (2.13), $\Psi_A = 2(\gamma\rho_0 V_p \delta S)/(B_p \delta S/2\pi)$. Ο παρονομαστής είναι η μαγνητική ροή (δες εξ. [2.12]), ενώ ο αριθμητής είναι η ροή μάζας (ο παράγοντας 2 υπολογίζει τη ροή μάζας και από τα δύο ημισφαίρια). Δηλ. η σταθερά κίνησης Ψ_A παριστάνει το λόγο της ροής μάζας προς την μαγνητική ροή, και δηλώνει ότι αυτός μένει σταθερός κατά τη διάρκεια της κίνησης (κάτι που θα έπρεπε να το περιμένουμε αφού $\mathbf{V}_p \parallel \mathbf{B}_p$).

Εντροπία ανά μονάδα μάζας

Η εξίσωση (2.8) ολοκληρώνεται αμέσως και δίνει $P/\rho_0^\Gamma = Q(A)$. Αφού η εντροπία ανά μονάδα μάζας είναι συνάρτηση του P/ρ_0^Γ , η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι η εντροπία μένει σταθερή κατά την κίνηση του ρευστού όταν δεν υπάρχει θερμοτότητα.

Η ολική στροφορμή ανά μονάδα μάζας

Αφού έχουμε υποθέσει αξισυμμετρία, πρέπει να υπάρχει κάποιο ολοκλήρωμα στροφορμής. Πράγματι, η $\hat{\phi}$ συνιστώσα της εξίσωσης της ορμής (2.10) ολοκληρώνεται και δίνει

$$\xi\gamma\omega V_\phi - \frac{\omega B_\phi}{\Psi_A} = L(A). \quad (2.15)$$

Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην στροφορμή του υλικού ανά μονάδα μάζας, ενώ ο δεύτερος στην στροφορμή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Βλέπουμε ότι μόνο η ολική στροφορμή μένει σταθερή· μπορούμε όμως να έχουμε μετακίνηση στροφορμής από το πεδίο στην ύλη και αντίστροφα. Όταν ο όρος που αντιστοιχεί στο πεδίο είναι αμελητέος, τότε προκύπτει ότι $\xi\gamma V_\phi \propto 1/\omega$, το οποίο ανάγεται στο γνωστό μας από μη σχετικιστικές κινήσεις αποτέλεσμα $V_\phi \propto 1/\omega$.

Ο λόγος ροή ενέργειας προς ροή μάζας

Το ολοκλήρωμα της ενέργειας προκύπτει αν προβάσουμε την εξίσωση της ορμής πάνω στην κίνηση, πολλαπλασιάζοντας δηλ. την εξ. (2.10) με \mathbf{V} . Το αποτέλεσμα είναι

$$\xi\gamma - \frac{\omega\Omega B_\phi}{\Psi_A c^2} = \mu(A), \quad (2.16)$$

και εκφράζει την διατήρηση του λόγου της ροής ενέργειας προς ροή μάζας (διαιρούμενο με c^2 ώστε να γίνει αδιάστατο). Ο δεύτερος όρος αφορά την ενέργεια του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και πρέπει να σχετίζεται με την ροή Πόυντινγκ. Πράγματι, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια. Η ροή ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $(c/4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ χωρίζεται σε δύο μέρη. Το μέρος $(c/4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{B}_p$ έχει αξιμουθιακή διεύθυνση και άρα περιγράφει ενέργεια που δεν μπορεί να διαφύγει. Αντίθετα το μέρος $(c/4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{B}_\phi$ έχει την διεύθυνση της ταχύτητας, και φορά προς τα έξω αν $B_\phi < 0$. Το μέτρο του είναι $(c/4\pi)E|B_\phi| = (c/4\pi)(\varpi\Omega/c)B_p|B_\phi|$, όπου χρησιμοποιήσαμε την εξ. (2.14). Επομένως αν διαιρέσουμε με τη ροή μάζας επί c^2 , δηλ. με $(\gamma\rho_0)\mathbf{V}_p c^2$, και χρησιμοποιήσουμε ότι $V_p/B_p = \Psi_A/4\pi\gamma\rho_0$ (δες εξ. [2.13]), παίρνουμε $\varpi\Omega|B_\phi|/\Psi_A c^2$, δηλ. ακριβώς το δεύτερο μέρος της εξ. (2.16). Ο πρώτος όρος της εξ. (2.16) είναι η ροή ενέργειας που αφορά την ύλη (ροή κινητικής ενέργειας και ενθαλπίας, συμπεριλαμβανομένης και της ενέργειας ηρεμίας) προς την ροή μάζας (προς c^2).

Ανάλογα με το αν στο άθροισμα της εξ. (2.16) κυριαρχεί ο όρος της ύλης ($\xi\gamma$) ή ο όρος του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ($\varpi\Omega|B_\phi|/\Psi_A c^2$), ονομάζουμε τη ροή Πόυντινγκ-κυριαρχούμενη (οπότε $\xi\gamma \ll \varpi\Omega|B_\phi|/\Psi_A c^2$ και $\varpi\Omega|B_\phi|/\Psi_A c^2 \approx \mu$) ή ύλο-κυριαρχούμενη (τότε $\xi\gamma \gg \varpi\Omega|B_\phi|/\Psi_A c^2$ και $\xi\gamma \approx \mu$). Βέβαια μπορούμε να έχουμε γενικά μια ροή η οποία είναι Πόυντινγκ-κυριαρχούμενη κοντά στη βάση της αλλά αργότερα γίνεται ύλο-κυριαρχούμενη.

Σύνοψη

Συνοψίζοντας, έχουμε βρει ότι η πολοειδής δυναμική γραμμή ταυτίζεται με την πολοειδή γραμμή ροής και έχει εξίσωση $A = \text{σταθ}$. Η συνάρτηση A είναι ανάλογη της μαγνητικής ροής (ο άξονας περιστροφής είναι $A = 0$). Συναρτήσε του A , έχουμε για το πολοειδές μαγνητικό πεδίο

$$\mathbf{B}_p = \frac{\nabla A \times \hat{\phi}}{\varpi}, \quad B_p = \frac{|\nabla A|}{\varpi}, \quad (2.17)$$

και για το ηλεκτρικό πεδίο

$$\mathbf{E} = -\frac{\Omega}{c}\nabla A, \quad E = xB_p, \quad (2.18)$$

όπου ορίσαμε την κυλινδρική απόσταση σε μονάδες της ακτίνας του «κυλίνδρου φωτός»

$$x = \frac{\varpi\Omega}{c}. \quad (2.19)$$

Επίσης βρήκαμε το ολοκλήρωμα Ψ_A , συναρτήσε του οποίου η πολοειδής ταχύτητα γράφεται

$$\mathbf{V}_p = \frac{\Psi_A}{4\pi\gamma\rho_0}\mathbf{B}_p. \quad (2.20)$$

Το ότι η κίνηση είναι αδιαβατική εκφράζεται από τη σχέση

$$P = Q(A)\rho_0^\Gamma. \quad (2.21)$$

Βρήκαμε ακόμα τρία ολοκληρώματα, τα Ω , L και μ , τα οποία συσχετίζουν τα μεγέθη V_ϕ , B_ϕ , και γ σύμφωνα με τις σχέσεις

$$V_\phi = \frac{\Psi_A}{4\pi\gamma\rho_0} B_\phi + \omega\Omega, \quad (2.22)$$

$$\xi\gamma\omega V_\phi - \frac{\omega B_\phi}{\Psi_A} = L, \quad (2.23)$$

$$\xi\gamma - \frac{\omega\Omega B_\phi}{\Psi_A c^2} = \mu. \quad (2.24)$$

2.3.2 Η επιφάνεια Αλφβέν

Οι σχέσεις (2.22–2.24) μπορούν να λυθούν ως προς V_ϕ , B_ϕ , και γ . Τα αποτελέσματα είναι

$$\gamma = \frac{\mu}{\xi} \frac{1 - M^2 - x_A^2}{1 - M^2 - x^2}, \quad (2.25)$$

$$B_\phi = -\frac{\mu c \Psi_A}{x} \frac{x_A^2 - x^2}{1 - M^2 - x^2}, \quad (2.26)$$

$$V_\phi = \frac{c}{x} \frac{x^2 - (M^2 + x^2)x_A^2}{1 - M^2 - x_A^2}, \quad (2.27)$$

όπου ορίσαμε την ποσότητα

$$M^2 = \frac{\xi \Psi_A^2}{4\pi\rho_0} = \frac{4\pi\xi\rho_0\gamma^2 V_p^2}{B_p^2}, \quad (2.28)$$

και την

$$x_A^2 = \frac{L\Omega}{\mu c^2}. \quad (2.29)$$

Παρατηρήστε ότι $B_\phi < 0$ όπως περιμέναμε,³ κάτι που αντιστοιχεί σε εκροή Πούντινγκ $(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{V}_p > 0$. Όπως βλέπουμε οι παρονομαστές στις εξισώσεις (2.25–2.27) μηδενίζονται όταν $M^2 + x^2 = 1$. Η επιφάνεια στην οποία αυτό συμβαίνει λέγεται επιφάνεια Αλφβέν.⁴ Για να ορίζονται οι ποσότητες στις εξ. (2.25–2.27) πρέπει να μηδενίζονται ταυτόχρονα και οι αριθμητές, δηλ. x_A είναι η τιμή του x στην επιφάνεια Αλφβέν.

Κοντά στη βάση μιας εκροής η οποία ξεκινά από μικρές αποστάσεις τέτοιες ώστε $x \ll 1$, και με μεγάλη πυκνότητα ώστε $M \ll 1$ (το τελευταίο ισοδυναμεί

³Γενικά το πρόσημο του B_ϕ είναι αντίθετο από το πρόσημο του V_ϕ , αν σκεφτούμε ότι η ύλη περιστρέφεται στη βάση της εκροής κινώντας τις «βάσεις» των μαγνητικών γραμμών. Λόγω αδράνειας, το «σώμα» των μαγνητικών γραμμών «μένει πίσω» και έτσι δημιουργείται μια αζιμουθιακή συνιστώσα του \mathbf{B} που είναι αντίθετη της περιστροφής. Ένας άλλος λόγος για το γεγονός ότι $B_\phi < 0$ είναι η σχέση (2.22). Έξω από τον κύλινδρο φωτός $\omega\Omega > c$, μόνο αν $B_\phi < 0$ είναι δυνατόν να ισχύει $V_\phi < c$.

⁴Χρησιμοποιώντας την εξ. (2.28) βρίσκουμε ότι στην επιφάνεια Αλφβέν είναι $\gamma V_p = B_p \sqrt{(1-x^2)}/4\pi\xi\rho_0$. Το δεξιό μέλος της προηγούμενης ισότητας σχετίζεται με την φασική ταχύτητα κυμάτων Αλφβέν που διαδίδονται σε μαγνητισμένο πλάσμα.

με ισχυρό πολοειδές μαγνητικό πεδίο σύμφωνα με την δεύτερη των εξ. [2.28]), η ύλη περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω . Αυτό προκύπτει από την εξ. (2.22) η οποία γίνεται $V_\phi \approx \omega\Omega$ (ή από την εξ. [2.27] για $M \ll 1$). Γράφοντας την εξ. (2.22) σαν

$$V_\phi = \omega\Omega - V_p \frac{|B_\phi|}{B_p} \quad (2.30)$$

(απαλείψαμε το Ψ_A χρησιμοποιώντας την εξ. [2.20]) φαίνεται ότι $B_p \gtrsim |B_\phi|$, δηλ. το πολοειδές μαγνητικό πεδίο είναι η σημαντικότερη συνιστώσα στην υπο-Αλφβενική περιοχή $M^2 + x^2 < 1$.

Καθώς η ύλη προχωρά σε μεγαλύτερες κυλινδρικές αποστάσεις, κάποια στιγμή θα γίνει $M^2 + x^2 = 1$ και αργότερα $M^2 + x^2 > 1$. Στην υπερ-Αλφβενική περιοχή $M^2 + x^2 > 1$ δεν ισχύει πια η ισοπεριστροφή $V_\phi \approx \omega\Omega$. Μάλιστα σε αρκετά μεγάλες αποστάσεις είναι $V_\phi \ll \omega\Omega$, οπότε η εξ. (2.30) συνεπάγεται $|B_\phi| \approx (\omega\Omega/V_p)B_p \approx xB_p$. Άμεση συνέπεια είναι ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι συγκρίσιμο με το $|B_\phi|$ (αφού $E = xB_p$ σύμφωνα με την εξ. [2.18]).

2.3.3 Οι εξισώσεις για τα M και A

Όπως είδαμε στα προηγούμενα μπορούσαμε να εκφράσουμε όλες τις φυσικές ποσότητες του προβλήματος σαν συνάρτηση των αγνώστων συναρτήσεων M και A (και των ολοκληρωμάτων τα οποία είναι συναρτήσεις του A). Το πρόβλημα λοιπόν έχει αναχθεί στο να βρούμε αυτές τις δύο συναρτήσεις. Οι δύο εξισώσεις που δεν έχουμε ολοκληρώσει και οι οποίες πρέπει να λυθούν ως προς M και A είναι οι εξίσωση Μπερνούλι και η εγκάρσια συνιστώσα της εξίσωσης ορμής.

Η εξίσωση Μπερνούλι

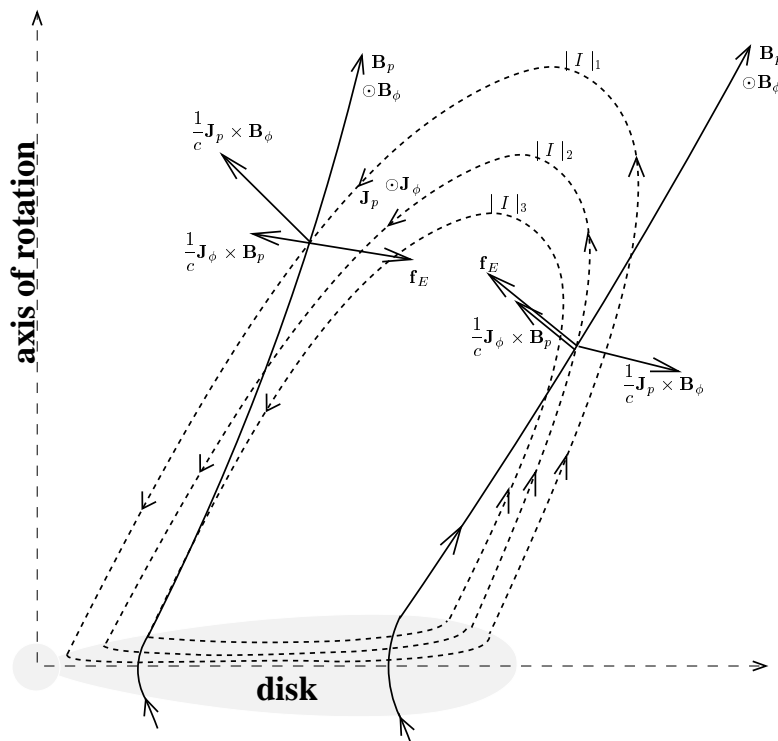
Αν αντικαταστήσουμε στην ταυτότητα $\gamma^2 = 1 + \gamma^2 V_p^2/c^2 + \gamma^2 V_\phi^2/c^2$ όλες τις ποσότητες όπως δίνονται σαν συναρτήσεις των M και A , έχουμε την εξίσωση Μπερνούλι. Η εξίσωση αυτή είναι αλγεβρική και μπορεί να ιδωθεί σαν να δίνει το M συναρτήσει του A και της παραγώγου του $|\nabla A|$.

Η εγκάρσια συνιστώσα της εξίσωσης ορμής

Η μόνη εξίσωση που έμεινε να ολοκληρωθεί είναι η προβολή της εξίσωσης της ορμής κάθετα στην πολοειδή γραμμή, δηλ. η προβολή της εξ. (2.10) πάνω στο ∇A . Η εξίσωση αυτή καθορίζει το σχήμα της πολοειδούς γραμμής. Η σχέση που προκύπτει είναι μια πολύπλοκη και εξαιρετικά μη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με μόνο άγνωστο το A . Η λύση της με αναλυτικούς ή υπολογιστικούς τρόπους είναι αντικείμενο έντονης ερευνητικής προσπάθειας.

2.3.4 Οι δυνάμεις στο πολοειδές επίπεδο

Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε ποιες είναι οι δυνάμεις που ασκούνται στη ροή κατά την κίνησή της και τι αποτέλεσμα έχουν. Η εξίσωση (2.10) μπορεί να γραφεί



Σχήμα 2.3: Σκίτσο δύο δυναμικών γραμμών του \mathbf{B}_p ($A = \text{σταθ}$, συνεχείς γραμμές) και τριών γραμμών του πολοειδούς ρεύματος \mathbf{J}_p ($I = [c/2]\omega B_\phi = \text{σταθ}$, διακεκομμένες). Για τα ρεύματα είναι $|I|_1 < |I|_2 < |I|_3$. Στην αριστερή γραμμή του \mathbf{B}_p είναι $J_{||} < 0$ (μέσα στο ρεύμα της εκροής), ενώ στην δεξιά $J_{||} > 0$ (αντιστοιχεί στην περιοχή που το ρεύμα «επιστρέφει»).

σαν το άθροισμα των επόμενων όρων:

$$\mathbf{f}_G + \mathbf{f}_T + \mathbf{f}_C + \mathbf{f}_I + \mathbf{f}_P + \mathbf{f}_E + \mathbf{f}_B = 0,$$

όπου

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_G &= -\gamma\rho_0\xi(\mathbf{V} \cdot \nabla\gamma)\mathbf{V} \\ \mathbf{f}_T &= -\gamma^2\rho_0(\mathbf{V} \cdot \nabla\xi)\mathbf{V} & : \text{δύναμη «θερμοκρασίας»} \\ \mathbf{f}_C &= \tilde{\omega}\gamma^2\rho_0\xi V_\phi^2/\omega & : \text{φυγόκεντρος δύναμη} \\ \mathbf{f}_I &= -\gamma^2\rho_0\xi(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} - \mathbf{f}_C & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{δύναμη αδράνειας} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_P &= -\nabla P & : \text{δύναμη «πίεσης»} \\ \mathbf{f}_E &= (\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}/4\pi & : \text{ηλεκτρική δύναμη} \\ \mathbf{f}_B &= (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}/4\pi & : \text{μαγνητική δύναμη} \end{aligned}$$

Η μαγνητική δύναμη $\mathbf{f}_B = \mathbf{J} \times \mathbf{B}/c$ μπορεί να αναλυθεί σαν

$$\mathbf{J}_p \times \mathbf{B}_p/c + \mathbf{J}_\phi \times \mathbf{B}_p/c + \mathbf{J}_p \times \mathbf{B}_\phi/c.$$

Ο πρώτος όρος δεν έχει συνιστώσα πάνω στο πολοειδές επίπεδο. Ο δεύτερος όρος εξαρτάται μόνο από το \mathbf{B}_p , αφού $\mathbf{J}_\phi = (c/4\pi)\nabla \times \mathbf{B}_p$. Ο τρίτος εξαρτάται μόνο από το \mathbf{B}_ϕ , αφού $\mathbf{J}_p = (c/4\pi)\nabla \times \mathbf{B}_\phi$. Στην υπερ-Αλφβενική περιοχή αυτός είναι ο κυρίαρχος όρος του μαγνητικού πεδίου, αφού εκεί $|\mathbf{B}_\phi| \gg \mathbf{B}_p$.

Αν γράψουμε

$$\mathbf{J}_p = \frac{c}{4\pi}\nabla \times \mathbf{B}_\phi = \frac{c}{4\pi}\nabla \times \left(\varpi B_\phi \frac{\hat{\phi}}{\varpi} \right) = \frac{c}{4\pi}\nabla (\varpi B_\phi) \times \frac{\hat{\phi}}{\varpi},$$

σε αναλογία με την σχέση $\mathbf{B}_p = \nabla A \times \hat{\phi}/\varpi$ συμπεραίνουμε ότι οι γραμμές του πολοειδούς ρεύματος \mathbf{J}_p έχουν εξίσωση $\varpi B_\phi = \text{σταθ}$. Κάθε γραμμή $\varpi B_\phi = \text{σταθ}$ περικλύει σταθερό συνολικό ρεύμα $I = \iint \mathbf{J}_p \cdot d\mathbf{S} = (c/2)\varpi B_\phi$, όπως δείχνει το σχ. 2.3. Η δύναμη $\mathbf{J}_p \times \mathbf{B}_\phi/c$ βρίσκεται πάνω στο πολοειδές επίπεδο και είναι κάθετη στη γραμμή ρεύματος όπως φαίνεται στο σχ. 2.3. Η δύναμη αυτή έχει δύο συνιστώσες: μία παράλληλα στην ροή (δηλ. παράλληλα στην \mathbf{V}_p), και μία κάθετα στη ροή. Η πρώτη, όπως βλέπουμε στο σχ. 2.3 επιταχύνει την ροή. Το αποτέλεσμα της δεύτερης εξαρτάται από το αν η ροή βρίσκεται κοντά στον άξονα περιστροφής (αριστερή γραμμή \mathbf{B}_p στο σχ. 2.3 όπου $J_{||} < 0$) ή μακριά (δεξιά γραμμή \mathbf{B}_p στο σχ. 2.3 όπου $J_{||} > 0$). Κοντά στον άξονα περιστροφής όπου μας ενδιαφέρει περισσότερο να μελετήσουμε την ροή και να συγκρίνουμε με τις παρατηρήσεις εστιασμένων πιδάκων πλάσματος, η δύναμη αυτή εστιάζει την ροή, δηλ. προσπαθεί να την σπρώξει προς τον άξονα συμμετρίας.⁵ Η εξήγηση της παρατηρούμενης επιτάχυνσης και εστίασης αστροφυσικών εκροών με βάση αυτή την απλή εικόνα είναι μια από τις επιτυχίες της θεωρίας της μαγνητουδροδυναμικής, αν και οι ποσοτικοί υπολογισμοί είναι αντικείμενο έρευνας ακόμα και στις μέρες μας.

Στο σχ. 2.3 φαίνεται επίσης η δύναμη $(1/c)\mathbf{J}_\phi \times \mathbf{B}_p$, η οποία συνεισφέρει κυρίως στην υπο-Αλφβενική περιοχή.

Στην εξίσωση ορμής έχουμε ακόμα δυνάμεις που οφείλονται σε μεταβολή των θερμοδυναμικών ποσοτήτων P και ξ . Η δύναμη «θερμοκρασίας» $\mathbf{f}_T = -\gamma^2 \rho_0 (\mathbf{V} \cdot \nabla \xi) \mathbf{V}$ είναι σημαντική εφόσον $\xi \gg 1$ και έχει συνιστώσα πάνω στην \mathbf{V}_p ίση με $f_{T||} = -\gamma^2 \rho_0 (\mathbf{V} \cdot \nabla \xi) V_p$ η οποία επιταχύνει την ροή όταν το πλάσμα κρυώνει (δηλ. το ξ ελαττώνεται). Αν χρησιμοποιήσουμε την εξ. (2.7) και το γεγονός ότι $\mathbf{V} \cdot \nabla (P/\rho_0^\Gamma) = 0$, μπορούμε να γράψουμε $f_{T||} = -\gamma^2 V_p \mathbf{V}_p \cdot \nabla P / c^2 = (\gamma V_p / c)^2 f_{P||}$, όπου $f_{P||} = -(\mathbf{V}_p / V_p) \cdot \nabla P$ είναι η συνιστώσα της δύναμης της πίεσης πάνω στην ροή. Το συμπέρασμα είναι ότι σε περιπτώσεις σχετικιστικής ροής με $\gamma V_p / c \gg 1$ η δύναμη της πίεσης πάνω στην ροή $f_{P||}$ έχει πολύ μικρότερη συνεισφορά από την δύναμη θερμοκρασίας $f_{T||}$.

Η φυγόκεντρος δύναμη $\mathbf{f}_C = \hat{\omega} \gamma^2 \rho_0 \xi V_\phi^2 / \varpi$ συνεισφέρει επίσης στην επιτάχυνση εκεί όπου το V_ϕ είναι σημαντικό, δηλ. κοντά στη βάση της ροής μέσα στην υπο-Αλφβενική περιοχή. Ο μηχανισμός που βασίζεται στην φυγόκεντρο δύναμη λέγεται «μαγνητοπεριστροφικός» και είναι πολύ σημαντικός στην επιτάχυνση μη σχετικιστικών εκροών.⁶

⁵Σημειώστε πάντως ότι η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο έχει αντίθετη φορά και προσπαθεί να αποεστιάσει τη ροή, μετριάζοντας έτσι το αποτέλεσμα της μαγνητικής δύναμης.

⁶Σύμφωνα με τον μηχανισμό αυτόν το ρευστό μπορεί να ιδωθεί σαν δακτυλίδια περασμένα

2.4 Ασκήσεις

1. Μια υδροδυναμική εκροή αποτελούμενη από πρωτόνια-ηλεκτρόνια έχει θερμοκρασία $T_i = 10^{12}K$ κοντά στη βάση της. Ποιό το μέγιστο γ που μπορεί να αποκτήσει; Επαναλάβετε στην περίπτωση που η εκροή αποτελείται από ηλεκτρόνια-ποζιτρόνια.
2. Κοντά σε μελανή οπή μάζας $10^8 M_\odot$, περιστρέφεται μια μαγνητισμένη εκροή ηλεκτρονίων-πρωτονίων στην οποία $B_{pi} = 10^4 G$, $|B_\phi|_i = 10^3 G$. Η εκροή ξεκινά με $\gamma_i \sim 1$ και $T_i = 10^{10}K$, και μεταφέρει μάζα με ρυθμό $\dot{M} = 10^{-3} M_\odot \text{yr}^{-1}$.
 - (α) Ποιά η ολική ροή ενέργειας προς την ροή μάζας προς c^2 (δηλ. ποιό είναι το μ);
 - (β) Ποιά τα μέρη του μ που αντιστοιχούν στην ύλη και στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο; Ποιές οι αντίστοιχες ισχύεις;
 - (γ) Ποιό το μέγιστο γ που μπορεί να αποκτήσει αυτή η ροή;
 - (δ) Ποιά η ολική στροφορμή που εκρέει ανά μονάδα χρόνου; Αρχικά ποιό μέρος της αντιστοιχεί στην ύλη;
 - (ε) Αν το σχήμα των δυναμικών γραμμών $A = \text{σταθ}$ είναι τέτοιο ώστε ασυμπτωτικά να έχουμε ισοκατανομή μεταξύ ενέργειας της ύλης και ενέργειας του πεδίου, ποιό είναι το γ_∞ ;
 - (στ) Εκτιμήστε ποιό είναι η αρχική πυκνότητα της εκροής.
 Θεωρήστε ότι η εκροή εκτείνεται από $\varpi_{in} = 5r_g$ ως $\varpi_{out} = 10r_g$, όπου r_g η ακτίνα Schwarzschild.
3. Μια εστιασμένη χρύα εκροή κινείται με $\gamma_\infty = 15$, έχει γωνιακό ημίανοιγμα $\vartheta = 3^\circ$ και μεταφέρει μάζα με ρυθμό $\dot{M} = 10^{-3} M_\odot \text{yr}^{-1}$. Αν με κάποιο μηχανισμό το 1% της ασυμπτωτικής κινητικής ενέργειας μετατρέπεται σε ακτινοβολία, ποιό θα είναι η ροή της ενέργειας που φτάνει στη γη; Δίνεται απόσταση γης-αντικειμένου = 1 Gpc.
4. Δείξτε ότι σε γενικές γραμμές το πολοειδές μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται σαν $B_p \propto 1/\varpi^2$. Επίσης ότι η πυκνότητα στο σύστημα εργαστηρίου αλλάζει σαν $\gamma\rho_0 \propto 1/\varpi^2$. Στην περίπτωση Πούντινγκ-κυριαρχούμενης ροής ($\xi\gamma \ll \mu$) δείξτε ότι $B_\phi \propto 1/\varpi$, δηλ. το γινόμενο ϖB_ϕ αλλάζει πολύ αργά.
5. Σε περίπτωση εστιασμένης ροής με $V_\varpi \ll V_z$, δείξτε ότι ο παράγοντας Λόρεντζ είναι $\gamma \gtrsim z/\varpi$. (Υπόδειξη: Συγκρίνετε τα ϖ και $\int V_\varpi dt$.)
6. Έστω ότι μελετούμε μια υδροδυναμική ροή e^\pm η οποία έχει σχετικιστικές θερμοκρασίες $P \gg \rho_0 c^2$.
 - Δείξτε ότι όσο η θερμοκρασία παραμένει σχετικιστική $\gamma \propto \varpi$, $T \propto \varpi^{-1}$, και $\rho_0 \propto \varpi^{-3}$.

σε σύρματα τα οποία παριστάνουν τις δυναμικές γραμμές του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου, και περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα Ω . (Σημειώστε ότι μόνο στην περιοχή κοντά στην βάση της ροής όπου το πολοειδές μαγνητικό πεδίο είναι η σημαντική συνιστώσα, οι γραμμές μπορούν να θεωρηθούν σαν στερεά περιστρεφόμενα σύρματα, και μόνο σ' αυτήν την περιοχή υπάρχει ισοπεριστροφή, οπότε τα «δακτυλίδια» μπορούν να θεωρηθούν περασμένα στα «σύρματα».)

- Αν η ροή ξεκινά από $\varpi_i = 10^7 \text{ cm}$ με $\gamma_i \sim 1$, ποιά πρέπει να είναι η αρχική θερμοκρασία για να πάρουμε στο τέλος $\gamma_\infty = 500$; Σε ποιά απόσταση γίνεται $\gamma = \gamma_\infty$;
7. Δείξτε ότι κοντά στη βάση μιας μαγνητισμένης εκροής είναι $\xi_i \gamma_i \approx \mu(1 - x_A^2)$. Για μια σχετικιστική εκροή με $\mu \gg 1$ η οποία κυριαρχείται αρχικά από την ροή Πούντινγκ, δηλ. $\xi_i \gamma_i \ll \mu$, δείξτε ότι το $x_A \approx 1^-$, δηλ. η επιφάνεια Αλφβέν είναι λίγο πριν τον «κύλινδρο φωτός».
8. (Θέμα εξετάσεων Μαρτίου 2004 – 2.5 μονάδες)
 (α) Το ολοκλήρωμα της ενέργειας σε μια στάσιμη μαγνητισμένη εκροή είναι $\xi\gamma - \varpi\Omega B_\phi / \Psi_A c^2 = \mu$. Τι παριστάνουν τα διάφορα σύμβολα και ποιά απ' αυτά είναι σταθερές της κίνησης; Τι εκφράζει κάθε ένας από τους τρεις όρους της σχέσης; Συσχετίστε τον δεύτερο όρο με την ροή Poynting $(c/4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.
 (β) Γύρω από μελανή οπή μάζας $10^9 M_\odot$ υπάρχει δίσκος προσαύξησης που εκτείνεται σε κυλινδρικές αποστάσεις $5r_g < \varpi < 6r_g$ και περιστρέφεται Κεπλεριανά. Από την επιφάνεια του δίσκου εκρέει ύλη με ρυθμό $\dot{M} = 10^{-3} M_\odot \text{ yr}^{-1}$. Αν κοντά στη βάση της εκροής $B_p = 10^4 \text{ G}$, $|B_\phi| = 10^2 \text{ G}$, ποιός ο μέγιστος παράγοντας Lorentz που μπορεί να αποκτήσει η εκροή; (Κοντά στη βάση της εκροής η ροή ενέργειας είναι κυρίως Poynting.) Ποιά η θεωρητικά μέγιστη λαμπρότητα του jet;
 Δίνονται $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $M_\odot = 2 \times 10^{33} \text{ g}$, $1 \text{ yr} = 3 \times 10^7 \text{ s}$, και $r_g = 2GM/c^2$, $4\pi\gamma_0 \mathbf{V}_p = \Psi_A \mathbf{B}_p$, $V_\phi = \varpi\Omega + V_p B_\phi / B_p$, $E = B_p \varpi \Omega / c$.
9. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2005 – 2.5 μονάδες)
 (α) Το ολοκλήρωμα της ενέργειας σε μια στάσιμη μαγνητισμένη εκροή είναι $\xi\gamma - \varpi\Omega B_\phi / \Psi_A c^2 = \mu$. Τι παριστάνουν τα διάφορα σύμβολα και ποιά απ' αυτά είναι σταθερές της κίνησης; Τι εκφράζει κάθε ένας από τους τρεις όρους της σχέσης; Συσχετίστε τον δεύτερο όρο με την ροή Poynting $(c/4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.
 (β) Έστω ότι μελετάμε μια κρύα, ισχυρά σχετικιστική εκροή, στην οποία η περιστροφική ταχύτητα μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα ($V_\phi \ll \varpi\Omega$). Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα ενέργειας δείξτε ότι ο παράγοντας Lorentz εξαρτάται από το σχήμα των πολοειδών μαγνητικών γραμμών, μέσω της συνάρτησης $f = B_p \varpi^2 / A$.
 Δίνονται οι σχέσεις $V_p = \Psi_A B_p / (4\pi\gamma_0)$, $V_\phi = \Psi_A B_\phi / (4\pi\gamma_0) + \varpi\Omega$.
 (γ) Πώς πρέπει να μεταβάλλεται η συνάρτηση $f = B_p \varpi^2 / A$ για να έχουμε επιτάχυνση; Αν ασυμπτωτικά το πεδίο έχει μονοπολική μορφή ($\mathbf{B}_p \propto \hat{r}/r^2$), ποιά η ασυμπτωτική τιμή του παράγοντα Lorentz και ποιός ο λόγος της ροής Poynting προς την ολική ροή ενέργειας; (Τα αποτελέσματά σας πρέπει να είναι συναρτήσεις των ολοκληρωμάτων κίνησης A , Ω , Ψ_A , μ .)
 Δίνεται η σχέση $2\pi A = \iint \mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{S}$.
10. (Θέμα εξετάσεων Μαΐου 2006 (επί πτυχίω) – 2.5 μονάδες)
 Μία έκλαμψη ακτινοβολίας γ (Gamma-Ray Burst) διαρκεί $\Delta t = 10 \text{ s}$ και ακτινοβολεί ενέργεια $\mathcal{E} = 10^{51} \text{ ergs}$.
 (α) Αν η ενέργεια αυτή, πριν ακτινοβοληθεί, ήταν κινητική ενέργεια εκροής με παράγοντα Lorentz $\gamma = 100$, ποιά η μάζα της εκροής και ποιός ο ρυθμός

\dot{M} ;

(β) Έστω ότι αυτή η κινητική ενέργεια είναι αποτέλεσμα μαγνητικής επιτάχυνσης σε μια εκροή που προέρχεται από ένα δίσκο προσαύξεσης ο οποίος περιστρέφεται Κεπλεριανά γύρω από μελανή οπή μάζας $M = 5M_\odot$ (δηλ. η ταχύτητα της εκροής είναι αποτέλεσμα της μετατροπής ροής Poynting σε ροή κινητικής ενέργειας). Υποθέτοντας ότι ο δίσκος εκτείνεται από $\varpi_{\text{in}} \approx 3r_S$ ως $\varpi_{\text{out}} \approx 5r_S$, όπου $r_S = 2GM/c^2$ η ακτίνα Schwarzschild, και ότι κοντά στο δίσκο $B_p \approx |B_\phi|$, εκτιμήστε την ένταση του μαγνητικού πεδίου κοντά στο δίσκο.

Δίνονται $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$, $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $M_\odot = 2 \times 10^{33} \text{ g}$ και η ροή Poynting $\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

11. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2006 – 2.5 μονάδες)

Από δίσκο κοντά σε μελανή οπή μάζας $10^8 M_\odot$ ξεκινά μια μαγνητισμένη εκροή ηλεκτρονίων-πρωτονίων. Η εκροή ξεκινά από μια μικρή περιοχή του δίσκου $5r_g < \varpi_i < 6r_g$ με $V_{pi} = 0.1c$, $T_i = 10^{10} \text{ K}$, $B_{pi} = 10^4 \text{ G}$, $|B_\phi|_i = 10^3 \text{ G}$ και μεταφέρει μάζα με ρυθμό $\dot{M} = 10^{-3} M_\odot \text{ yr}^{-1}$.

(α) Να υπολογιστούν οι τιμές των ολοκληρωμάτων κίνησης Ω , Ψ_A , μ , L .

(β) Θεωρείστε ότι κατά μήκος της ροής όλη η ενέργεια και στροφορμή μεταφέρονται στην ύλη. Ποιά η ασυμπτωτική τιμή του παράγοντα Λόρεντζ; Αν η ασυμπτωτική αξιμουθιακή ταχύτητα της ροής είναι $V_{\phi\infty} = 10^{-5}c$ ποιά η ασυμπτωτική κυλινδρική ακτίνα της ροής ϖ_∞ ;

Δίδονται $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $m_p = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$, $k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$, $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$, $M_\odot = 2 \times 10^{33} \text{ g}$, $1 \text{ yr} = 3 \times 10^7 \text{ s}$, και $r_g = 2GM/c^2$, $\Psi_A = (4\pi\gamma\rho_0 V_p \Delta S)/(B_p \Delta S)$, $\mu = \xi\gamma - \varpi\Omega B_\phi/\Psi_A c^2$, $L = \xi\gamma\varpi V_\phi - \varpi B_\phi/\Psi_A$.

12. (Θέμα εξετάσεων Οκτωβρίου 2007 – 2.0 μονάδες)

(α) Δείξτε ότι για μια στάσιμη υδροδυναμική ροή το ολοκλήρωμα της ενέργειας γράφεται $\left(1 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{k_B T}{mc^2}\right) \gamma = \text{σταθ.}$, όπου m η μέση μάζα ηρεμίας των σωματίων της ροής.

(β) Μια υδροδυναμική εκροή αποτελούμενη από πρωτόνια-ηλεκτρόνια έχει θερμοκρασία $T_i = 10^{12} \text{ K}$ κοντά στη βάση της. Ποιό το μέγιστο γ που μπορεί να αποκτήσει; Επαναλάβετε στην περίπτωση που η εκροή αποτελείται από ηλεκτρόνια-ποζιτρόνια.

Δίνονται οι σταθερές (στο σύστημα cgs): $c = 3 \times 10^{10}$, $k_B = 1.38 \times 10^{-16}$, $m_p = 1.67 \times 10^{-24}$, $m_e = 9.11 \times 10^{-28}$.

13. (Θέμα εξετάσεων Μαΐου 2008 (επί πτυχίω) – 2.5 μονάδες)

(α) Ποιές οι δυνάμεις που ασκούνται σε μια **κρύα**, ιδεατή μαγνητισμένη εκροή; Γράψτε την εξίσωση ορμής.

(β) Ποιές από τις δυνάμεις μπορούν να επιταχύνουν μια κρύα ροή; Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση ορμής με \mathbf{V} δείξτε ότι ο ρυθμός αύξησης του παράγοντα Lorentz είναι

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}}{\gamma\rho_0 c^2}.$$

Δίνεται η σχέση $\gamma^2 \mathbf{V}^2 = (\gamma^2 - 1)c^2$ που προκύπτει από τον ορισμό του γ .
 (γ) Σε μια στάσιμη, χρύα ροή, σχολιάστε πως προκύπτει (δεν χρειάζεται απόδειξη) και τι εκφράζει η ποσότητα L , η οποία δίνεται από την έκφραση

$$L = \gamma \varpi V_\phi - \frac{\varpi B_\phi B_p}{4\pi\gamma\rho_0 V_p}.$$

14. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2008 – 2.5 μονάδες)

Έστω ότι μελετούμε μια υδροδυναμική, σφαιρικά συμμετρική ροή, η οποία έχει ταχύτητα $\mathbf{V} = V(r)\hat{r}$ και παράγοντα Λόρεντζ $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$, πυκνότητα στο σύστημα ηρεμίας της $\rho_0 = \rho_0(r)$ και πίεση $P = P(r)$. Η ροή ξεκινά από ακτίνα r_i με σχετικιστική θερμοκρασία $P(r_i) \gg \rho_0(r_i)c^2$ και έχει πολυτροπικό δείκτη $\Gamma = 4/3$.

(α) Ολοκληρώστε την εξίσωση συνέχειας $\nabla \cdot (\gamma\rho_0\mathbf{V}) = 0$ και απλοποιήστε το αποτέλεσμα αν $V \approx c$. Τι εκφράζει η σταθερά της ολοκλήρωσης;

Δίνεται η απόκλιση σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \eta \mu \theta} \frac{\partial(A_\theta \eta \mu \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \eta \mu \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}.$$

(β) Η εξίσωση ορμής δίνει το ολοκλήρωμα $\xi\gamma = \text{σταθερό}$ ενώ ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής δίνει $P/\rho_0^\Gamma = \text{σταθερό}$. Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις με το ολοκλήρωμα που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα δείξτε ότι όσο η θερμοκρασία παραμένει σχετικιστική ($\xi = 1 + 4P/\rho_0 c^2 \approx 4P/\rho_0 c^2$) ο παράγοντας Λόρεντζ αυξάνει γραμμικά με την απόσταση r . Επίσης δείξτε ότι η θερμοκρασία μειώνεται σαν $T \propto r^{-1}$, η πυκνότητα σαν $\rho_0 \propto r^{-3}$ και η πίεση σαν $P \propto r^{-4}$.

(γ) Μέχρι ποιά απόσταση ο παράγοντας Λόρεντζ αυξάνει; Ποιά είναι η μέγιστη τιμή του σαν συνάρτηση των αρχικών $\rho_0(r_i)$, $P(r_i)$, $\gamma(r_i)$;

15. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2009 – 3 μονάδες)

Έστω εκροή η οποία έχει θερμοκρασία T κοντά στην πηγή της (όπου $\gamma \approx 1$), με $6 \times 10^9 \text{K} \ll T \ll 10^{13} \text{K} \Leftrightarrow m_e c^2/k_B \ll T \ll m_p c^2/k_B$. Η εκροή είναι οπτικά αδιαφανής και αποτελείται από πρωτόνια με αριθμητική πυκνότητα n_p , ηλεκτρόνια, φωτόνια και ζεύγη ηλεκτρονίων–ποζιτρονίων, σε θερμοδυναμική ισορροπία. Δείξτε ότι ο μέγιστος παράγοντας Lorentz που θα αποκτήσει η εκροή λόγω θερμικής επιτάχυνσης είναι $\gamma = 180 \left(\frac{T}{10^{10} \text{K}}\right)^4 \left(\frac{n_p}{10^{27} \text{cm}^{-3}}\right)^{-1}$.

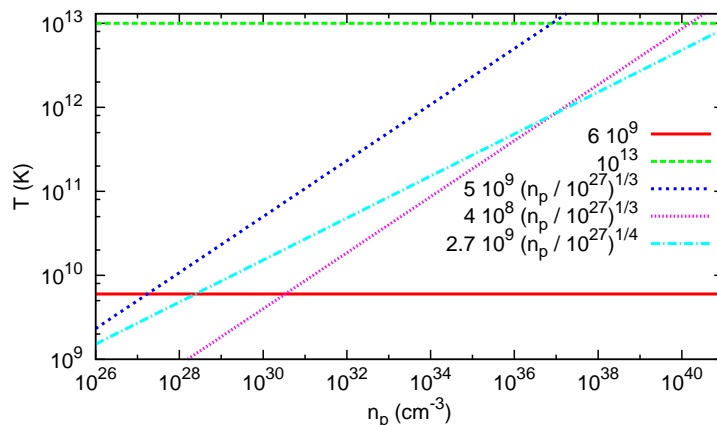
Θεωρείστε γνωστό ότι η πίεση των φωτονίων είναι $P_\gamma = \frac{1}{3} \alpha_{BB} T^4$ και η ενεργειακή τους πυκνότητα είναι $\rho_\gamma c^2 = 3P_\gamma$.

Επίσης, σε θερμοκρασίες $T \gg m_e c^2/k_B$ και πυκνότητες πρωτονίων τέτοιες ώστε $0.04 \ll \frac{T}{10^{10} \text{K}} \left(\frac{n_p}{10^{27} \text{cm}^{-3}}\right)^{-1/3} \ll 0.5 \Leftrightarrow n_p \ll n_{e\pm} \ll (m_p/m_e)n_p$ και $\frac{T}{10^{10} \text{K}} \gg 0.27 \left(\frac{n_p}{10^{27} \text{cm}^{-3}}\right)^{1/4} \Leftrightarrow n_p m_p c^2 \ll 11P_\gamma$, που σημαίνει ότι η πίεση και η ενεργειακή πυκνότητα κυριαρχούνται από τα φωτόνια και τα ζεύγη ηλεκτρονίων–ποζιτρονίων ενώ η μάζα κυριαρχείται από τα πρωτόνια, η πίεση των ζευγών ηλεκτρονίων–ποζιτρονίων είναι $P_{e\pm} = (7/4)P_\gamma$, η αριθμητική τους πυκνότητα είναι $n_{e\pm} = 0.833 P_\gamma/k_B T$ και η ενεργειακή τους πυκνότητα είναι $\rho_{e\pm} c^2 = 3P_{e\pm}$.

Δίνεται η έκφραση της ενθαλπίας ανά μάζα (προς c^2):

$$\xi = \frac{\text{πυκνότητα ενέργειας} + \text{πίεση}}{\text{πυκνότητα διατηρούμενης μάζας} \times c^2} = \frac{n_p m_p c^2 + \rho_\gamma c^2 + \rho_{e^\pm} c^2 + P_\gamma + P_{e^\pm}}{n_p m_p c^2},$$
 και οι σταθερές $\alpha_{BB} = 7.564 \times 10^{-15}$ (cgs), $m_p = 1.673 \times 10^{-24}$ g, $c = 3 \times 10^{10}$ cm s $^{-1}$.

Γραμμοσκιάστε στο διάγραμμα την περιοχή θερμοκρασιών–πυκνοτήτων όπου ισχύουν οι υποθέσεις που προαναφέρθηκαν.



Σχεδιάστε πάνω στο διάγραμμα την καμπύλη που αντιστοιχεί σε σταθερή τιμή του παράγοντα Lorentz, $\gamma = 500$. Ποιά η ελάχιστη τιμή της T για αυτή την τιμή του γ ;

16. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2010 – 2.5 μονάδες)

(α) Έστω μαγνητισμένη εκροή από επιφάνεια ΔS δίσκου προσαύξησης που περιστρέφεται Κεπλεριανά με $\Omega = \sqrt{GM/\varpi^3}$ γύρω από κεντρικό σώμα μάζας M . Υποθέτοντας για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο ότι $E = (V_\phi/c)B$, $|B_\phi| = B$, συμπληρώστε την ακόλουθη έκφραση της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας που εκλείεται ανά χρόνο:

$$L = ; \left(\frac{B}{10^{14} \text{G}} \right)^i ; \left(\frac{M}{10^8 M_\odot} \right)^j ; \left(\frac{\varpi}{3r_S} \right)^k ; \left(\frac{\Delta S}{2\pi\varpi^2} \right)^l \text{ ergs s}^{-1}.$$

(Πρέπει να βρείτε αριθμητικές τιμές για όλα τα ερωτηματικά της σχέσης.) Δίνονται $G = 6.67 \times 10^{-8}$ cm 3 g $^{-1}$ s $^{-2}$, $M_\odot = 2 \times 10^{33}$ g, $c = 3 \times 10^{10}$ cm s $^{-1}$ και $r_S = 2GM/c^2$.

(β) Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση εκτιμήστε το μαγνητικό πεδίο για εκροή από ενεργό κέντρο γαλαξία με $L = 10^{46}$ ergs s $^{-1}$, $M = 10^8 M_\odot$.

(γ) Επαναλάβετε για μια έκλαμψη ακτίνων γ με $L = 10^{50}$ ergs s $^{-1}$, $M = 1M_\odot$.

Βιβλιογραφία:

- Landau & Lifshitz, Statistical Physics
- Vlahakis & Königl, 2003, ApJ, 596, 1080

Κεφάλαιο 3

Αστροφυσικοί δίσκοι προσαύξησης

3.1 Εισαγωγή

Αστροφυσικοί δίσκοι προσαύξησης έχουν άμεσα ή έμμεσα παρατηρηθεί κυρίως στη βάση αστροφυσικών εκροών, γύρω από τα κεντρικά σώματα. Θεωρητικά είναι απαραίτητο να μελετηθούν, αφού καθορίζουν τις αρχικές συνθήκες των ροών. Πιο σημαντικό λόγο αποτελεί το γεγονός ότι η πρόσπτωση ύλης – η οποία συνοδεύεται από απώλεια μεγάλου ποσού δυναμικής ενέργειας – αποτελεί μηχανισμό έκλυσης ενέργειας με μεγάλη απόδοση (μεγαλύτερη από την απόδοση θερμοπυρηνικών αντιδράσεων στην περίπτωση που το κεντρικό σώμα είναι αρκετά συμπαγές). Οι δίσκοι σχηματίζονται όταν υπάρχει ύλη στο περιβάλλον του ισχυρού βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί μία μάζα M . Παραδείγματα αποτελούν η προσρόφηση μάζας από το συνοδό αστέρα σε ένα διπλό σύστημα, ή η προσρόφηση ύλης που μένει στο περιβάλλον ενός αστέρα νετρονίων ή μελανής οπής μετά από έκρηξη υπερκαινοφανούς.

3.2 Το πρόβλημα της απώλειας στροφορμής

Αν σκεφτούμε το πρόβλημα της κίνησης ενός μεμονωμένου σωματίου το οποίο κινείται μέσα σ' ένα βαρυτικό πεδίο που δημιουργεί μάζα M , εύκολα συμπεραίνουμε ότι το σωματίο εκτελεί τροχιά με σχήμα κωνικής τομής, οπότε αποκλείεται να πέσει πάνω στο κεντρικό σώμα (εξαιρούνται τα σωματία των οποίων η αρχική ταχύτητα έχει φορά προς το σώμα M), λόγω διατήρησης στροφορμής. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν σκεφτούμε τη συλλογική κίνηση υδροδυναμικού πλάσματος (θα εξετάσουμε μόνο την μη σχετικιστική κίνηση) στο επίπεδο κάθετα στην αρχική στροφορμή. Υποθέτοντας στάσιμη κατάσταση ($\partial/\partial t = 0$) και αξισυμμετρία ($\partial/\partial\phi = 0$) σ' ένα ιδανικό ρευστό όπως αυτό που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 2, καταλήγουμε στην διατήρηση της στροφορμής ανά μονάδα μάζας $L = \omega V_\phi$

(σημειώστε ότι $\xi\gamma \approx 1$ για μη σχετικιστική κίνηση). Ως εκ τούτου, αποκλείεται κάποια ποσότητα ύλης δm να προσπέσει στο κεντρικό αντικείμενο. Αντ' αυτού θα είναι υποχρεωμένη να περιστρέφεται επ' άπειρον στην γειτονιά μιας κυλινδρικής ακτίνας ϖ , οπότε δεν έχουμε την επιθυμητή μείωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας μεταξύ δm και M .

Απαιτείται να υπάρχει κάποιος μηχανισμός ο οποίος μέσω κάποιας ροπής δύναμης θα οδηγεί σε απώλεια στροφορμής, με άλλα λόγια σε ροή στροφορμής προς τα «έξω», δηλ. σε φορά αντίθετη από την κατεύθυνση προς το κεντρικό αντικείμενο. Αποτέλεσμα αυτού του μηχανισμού θα είναι η στροφορμή της μάζας δm να ελαττώνεται και τελικά η μάζα αυτή να προσπίπτει στο κεντρικό σώμα. Ταυτόχρονα, η απώλεια δυναμικής ενέργειας $GM\delta m(1/\varpi_f - 1/\varpi_i)$ μετασχηματίζεται σε κάποια άλλη μορφή ενέργειας, π.χ. περιστροφική κινητική ενέργεια, ακτινοβολία, θερμότητα, ενέργεια μαγνητικού πεδίου, κ.ο.κ.

Το πρόβλημα αυτό είναι από τα σημαντικότερα στην σύγχρονη αστροφυσική. Ποιοτικά τουλάχιστον μηχανισμοί απώλειας στροφορμής έχουν κατανοηθεί ικανοποιητικά μόνο τα τελευταία χρόνια: συνεχίζονται δε ακόμα και στις μέρες μας οι σχετικοί ποσοτικοί υπολογισμοί. Στο παρόν κεφάλαιο θα εξηγήσουμε ποιοτικά το πρόβλημα και τις πιθανές λύσεις του.

Οι πιθανοί μηχανισμοί δημιουργίας ροπής είναι οι εξής:

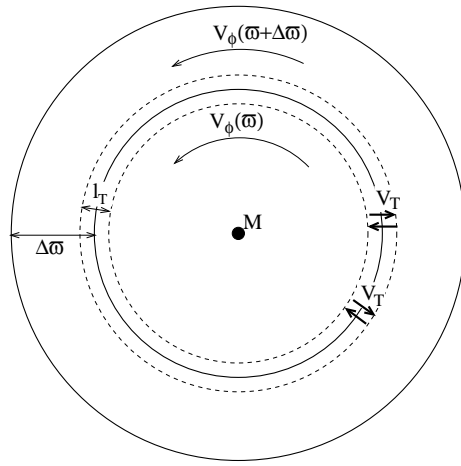
1. Εσωτερική τριβή. Γενικά όταν ένα ρευστό κινείται ούτως ώστε γειτονικές περιοχές να έχουν διαφορετικές ταχύτητες, τότε αναπτύσσονται δυνάμεις εσωτερικής τριβής οι οποίες μεταφέρουν ορμή από τα γρηγορότερα στα αργότερα μέρη της ροής, μετατρέποντας παράλληλα μέρος της ενέργειας σε θερμότητα (απώλειες). Για τη μη σχετικιστική περίπτωση οι δυνάμεις αυτές περιγράφονται από τους δύο τελευταίους όρους της εξίσωσης ορμής

$$\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla P - \underbrace{\rho_0 \nabla \mathcal{V}}_{\text{βαρύτητα}} + \mu_1 \nabla^2 \mathbf{V} + (\mu_1 + \mu_2) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}), \quad (3.1)$$

όπου μ_1 και μ_2 είναι οι συντελεστές μοριακού ιξώδους (έχουμε αμελήσει για απλούστευση δυνάμεις από ηλεκτρομαγνητικά πεδία). Οι αντίστοιχοι συντελεστές κινηματικού ιξώδους είναι $\nu_1 = \mu_1/\rho_0$ και $\nu_2 = \mu_2/\rho_0$, οι οποίες σε τάξη μεγέθους είναι ίσες με το γινόμενο της μέσης ελεύθερης διαδρομής με την θερμική ταχύτητα. Για εφαρμογές σε αστροφυσικούς δίσκους οι όροι ιξώδους στην εξίσωση ορμής είναι αμελητέοι, οπότε αυτός ο μηχανισμός δεν μπορεί να δώσει τα επιθυμητά αποτελέσματα.

2. Ενεργό ιξώδες λόγω τυρβώδους ροής. Σε μια τυρβώδη ροή μπορούμε να αναλύσουμε όλα τα μεγέθη (ρ_0 , \mathbf{V} , P) σε μία μέση τιμή ($\bar{\rho}_0$, $\bar{\mathbf{V}}$, \bar{P}) συν μια διακύμανση (ρ'_0 , \mathbf{V}' , P') η οποία έχει μηδενική χρονική μέση τιμή ($\langle \rho'_0 \rangle = 0$, $\langle \mathbf{V}' \rangle = 0$, $\langle P' \rangle = 0$). Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ορμής έχουμε μετά από πράξεις (και αφού πάρουμε τη μέση τιμή της ίδιας της εξίσωσης ορμής)

$$\bar{\rho}_0 \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}_i}{\partial t} + \bar{V}_j \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}_i}{\partial x^j} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x^i} - \bar{\rho}_0 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x^i} - \frac{\partial \langle \rho_0 V'_i V'_j \rangle}{\partial x^j}. \quad (3.2)$$



Σχήμα 3.1: Δίσκος προσαύξεσης περιστρεφόμενος διαφορικά γύρω από κεντρικό σώμα M . Λόγω τυρβώδους ροής (κίνηση V_T σε χαρακτηριστικό μήκος l_T), ροή στροφορμής από το εσωτερικό προς το εξωτερικό δακτυλίδι είναι δυνατή.

Ο τελευταίος όρος της παραπάνω εξίσωσης παριστάνει το «ιξώδες» λόγω τυρβώδους ροής, το οποίο μπορεί να ιδωθεί σαν μια επιπλέον δύναμη η οποία επηρεάζει τη μέση ροή (επίσης ο όρος αυτός μεταφέρει ενέργεια από σχηματισμούς μεγαλύτερης σε σχηματισμούς μικρότερης κλίμακας μέσα στην τυρβώδη ροή, με τελικό αποτέλεσμα ενεργειακές απώλειες). Το να περιγράψουμε αυτόν τον όρο είναι ένα δύσκολο πρόβλημα το οποίο μπορεί να μελετηθεί μόνο υπολογιστικά. Αναλυτικές μέθοδοι βασίζονται σε φαινομενολογικές εκτιμήσεις του όρου αυτού, όπως θα δούμε στα επόμενα.

Μια πιο απλή μελέτη της τυρβώδους ροής σ' ένα αστροφυσικό δίσκο ακολουθεί. Έστω ότι μελετούμε την κίνηση δακτυλιδιών πάχους $\Delta\varpi$ σ' ένα δίσκο γύρω από μια σημειακή μάζα M , δες σχήμα 3.1. Η Κεπλεριανή ταχύτητα είναι $V_\phi = \sqrt{GM/\varpi}$, ενώ η στροφορμή ανά μονάδα μάζας είναι $\varpi V_\phi = \sqrt{GM\varpi}$. Από αυτές τις σχέσεις βλέπουμε ότι όσο το ϖ ελαττώνεται η περιστροφική ταχύτητα αυξάνεται ενώ η στροφορμή ελαττώνεται. Συνεπώς για να κινηθεί ένα δακτυλίδι προς τα μέσα πρέπει να ελαττωθεί η στροφορμή του. Στο απλό μοντέλο που φαίνεται στο σχ. 3.1 και όπου δεν λαμβάνονται υπ' όψην οι ακτινικές κινήσεις της μέσης ροής, η ολική μάζα που ανταλλάσσεται μεταξύ του δακτυλιδιού $\Delta\varpi$ και του αμέσως εσωτερικού του είναι κατά μέσο όρο μηδέν. Παρ' όλα αυτά, κοιτάζοντας την μικροκλίμακα και τους σχηματισμούς της τυρβώδους ροής που χαρακτηρίζονται από ταχύτητες V_T και μέγεθος l_T , υλικό του δακτυλιδιού $\Delta\varpi$ μπορεί να περάσει στο εσωτερικό δακτυλίδι, και καθώς κινείται με μικρότερη ταχύτητα θα το επιβραδύνει. Όμοια, υλικό από το εσωτερικό δακτυλίδι μπορεί να περάσει προς τα έξω, και να συνεισφέρει στην επιτάχυνση του υλικού του εξωτερικού δακτυλιδιού το οποίο κινείται πιο αργά.

Αν η επιφανειακή πυκνότητα είναι

$$\Sigma(\varpi) = \frac{dm}{2\pi\varpi d\varpi}$$

και η γωνιακή ταχύτητα $\Omega = V_\phi/\varpi$, τότε η ροπή δύναμης που ασκείται πάνω σε μάζα $2\pi\varpi l_T \Sigma$ οφείλεται στην μεταβολή του Ω , και είναι

$$T = 2\pi\varpi l_T \Sigma \varpi^2 \frac{d\Omega}{d\varpi} \underbrace{\frac{d\varpi}{dt}}_{V_T}.$$

Το γινόμενο $\nu = l_T V_T$ λέγεται ιξώδες λόγω τυρβώδους ροής.¹ (Η ροπή αυτή αντιστοιχεί στον τελευταίο όρο της εξ. ορμής (3.2), που είναι ανάλογος του $\langle V_\varpi' V_\phi' \rangle$, με $V_\varpi' = V_T$ και $V_\phi' = \varpi l_T (d\Omega/d\varpi)$.)

Αν χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Κέπλερ βρίσκουμε

$$T = 2\pi\varpi\nu\Sigma\varpi^2 \frac{d\Omega}{d\varpi} = -3\pi\nu\Sigma\sqrt{GM\varpi}. \quad (3.3)$$

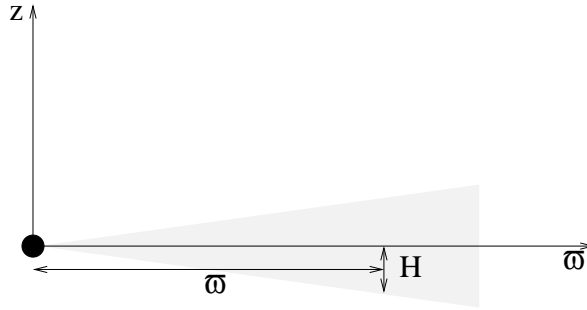
Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την σχέση στην § 3.3 όπου θα μελετήσουμε λεπτούς δίσκους.

3. Βαρυτικά κύματα. Μη πολλά υποσχόμενος μηχανισμός, λόγω χρονικών κλιμάκων αλλά και έντασης της βαρυτικής ακτινοβολίας.
4. Παλιρροιογόνες δυνάμεις. Όπως και ο προηγούμενος μηχανισμός, αυτές οι δυνάμεις δεν είναι σημαντικές σε αστροφυσικούς δίσκους.
5. Απώλεια στροφορμής λόγω μαγνητισμένων εκροών. Όπως έχουμε ήδη πει στο κεφάλαιο 2, η εκροή μεταφέρει στροφορμή (και το πεδίο αλλά και η ύλη μεταφέρουν στροφορμή). Η στροφορμή αυτή εκλύεται από τον δίσκο (ή γενικότερα την βάση της εκροής).
6. Μαγνητικά πεδία μέσω της μαγνητοπεριστροφικής αστάθειας. Οι Balbus & Hawley έχουν δείξει ότι σ' ένα δίσκο με σχετικά ασθενές μαγνητικό πεδίο, ο οποίος περιστρέφεται διαφορικά, αναπτύσσεται μια αστάθεια που ονομάστηκε μαγνητοπεριστροφική. Η αστάθεια αυτή οδηγεί στην ενίσχυση του μαγνητικού πεδίου και την δημιουργία τυρβώδους κατάστασης, όμοιας με την υδροδυναμική περίπτωση. Η διαφορά είναι ότι ο σημαντικός επιπλέον όρος στην εξίσωση ορμής είναι ανάλογος του $\langle B_\varpi' B_\phi' \rangle$.

Οι δύο τελευταίοι μηχανισμοί θεωρούνται ο περισσότερο υποσχόμενοι και αποτελούν εξαιρετικά ενδιαφέρον ερευνητικό πεδίο.

Στην συνέχεια θα περιγράψουμε ένα απλό μοντέλο λεπτών δίσκων.

¹Το γινόμενο αυτό είναι κατά κανόνα πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο από το μοριακό ιξώδες.



Σχήμα 3.2: Λεπτός δίσκος προσαύξεσης.

3.3 Λεπτοί ισόθερμοι δίσκοι

Ένας δίσκος χαρακτηρίζεται λεπτός αν το πάχος του $2H$ σε απόσταση ω από το κεντρικό σώμα είναι πολύ μικρότερο του ω . Στα παρακάτω θα αμελήσουμε την ιδιοβαρύτητα του δίσκου (δηλ. θεωρούμε ότι η μάζα του είναι πολύ μικρότερη από την κεντρική μάζα M). Επίσης θα αμελήσουμε επίδραση από μαγνητικά πεδία, όχι γιατί είναι ασήμαντη, αλλά για να απλουστεύσουμε κατά το δυνατό την συζήτηση. Τέλος, θα θεωρήσουμε ότι η θερμοκρασία είναι συνάρτηση μόνο της κυλινδρικής απόστασης ω και δεν εξαρτάται από την συντεταγμένη z .

3.3.1 Δομή λεπτού δίσκου

Η απλούστερη προσέγγιση για να καθορίσουμε την δομή του δίσκου, δηλ. την σχέση μεταξύ H και ω , δεσ σχ. 3.2, είναι να υποθέσουμε υδροστατική ισορροπία στην \hat{z} κατεύθυνση

$$-\frac{dP}{dz} = \rho_0 \frac{GM}{\omega^2} \frac{z}{\omega}.$$

Χρησιμοποιώντας ότι $dP = c_s^2 d\rho_0$, όπου c_s η ταχύτητα του ήχου, βρίσκουμε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η πυκνότητα $d\rho_0/\rho_0 = -(GM/c_s^2\omega^3)zdz$, της οποίας η λύση είναι²

$$\rho_0(\omega, z) = \rho_0(\omega, z=0)e^{-(z/H)^2}, \quad \text{όπου } H = \frac{c_s\sqrt{2}}{\sqrt{GM/\omega^3}}.$$

Η εξίσωση ορμής στην $\hat{\omega}$ κατεύθυνση είναι

$$V_\omega \frac{dV_\omega}{d\omega} - \frac{V_\phi^2}{\omega} = -\frac{GM}{\omega^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial \omega}.$$

Θεωρώντας ότι η κυρίαρχη δύναμη στην $\hat{\omega}$ κατεύθυνση είναι η δύναμη βαρύτητας, δηλ. αμελώντας την κλίση της πίεσης στην $\hat{\omega}$ κατεύθυνση αλλά και την

²Θέτοντας $zdz \sim H^2$ και $d\rho_0 \sim -\rho_0$ (η πυκνότητα στο επίπεδο $z=0$ είναι πολύ μεγαλύτερη από την πυκνότητα στην επιφάνεια του δίσκου), βρίσκουμε προσεγγιστικά $H = c_s/(\sqrt{GM/\omega^3})$, πολύ κοντά στο ακριβέστερο αποτέλεσμα που προκύπτει από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

δύναμη αδράνειας που σχετίζεται με την ταχύτητα V_{ϖ} , προκύπτει ότι το ρευστό περιστρέφεται Κεπλεριανά, $V_{\phi} \approx \varpi\Omega = \sqrt{GM/\varpi}$. Αντικαθιστώντας στην $H = c_s\sqrt{2}/\sqrt{GM/\varpi^3}$, βρίσκουμε ότι

$$\frac{H}{\varpi} = \frac{c_s\sqrt{2}}{V_{\phi}}. \quad (3.4)$$

Αυτός ο λόγος πρέπει να είναι $\ll 1$, για να είναι αυτοσυνεπής ο υπολογισμός και ο δίσκος να είναι πράγματι λεπτός.

3.3.2 Εξίσωση συνέχειας

Λόγω της ακτινικής ταχύτητας $V_{\varpi} (< 0)$, μάζα κινείται προς το κεντρικό σώμα. Από ένα δακτυλίδι που βρίσκεται μεταξύ ϖ και $\varpi + \Delta\varpi$, σε χρόνο $\Delta t = \Delta\varpi/(-V_{\varpi})$ περνάει μάζα $2\pi\varpi\Delta\varpi\Sigma$, όπου Σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα ($\Sigma = 2H\rho_0$). Άρα

$$\dot{M}_a = \Sigma 2\pi\varpi(-V_{\varpi}) = \sigma\varpi\dot{\varpi}$$

είναι ο ρυθμός προσρόφησης της ύλης, ο οποίος, για στάσιμη κατάσταση, είναι ίδιος σε όλα τα ϖ . (Η \dot{M}_a δεν πρέπει να συγχέεται με τον ρυθμό εκρεόμενης μάζας \dot{M} που εξετάσαμε στο κεφάλαιο 2. Πρακτικά, μόνο ένα μικρό μέρος της ύλης που κινείται προς το κέντρο καταφέρνει να διαφύγει δημιουργώντας εκροή, δηλ. $\dot{M} \ll \dot{M}_a$.)

3.3.3 Απώλεια στροφορμής

Η ροπή που ασκείται σ' ένα δακτυλίδι από ϖ ως $\varpi + \Delta\varpi$, είναι $\Delta T = \Delta\varpi dT/d\varpi$, και συνδέεται με την απώλεια στροφορμής:

$$\Delta\varpi \frac{dT}{d\varpi} = -\Delta\varpi \frac{d(\dot{M}_a\varpi V_{\phi})}{d\varpi} \Leftrightarrow \frac{dT}{d\varpi} = \frac{d(2\pi\varpi^3\Sigma V_{\varpi}\Omega)}{d\varpi}.$$

(Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την αξιμουθιακή συνιστώσα της εξίσωσης ορμής.) Η τελευταία ολοκληρώνεται κατευθείαν και δίνει

$$\nu\Sigma \frac{d\Omega}{d\varpi} = \Sigma V_{\varpi}\Omega + \frac{\mathcal{C}}{2\pi\varpi^3},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την εξ. (3.3). Αν όλη η ύλη πέφτει στο κεντρικό σώμα και αρχίζει να περιστρέφεται μαζί μ' αυτό σε απόσταση ϖ_{in} , τότε η σταθερά της ολοκλήρωσης βρίσκεται $\mathcal{C} = -(2\pi\varpi^3\Sigma V_{\varpi}\Omega)_{in} = (\varpi^2\Omega)_{in}\dot{M}_a$. Στο σημείο ϖ_{in} είναι $d\Omega/d\varpi = 0$, και $\Omega = \sqrt{GM/\varpi_{in}^3}$, οπότε $\mathcal{C} = \dot{M}_a\sqrt{GM\varpi_{in}}$. Τελικά, αφού χρησιμοποιήσουμε τον Κεπλεριανό νόμο $\Omega = \sqrt{GM/\varpi^3}$, βρίσκουμε

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}_a}{3\pi} \left(1 - \sqrt{\frac{\varpi_{in}}{\varpi}} \right), \quad (3.5)$$

σχέση μεταξύ της ροής μάζας και του «ιξώδους».

3.3.4 Ενεργειακές απώλειες

Το «ιξώδες», όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οδηγεί σε ενεργειακές απώλειες. Η ροή της ενέργειας που χάνεται είναι ανάλογη της ροπής T , αφού το έργο της δύναμης ιξώδους είναι σε μια περιστροφή $T\Delta\phi = 2\pi T$. Άρα η ενέργεια που χάνεται ανά μονάδα χρόνου και ανά επιφάνεια του δίσκου είναι (λαμβάνοντας υπόψη και τις δύο επιφάνειες του δίσκου)

$$\frac{2\pi T}{(2\pi/d\Omega)2\pi\varpi d\varpi} = \frac{9}{8}\nu\Sigma\frac{GM}{\varpi^3} = \frac{3GM\dot{M}_a}{8\pi\varpi^3} \left(1 - \sqrt{\frac{\varpi_{in}}{\varpi}}\right).$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ανεξάρτητο από το ιξώδες ν !

3.3.5 Εκπεμπόμενη ισχύς

Η προηγούμενη εξίσωση συνεπάγεται ότι καθώς η ύλη εισρέει, από κάθε δακτυλίδι του δίσκου με επιφάνεια $2 \times 2\pi\varpi\Delta\varpi$ (λαμβάνοντας υπόψη και τις δυο επιφάνειες του δίσκου) χάνεται ισχύς

$$\frac{3GM\dot{M}_a}{2\varpi^2} \left(1 - \sqrt{\frac{\varpi_{in}}{\varpi}}\right) \Delta\varpi.$$

Η ολική ισχύς που χάνεται είναι

$$\mathcal{L} = \int_{\varpi_{in}}^{\infty} \frac{3GM\dot{M}_a}{2\varpi^2} \left(1 - \sqrt{\frac{\varpi_{in}}{\varpi}}\right) d\varpi = \frac{GM\dot{M}_a}{2\varpi_{in}},$$

δηλ. μισή από την απώλεια δυναμικής ενέργειας.

Αν η απόσταση ϖ_{in} είναι συγκρίσιμη με την ακτίνα Schwarzschild r_g , τότε η απόδοση σε μετασχηματισμό της εισρέουσας ύλης σε ενέργεια είναι $\mathcal{L}/\dot{M}_a c^2 = r_g/4\varpi_{in}$. Η απόδοση αυτή μπορεί να γίνει πολύ μεγάλη για συμπαγή αντικείμενα: γίνεται μέγιστη αν το κεντρικό σώμα είναι περιστρεφόμενη μελανή οπή, οπότε $\varpi_{in} \sim r_g$. Κατά κανόνα ξεπερνάει κατά πολύ την απόδοση κατά την πυρηνική καύση του υδρογόνου (η οποία είναι 0.007).

Η πιο απλή υπόθεση για το τι γίνεται αυτή η ισχύς είναι να υποθέσουμε ότι ακτινοβολείται (η απλοϊκή αυτή υπόθεση δεν ισχύει πάντα: σε πολλές περιπτώσεις η ισχύς μπορεί να οδηγήσει σε δημιουργία στέμματος ή στην ενίσχυση μαγνητικών πεδίων). Αν επιπλέον ο δίσκος είναι οπτικά αδιαφανής η ακτινοβολία είναι μέλανος σώματος, με ενεργό θερμοκρασία που μπορεί να βρεθεί από τον νόμο Stefan - Boltzmann

$$T_{eff} = \left[\frac{3GM\dot{M}_a}{8\pi\sigma_{SB}} \left(1 - \sqrt{\frac{\varpi_{in}}{\varpi}}\right) \right]^{1/4} \varpi^{-3/4}.$$

Όπως βλέπουμε, σ' αυτή την περίπτωση η θερμοκρασία αυξάνει αρκετά γρήγορα καθώς κινούμαστε προς το κεντρικό σώμα.

3.3.6 Εκπεμπόμενο φάσμα

Η θερμοκρασία σε ένα λεπτό αστροφυσικό δίσκο εξαρτάται από την απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Για κάθε δαχτυλίδι του δίσκου το οποίο εκπέμπει σαν μέλαν σώμα θερμοκρασίας $T(\varpi)$ η φασματική ένταση ακτινοβολίας είναι ίση με την συνάρτηση Planck

$$I_\nu = \frac{\frac{2h\nu^3}{c^2}}{\exp\left[\frac{h\nu}{k_B T(\varpi)}\right] - 1}, \quad T(\varpi) = \left[\frac{3GM\dot{M}_a}{8\pi\sigma_{\text{SB}}}\right]^{1/4} \varpi^{-3/4}.$$

(Θεωρήσαμε $1 - \sqrt{\varpi_{in}/\varpi} \approx 1$ κάτι που ισχύει σε όλο το δίσκο εκτός από αποστάσεις πολύ κοντά στην ϖ_{in} . Σημειώστε επίσης ότι ν εδώ είναι η συχνότητα και όχι ο συντελεστής ιξώδους για τον οποίο χρησιμοποιήσαμε το ίδιο σύμβολο στα προηγούμενα.) Επομένως, για ένα παρατηρητή σε απόσταση d από το δίσκο και με γωνία παρατήρησης i (γωνία μεταξύ της ευθείας παρατήρησης και του άξονα περιστροφής του δίσκου) η ροή ακτινοβολίας είναι

$$F_\nu = \frac{1}{d^2} \int_{\varpi_{in}}^{\varpi_{out}} I_\nu 2\pi\varpi d\varpi \sin i,$$

όπου θεωρήσαμε ότι υπάρχει εξωτερική ακτίνα του δίσκου ϖ_{out} .

Ανάλογα με την τιμή της συχνότητας έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

- Rayleigh – Jeans όριο: Αν $h\nu \ll k_B T(\varpi_{out})$ τότε η ανισότητα $h\nu \ll k_B T(\varpi)$ ισχύει σε όλο το δίσκο (αφού η ελάχιστη θερμοκρασία αντιστοιχεί στην εξωτερική ακτίνα) και η ροή προκύπτει

$$F_\nu = \frac{1}{d^2} \int_{\varpi_{in}}^{\varpi_{out}} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{2\pi\varpi d\varpi \sin i}{\frac{h\nu}{k_B T(\varpi)}} \propto \nu^2,$$

δηλαδή κυριαρχείται από την ακτινοβολία του εξωτερικού μέρους του δίσκου.

- Wien όριο: Αν $h\nu \gg k_B T(\varpi_{in})$ τότε η ανισότητα $h\nu \gg k_B T(\varpi)$ ισχύει σε όλο το δίσκο (αφού η μέγιστη θερμοκρασία αντιστοιχεί στην εσωτερική ακτίνα) και η ροή προκύπτει

$$F_\nu = \frac{1}{d^2} \int_{\varpi_{in}}^{\varpi_{out}} \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left[-\frac{h\nu}{k_B T(\varpi)}\right] 2\pi\varpi d\varpi \sin i \propto \exp\left[-\frac{h\nu}{k_B T(\varpi_{in})}\right],$$

δηλαδή ελαττώνεται εκθετικά στη συχνότητα $k_B T(\varpi_{in})/h$. Τα ζεστότερα στρώματα του δίσκου – δηλ. αυτά στις μικρότερες ακτίνες – συνεισφέρουν περισσότερο.

- Σε ενδιάμεσες συχνότητες, σημαντικό ρόλο παίζουν οι συνεισφορές από τα ενδιάμεσα μέρη του δίσκου. Μπορούμε να απλοποιήσουμε το ολοκλήρωμα θέτοντας $\varpi_{in} = 0$ και $\varpi_{out} = \infty$, οπότε

$$F_\nu = \frac{1}{d^2} \int_0^\infty \frac{\frac{2h\nu^3}{c^2}}{\exp\left[\frac{h\nu}{k_B \left(\frac{3GM\dot{M}_a}{8\pi\sigma_{\text{SB}}}\right)^{1/4} \varpi^{-3/4}}\right] - 1} 2\pi\varpi d\varpi \sin i, .$$

Αλλάζοντας μεταβλητή στο ολοκλήρωμα $\zeta = \frac{h\nu}{k_B \left(\frac{3GM\dot{M}_a}{8\pi\sigma_{SB}} \right)^{1/4} \varpi^{-3/4}}$ προκύπτει

$$F_\nu \propto \nu^{1/3}.$$

Άρα, για το εκπεμπόμενο φάσμα F_ν μπορούμε να πούμε ότι αποτελείται από τρία μέρη: (1) Απότομο νόμο δύναμης ν^2 σε μικρές συχνότητες από την μικρότερη θερμοκρασία στο εξωτερικό μέρος του δίσκου ϖ_{out} . (2) Νόμο δύναμης $\nu^{1/3}$ σε ενδιάμεσες συχνότητες από το άθροισμα ακτινοβολίας μέλανος σώματος από πολλές θερμοκρασίες (κάθε δακτυλίδι έχει διαφορετική θερμοκρασία). (3) Εκθετική πτώση $e^{-h\nu/k_B T_{max}}$ σε υψηλές συχνότητες λόγω της μέγιστης θερμοκρασίας κοντά στο ϖ_{in} .

3.3.7 Η α -παράμετρος

Παρ' ότι καταφέραμε να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα απλά υποθέτοντας στάσιμη κατάσταση, η ακριβής δομή του δίσκου εξαρτάται από το ιξώδες και πως αυτό μεταβάλλεται μέσα στο δίσκο. Η πρώτη προσπάθεια να λυθεί αυτό το πρόβλημα έγινε από τους Shakura & Sunyaev (1973), οι οποίοι κατάφεραν να λύσουν το πρόβλημα της δομής του δίσκου υποθέτοντας ότι το ιξώδες είναι ανάλογο του γινομένου $c_s H$. Η σταθερά αναλογίας ονομάστηκε α -παράμετρος, και οι δίσκοι στους οποίους $\nu = \alpha c_s H$ ονομάστηκαν α -δίσκοι.

3.4 Άλλα μοντέλα δίσκων

Η εξίσωση ενέργειας για το ρευστό που εισρέει (ο πρώτος νόμος θερμοδυναμικής) γράφεται

$$\rho_0 V_\varpi T \frac{ds}{d\varpi} = q^+ - q^- = q^{adv},$$

όπου s είναι η εντροπία ανά μονάδα μάζας, q^+ η θερμότητα που παράγεται λόγω του ιξώδους, q^- οι ενεργειακές απώλειες λόγω ακτινοβολίας, και q^{adv} είναι η θερμότητα που μένει και κινείται μαζί με τη ροή. Ανάλογα με τον λόγο q^+/q^- έχουμε τις περιπτώσεις:

- $q^+ \approx q^- \gg q^{adv}$: Όλη η ενέργεια που παράγεται λόγω ιξώδους ακτινοβολείται. Παράδειγμα αυτής της περίπτωσης αποτελεί το μοντέλο του λεπτού δίσκου Shakura & Sunyaev (1973), το οποίο περιγράψαμε προηγουμένως.
- $q^{adv} \approx q^+ \gg q^-$: Αυτή η περίπτωση ονομάζεται advection-dominated accretion flow (ADAF) διότι όλη η ενέργεια που παράγεται λόγω ιξώδους μένει στο ρευστό και κινείται μαζί μ' αυτό προς το κεντρικό σώμα.
- $-q^{adv} \approx q^- \gg q^+$: Σ' αυτή την περίπτωση το ιξώδες είναι αμελητέο, αλλά η εντροπία του ρευστού ελαττώνεται λόγω ακτινοβολίας. Έχουμε δηλ. ροές που χρυσώνουν λόγω ακτινοβολίας (cooling flows).

Όπως είπαμε και στην § 3.2, τα μαγνητικά πεδία παίζουν σπουδαίο ρόλο και στους αστροφυσικούς δίσκους. Ήδη μιλήσαμε για την μαγνητοπεριστροφική αστάθεια η οποία αποτελεί ουσιαστικά ένα μέσον για να δημιουργηθεί ένα ενεργό (ή ανώμαλο όπως συνηθίζεται να λέγεται) ιξώδες.

Μια άλλη προσπάθεια αποτελεί η περίπτωση όπου ισχυρά μαγνητικά πεδία μεγάλης κλίμακας διαπερνούν τον δίσκο. Σ' αυτή την περίπτωση χρειάζεται κάποιος μηχανισμός διάχυσης ώστε η ύλη να περνάει «μέσα» από το μαγνητικό πεδίο, δηλ. να τέμνει τις δυναμικές γραμμές. Μηχανισμοί διάχυσης αποτελούν η Ωμική διάχυση,³ ή η ambipolar diffusion.⁴

³Όταν η ειδική αγωγιμότητα είναι πεπερασμένη τότε ο νόμος του Ωμ γράφεται $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}/c)$. Χρησιμοποιώντας τους νόμους του Μάξουελ (αμελώντας το ρεύμα μετατόπισης το οποίο είναι μικρό) βρίσκουμε

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{B} \times \mathbf{V}) = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B},$$

η οποία είναι μια εξίσωση διάχυσης, και επιτρέπει την κίνηση ύλης όχι μόνο πάνω σ' αυτές, αλλά και κάθετα.

⁴Όταν η ύλη ενός δίσκου δεν είναι πλήρως ιονισμένη (π.χ. υπάρχει ουδέτερη σκόνη), τότε μόνο τα φορτισμένα σωμάτια είναι «συνδεδεμένα» με το μαγνητικό πεδίο και δέχονται άμεσα δύναμη απ' αυτό. Τα ουδέτερα δέχονται έμμεσα δύναμη από το πεδίο μέσω των κρούσεων με τα φορτισμένα σωμάτια. Έτσι αναπτύσσεται μια ολίσθηση (drift), δηλ. διαφορά ταχυτήτων μεταξύ των δυο ρευστών η οποία σαν τελικό αποτέλεσμα έχει ξανά την δυνατότητα ύλη να περνάει μέσα από δυναμικές γραμμές μαγνητικού πεδίου.

3.5 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η θερμοκρασία ενός λεπτού δίσκου είναι μέγιστη σε απόσταση $(49/36) \times \varpi_{in}$, όπου ϖ_{in} είναι η απόσταση όπου δίσκος και κεντρικό σώμα περιστρέφονται με ίδια γωνιακή ταχύτητα. Υπολογίστε την μέγιστη αυτή θερμοκρασία για πρόπτωση σε μια γρήγορα περιστρεφόμενη μελανή οπή με μάζα $M_8 10^8 M_\odot$. Δίνεται $M_a = \dot{M}_1 M_\odot \text{yr}^{-1}$.
2. Αν η θερμοκρασία ενός λεπτού και οπτικά αδιαφανούς δίσκου είναι ίση με την ενεργό θερμοκρασία, ποιό είναι το σχήμα του (δηλ. η συνάρτηση $H(\varpi)$ που καθορίζει την επιφάνειά του);
3. Η παράμετρος α των Shakura & Sunyaev, δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη της μονάδας. Εξηγήστε γιατί.
4. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2004 – 2.5 μονάδες)

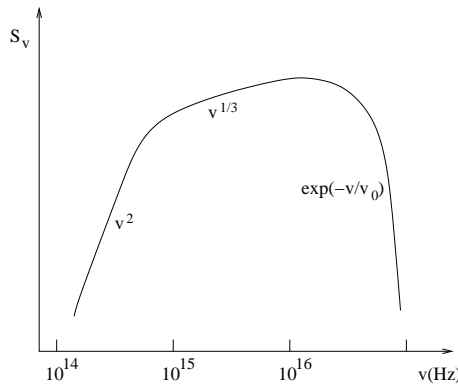
(α) Υπολογίστε την ενεργό θερμοκρασία ενός λεπτού δίσκου προσάυξης. Συγκεκριμένα βρείτε τα T_0 , n_1 , n_2 και n_3 στη σχέση

$$T \approx T_0 \left[\frac{\dot{M}}{\dot{M}_E} \right]^{n_1} \left[\frac{M}{10^8 M_\odot} \right]^{n_2} \left[\frac{\varpi}{r_g} \right]^{n_3}, \text{ όπου } \dot{M}_E = \frac{4\pi G M m_p}{10\sigma_{\text{Tc}}}, r_g = \frac{2GM}{c^2}.$$

Σε ποίο μέρος του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος περιμένουμε να εκπέμπει ένας δίσκος γύρω από σώμα $M = 10^8 M_\odot$ όταν $\dot{M} \approx \dot{M}_E$;

(β) Παρατηρήσεις του δίσκου έδωσαν το δίπλα φάσμα. Εξηγήστε την συμπεριφορά του φάσματος στις τρεις περιοχές που διακρίνονται. Αν ξέρουμε ότι $M = 10^8 M_\odot$ και $\dot{M} \approx \dot{M}_E$, ποιές είναι οι διαστάσεις του δίσκου (τα ϖ_{in} , ϖ_{out});

Δίνονται $h = 6.62 \times 10^{-27} \text{ erg s}$, $k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$, $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$, $M_\odot = 2 \times 10^{33} \text{ g}$, $m_p = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$, $\sigma_{\text{SB}} = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{K}^{-4} \text{s}^{-1}$, $\sigma_{\text{T}} = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$, $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ και ότι η μέγιστη εκπομπή ενός μέλανος σώματος συμβαίνει στη συχνότητα $2.8k_B T/h$.



5. (Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2005 – 3.0 μονάδες)
 - (α) Περιγράψτε το πρόβλημα απώλειας στροφορμής στους αστροφυσικούς δίσκους. Πόση είναι η στροφορμή που πρέπει να χαθεί ανά μονάδα μάζας και ποιός είναι ο ρυθμός απώλειας στροφορμής (στροφορμή ανά μονάδα χρόνου) για ένα δίσκο με ρυθμό προσρόφησης \dot{M}_a ;
 - (β) Ποιά η ροή στροφορμής ανά ροή μάζας που μεταφέρει μια μαγνητισμένη εκροή; Ποιός ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής (στροφορμή ανά μονάδα χρόνου); Δείξτε ότι αν η ροή ενέργειας κοντά στη βάση της εκροής κυριαρχείται από τη ροή Poynting τότε και η στροφορμή κυριαρχείται από το μέρος

που αντιστοιχεί στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

(γ) Σ' ένα δίσκο που περιστρέφεται Κεπλεριανά γύρω από μελανή οπή μάζας $M = 10^8 M_\odot$ και έχει εσωτερική/εξωτερική ακτίνα 6 και 8 GM/c^2 αντίστοιχα, ο ρυθμός προσρόφησης είναι $\dot{M}_a = 0.1 M_\odot yr^{-1}$. Ποιά είναι η ισχύς της μηχανικής ενέργειας που απελευθερώνεται καθώς η ύλη εισρέει προς το κέντρο;

Από τον δίσκο αυτό εκρέει ύλη με ρυθμό $\dot{M}_w \ll \dot{M}_a$, και στη βάση της εκροής $B_p = 10^4 G$. Αν υποθέσουμε ότι όλη η μηχανική ενέργεια που απελευθερώνεται λόγω της προσρόφησης μετατρέπεται σε ροή Poynting, να βρεθεί το τοροειδές μαγνητικό πεδίο B_ϕ . Δείξτε ότι σε αυτή την περίπτωση, η στροφορμή που χάνεται από τον δίσκο είναι ίδιας τάξης μεγέθους με την στροφορμή που αποκτά η εκροή.

(Δίνονται $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $M_\odot = 2 \times 10^{33} \text{ g}$, $1 \text{ yr} = 3 \times 10^7 \text{ s}$, $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ και οι τύποι $\xi \gamma \varpi V_\phi - \varpi B_\phi / \Psi_A = L$, $\xi \gamma - \omega \Omega B_\phi / (\Psi_A c^2) = \mu$, $\Psi_A = (2\gamma \rho_0 V_p \delta S) / (B_p \delta S / 2\pi)$.)

6. (Θέμα εξετάσεων Μαΐου 2005 (επί πτυχίω) – 2.5 μονάδες)

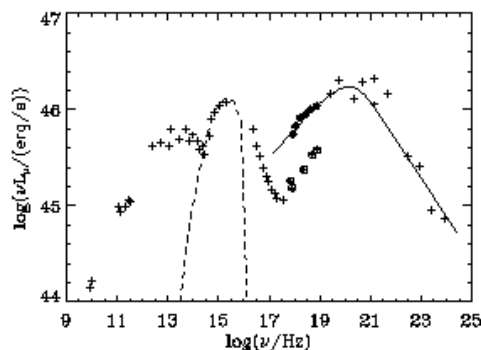
(α) Ποιοί είναι οι πιθανοί μηχανισμοί απώλειας στροφορμής στους αστροφυσικούς δίσκους;

(β) Έστω ένας αστροφυσικός δίσκος που περιστρέφεται Κεπλεριανά στον οποίο υπάρχει τυρβώδης ροή που χαρακτηρίζεται από μήκος l_T και ταχύτητα V_T . Δείξτε ότι η ροπή που ασκείτε σε μάζα $2\pi \varpi l_T \Sigma$ (όπου Σ η επιφανειακή πυκνότητα του δίσκου) είναι $T = -3\pi l_T V_T \Sigma \sqrt{GM\varpi}$.

7. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2005 – 2.5 μονάδες)

(α) Υπολογίστε την ενεργό θερμοκρασία ενός λεπτού δίσκου προσαύξησης σαν συνάρτηση της απόστασης ϖ , της εσωτερικής ακτίνας του δίσκου ϖ_{in} και της ολικής ισχύος που εκπέμπει ο δίσκος L . Σε ποιά απόσταση η θερμοκρασία είναι μέγιστη; Θεωρείστε γνωστό ότι κάθε δακτυλίδι του δίσκου χάνει ισχύ $(3GM\dot{M}_a/2\varpi^2) [1 - (\varpi_{in}/\varpi)^{1/2}] \Delta\varpi$. Επίσης ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{-3} [1 - (a/x)^{1/2}]$ αποκτά μέγιστη τιμή στο $x = 49a/36$.

(β) Δίπλα μπορείτε να δείτε το φάσμα του quasar 3C 273. Ποιό μέρος του φάσματος μπορούμε να πούμε ότι οφείλεται στο δίσκο προσαύξησης; Αν για την πηγή 3C 273 ξέρουμε ότι η ολική ισχύς που εκπέμπει ο δίσκος είναι⁵ $L = 10^{46} \text{ ergs s}^{-1}$, εκτιμήστε τις διαστάσεις του δίσκου, δηλ. τα ϖ_{in} , ϖ_{out} .



Υπάρχει συμβατότητα με τη μάζα της κεντρικής μελανής οπής η οποία έχει

⁵ Αυτό το δεδομένο δεν είναι απαραίτητο να δοθεί, αφού από το φάσμα του σχήματος φαίνεται ότι στο μέρος που αντιστοιχεί στο δίσκο το μέγιστο του νL_ν είναι περίπου $10^{46} \text{ ergs s}^{-1}$, και $L = \int L_\nu d\nu = \int \nu L_\nu d \log_e \nu = \int \nu L_\nu d \log_{10} \nu / d \log_{10} e \approx (\nu L_\nu)_{\max}$.

υπολογιστεί $M \approx 10^9 M_\odot$;

Δίνονται $h = 6.62 \times 10^{-27}$ erg s, $k_B = 1.38 \times 10^{-16}$ erg K $^{-1}$, $\sigma_{SB} = 5.67 \times 10^{-5}$ erg cm $^{-2}$ K $^{-4}$ s $^{-1}$, $c = 3 \times 10^{10}$ cm s $^{-1}$, $G = 6.67 \times 10^{-8}$ cm 3 g $^{-1}$ s $^{-2}$, $M_\odot = 2 \times 10^{33}$ g και ότι η μέγιστη εκπομπή ενός μέλανος σώματος συμβαίνει στη συχνότητα $2.8k_B T/h$.

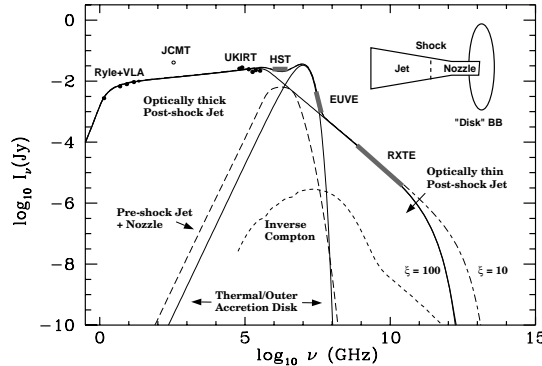
8. (Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2006 – 2.5 μονάδες)

(α) Δύο σημαντικές κατηγορίες αστροφυσικών δίσκων είναι οι λεπτοί δίσκοι και οι advection-dominated accretion flows (ADAFs). Ποιά είναι η διαφορά τους; Εκπέμπουν ακτινοβολία; Με τι φάσμα;

(β) Οι δίσκοι σε διπλά συστήματα ακτινοβολίας X (X-ray binaries) αποτελούνται από ADAF μέχρι κάποια κυλινδρική απόσταση ω_{tr} από το συμπαγές σώμα και λεπτό δίσκο για $\omega > \omega_{tr}$.

Το σύστημα XTE J1118+480 είναι ένα τέτοιο διπλό σύστημα, το οποίο απέχει από εμάς $d = 1.8$ kpc και στο οποίο το συμπαγές αστέρι είναι μια μελανή οπή μάζας $M = 6M_\odot$ (ο συνοδός είναι ένα «κανονικό» αστέρι σχετικά μικρής μάζας).

Δίπλα μπορείτε να δείτε το φάσμα από αυτό το σύστημα (από το άρθρο Markoff, S., Falcke, H., & Fender, R. 2001, A&A, 372, L25). Από το φάσμα μας ενδιαφέρει μόνο το μέρος που προέρχεται από το δίσκο, το οποίο σημειώνεται σαν «Thermal/Outer Accretion Disk».



• (β1) Δείξτε ότι η ολική ισχύς που εκπέμπει ο δίσκος είναι $L_d \approx 10^{36}$ ergs s $^{-1}$. (Υποθέστε ότι η εκπομπή ακτινοβολίας είναι ισοτροπική – κάτι που δεν αλλάζει την τάξη μεγέθους του αποτελέσματος. Επίσης $L_d = \int L_\nu d\nu = \int \nu L_\nu d \log_e \nu \approx (\nu L_\nu)_{\max}$ και $1 \text{ pc} = 3 \times 10^{18}$ cm, $1 \text{ Jy} = 10^{-23}$ ergs s $^{-1}$ cm $^{-2}$ Hz $^{-1}$.)

• (β2) Δείξτε ότι η μέγιστη θερμοκρασία του λεπτού δίσκου είναι $T_d = 1.7 \times 10^5$ K. (Η μέγιστη εκπομπή ενός μέλανος σώματος συμβαίνει στη συχνότητα $2.8k_B T/h$.)

• (β3) Εξηγήστε περιγραφικά πως προκύπτουν οι σχέσεις $L = GMM\dot{M}/2\omega$, $T = [3GMM/8\pi\sigma_{SB}\omega^3]^{1/4}$. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις υπολογίστε την απόσταση ω_{tr} όπου ο δίσκος μεταπίπτει από ADAF σε λεπτό, καθώς και τον ρυθμό προσρόφησης \dot{M} . Σχολιάστε την τιμή ω_{tr}/r_S , όπου $r_S = 2GM/c^2$ η ακτίνα Schwarzschild.

• (β4) Εκτιμήστε το πάχος H του δίσκου στην απόσταση ω_{tr} . Είναι πράγματι λεπτός;

Δίνονται $h = 6.62 \times 10^{-27}$ erg s, $k_B = 1.38 \times 10^{-16}$ erg K $^{-1}$, $\sigma_{SB} =$

$5.67 \times 10^{-5} \text{erg cm}^{-2} \text{K}^{-4} \text{s}^{-1}$, $c = 3 \times 10^{10} \text{cm s}^{-1}$, $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$, $M_{\odot} = 2 \times 10^{33} \text{g}$, $m_p = 1.67 \times 10^{-24} \text{g}$, $1 \text{yr} = 3 \times 10^7 \text{s}$.

9. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2006 – 2.5 μονάδες)
 (α) Σε μια κατηγορία αστροφυσικών δίσκων προσαύξεσης ισχύει $H/\varpi \approx c_s/V_{\phi}$. Αποδείξτε αυτή τη σχέση αναφέροντας όλες τις υποθέσεις που οδηγούν σε αυτή.
 (β) Σε απειροστά λεπτούς δίσκους μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα έχει τη μορφή $\rho_0 = \Sigma(\varpi)\delta(z)$. Ποιά η φυσική σημασία του $\Sigma(\varpi)$; Δείξτε ότι η διατήρηση της μάζας οδηγεί σε ένα ολοκλήρωμα που συνδέει αυτή την ποσότητα με την συνιστώσα V_{ϖ} της ταχύτητας.
10. (Θέμα εξετάσεων Ιουλίου 2007 (επί πτυχίω) – 2.5 μονάδες)
 (α) Στους λεπτούς αστροφυσικούς δίσκους προσαύξεσης ορίζουμε την επιφανειακή πυκνότητα μάζας Σ . Η εξίσωση που εκφράζει τη διατήρηση μάζας μπορεί να ολοκληρωθεί και να οδηγήσει σε μια σχέση μεταξύ του ρυθμού προσρόφησης ύλης \dot{M}_a , της ακτινικής ταχύτητας V_{ϖ} και του Σ . Ποιά η σχέση αυτή; (Να αποδειχθεί.)
 (β) Υποθέτοντας υδροστατική ισορροπία στην \hat{z} κατεύθυνση με θερμοκρασία ανεξάρτητη του z , και Κεπλεριανή περιστροφή, δείξτε ότι $H/\varpi = c_s/V_{\phi}$.
 (γ) Αν η απώλεια στροφορμής που αντιστοιχεί σε ρυθμό προσρόφησης \dot{M}_a οφείλεται σε ενεργό ιξώδες, ο αντίστοιχος συντελεστής κινηματικού ιξώδους απαιτείται να ικανοποιεί την εξίσωση $\nu = (\dot{M}_a/3\pi\Sigma)(1 - \sqrt{\varpi_{\text{in}}/\varpi})$. Το ν βέβαια συνδέεται και με τη φυσική της τυρβώδους ροής: η σχέση αυτή δεν είναι εύκολο να βρεθεί. Για το λόγο αυτό οι Shakura & Sunyaev (1973, A&A, 24, 337) υπέθεσαν μια απλή εξάρτηση της μορφής $\nu = \alpha c_s H$, χρύβοντας όλη τη φυσική στην παράμετρο α . Οι δίσκοι στους οποίους ισχύει μια τέτοια σχέση ονομάστηκαν α -δίσκοι. Δείξτε ότι η ταχύτητα προσρόφησης $V_{\varpi}(\varpi)$ σε ένα α -δίσκο δίνεται από τη σχέση $V_{\varpi} = -\frac{3}{2} \frac{\alpha c_s^2/V_{\phi}}{1 - \sqrt{\varpi_{\text{in}}/\varpi}}$.
11. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2007 – 2.5 μονάδες)
 (α) Ποιοί οι πιθανοί μηχανισμοί απώλειας στροφορμής στους αστροφυσικούς δίσκους προσαύξεσης;
 (β) Στους λεπτούς αστροφυσικούς δίσκους προσαύξεσης ορίζουμε την επιφανειακή πυκνότητα μάζας Σ . Η εξίσωση που εκφράζει τη διατήρηση μάζας οδηγεί σε μια σχέση μεταξύ του Σ , του ρυθμού προσρόφησης ύλης \dot{M}_a και της ακτινικής ταχύτητας V_{ϖ} . Ποιά η σχέση αυτή; (Να αποδειχθεί.)
 (γ) Αν η απώλεια στροφορμής που αντιστοιχεί σε ρυθμό προσρόφησης \dot{M}_a οφείλεται σε τυρβώδη ροή, ο αντίστοιχος συντελεστής κινηματικού ιξώδους απαιτείται να ικανοποιεί την εξίσωση $\nu = (\dot{M}_a/3\pi\Sigma)(1 - \sqrt{\varpi_{\text{in}}/\varpi})$. Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με την διατήρηση της μάζας, δείξτε ότι το ν είναι της τάξης $\varpi|V_{\varpi}|$.
12. (Θέμα εξετάσεων Οκτωβρίου 2007 – 3.0 μονάδες)
 Έστω λεπτός αστροφυσικός δίσκος προσαύξεσης με ρυθμό προσρόφησης μάζας \dot{M}_a , γύρω από κεντρικό σώμα μάζας M .

(α) Από κάθε δακτυλίδι του δίσκου πάχους $\Delta\varpi$, χάνεται μηχανική ισχύς $3GM\dot{M}_a\Delta\varpi/2\varpi^2$. Αν αυτή ακτινοβολείται με φάσμα μέλανος σώματος ποιά η ενεργός θερμοκρασία του δίσκου σαν συνάρτηση της ακτίνας;

(β) Αν η θερμοκρασία του αερίου του δίσκου είναι ίση με την ενεργό θερμοκρασία, ποιά η εξάρτηση του c_s από την ακτίνα, δηλ. ποιός ο εκθέτης q στη σχέση $c_s \propto \varpi^q$; Ποιά η εξάρτηση του $H(\varpi) = c_s/\Omega$ από την ακτίνα, δηλ. ποιός ο εκθέτης q' στη σχέση $H \propto \varpi^{q'}$; Σχεδιάστε πρόχειρα το σχήμα του δίσκου.

(γ) Αν η απώλεια στροφορμής που αντιστοιχεί σε ρυθμό προσρόφησης \dot{M}_a οφείλεται σε τυρβώδη ροή, ο αντίστοιχος συντελεστής κινηματικού ιξώδους ν απαιτείται να ικανοποιεί την εξίσωση $\dot{M}_a = 3\pi\nu\Sigma$, όπου Σ η επιφανειακή πυκνότητα μάζας. Σε α -δίσκους, όπου $\nu = \alpha c_s H$ με $\alpha = \text{σταθερά} < 1$, βρείτε πως εξαρτάται η επιφανειακή πυκνότητα Σ από την ακτίνα (βρείτε τον αντίστοιχο εκθέτη). Πως εξαρτάται η πυκνότητα ρ_0 και η πίεση P από την ακτίνα;

(δ) Η εξίσωση που εκφράζει τη διατήρηση μάζας οδηγεί σε μια σχέση μεταξύ του Σ , του \dot{M}_a και της ακτινικής ταχύτητας V_ϖ . Ποιά η σχέση αυτή; (Να αποδειχθεί.) Συνδυάζοντας τη σχέση αυτή με την $\dot{M}_a = 3\pi\nu\Sigma$ δείξτε ότι σε α -δίσκους ισχύει $V_\varpi/c_s = -1.5 \alpha c_s/V_\phi$. Παρατηρήστε ότι σε λεπτούς δίσκους $|V_\varpi| \ll c_s$.

(ε) Η εξίσωση της ορμής στην $\hat{\varpi}$ κατεύθυνση είναι

$$V_\varpi \frac{dV_\varpi}{d\varpi} - \frac{V_\phi^2}{\varpi} = -\frac{GM}{\varpi^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial \varpi}.$$

Αντιστοιχίστε διαστατικά κάθε όρο με μέγεθος της μορφής $(\dots)^2/\varpi$ όπου (\dots) κάποια χαρακτηριστική ταχύτητα. Στη συνέχεια κατατάξτε τους όρους από περισσότερο σε λιγότερο σημαντικούς.

Κρατώντας τους δυο πιο σημαντικούς όρους προκύπτει ότι $V_\phi/\varpi \equiv \Omega \approx \Omega_K = \sqrt{GM/\varpi^3}$, δηλ. ότι το ρευστό περιστρέφεται Κεπλεριανά. Κρατήστε ακόμα ένα όρο (τον πιο σημαντικό από τους υπόλοιπους) για να απαντήσετε αν η περιστροφή είναι υπο- ή υπερ-Κεπλεριανή. Ποιά η σχετική διαφορά $|\Omega - \Omega_K|/\Omega_K$; Είναι σημαντική;

13. (Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2008 – 2.5 μονάδες)

(α) Ποιοί είναι οι πιθανοί μηχανισμοί απώλειας στροφορμής στους αστροφυσικούς δίσκους;

(β) Έστω λεπτός αστροφυσικός δίσκος προσάξησης στον οποίο δεν ισχύει η προσέγγιση της ισόθερμης κατάστασης $P(\varpi, z) = [c_s(\varpi)]^2 \rho(\varpi, z)$, αλλά ισχύει η γενικότερη πολυτροπική σχέση $P(\varpi, z) = Q(\varpi) [\rho(\varpi, z)]^\Gamma$ με πολυτροπικό δείκτη $\Gamma = 1 + 1/n$. Δείξτε ότι η πυκνότητα έχει τη μορφή

$$\rho(\varpi, z) = \rho_0(\varpi) \left[1 - \left(\frac{z}{z_0(\varpi)} \right)^2 \right]^n, \quad \text{όπου } z_0(\varpi) = \frac{c_s(\varpi, z=0)}{\Omega(\varpi)} \sqrt{2n}.$$

(Θεωρήστε το μαγνητικό πεδίο αμελητέο. Η ταχύτητα του ήχου είναι $c_s = \sqrt{dP/d\rho}$.) Ποιά η φυσική σημασία των $z_0(\varpi)$ και $\rho_0(\varpi)$;

14. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2008 – 2.5 μονάδες)
 (α) Ποιό το πρόβλημα στροφορμής στους αστροφυσικούς δίσκους;
 (β) Αναφέρατε τους δυο πιο σημαντικούς μηχανισμούς που προσφέρουν λύση στο πρόβλημα.
 (γ) Πόση είναι η ενέργεια που απελευθερώνεται ανά μονάδα χρόνου σε ένα δίσκο εσωτερικής ακτίνας ϖ_{in} και ρυθμού προσρόφησης \dot{M}_a γύρω από κεντρικό σώμα μάζας M ; Τι μπορεί να γίνεται αυτή η ενέργεια; Εκτιμήστε την απελευθερούμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου αν το κεντρικό σώμα είναι συμπαγές (οπότε ο δίσκος εκτείνεται σε αποστάσεις κοντά στην ακτίνα Schwarzschild) και ο ρυθμός προσρόφησης είναι $1M_{\odot} \text{ yr}^{-1} = 2 \times 10^{33} \text{ g yr}^{-1}$.
15. (Θέμα εξετάσεων Μαρτίου 2009 (επί πτυχίω) – 2.5 μονάδες)
 Αναφέρατε χωρίς απόδειξη από που προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις για δίσκους προσαύξησης.

$$\varpi \rho_0 H V_{\varpi} = -\frac{\dot{M}_a}{4\pi}, \quad V_{\phi}^2 = \frac{GM}{\varpi}, \quad \dot{M}_a \varpi V_{\phi} \left(1 - \sqrt{\frac{\varpi_{in}}{\varpi}}\right) = |T|,$$

$$P = \frac{1}{2} \rho_0 H^2 \frac{GM}{\varpi^3}, \quad q^+ = q^- = \frac{1}{2H} \frac{3GM\dot{M}_a}{8\pi\varpi^3} \left(1 - \sqrt{\frac{\varpi_{in}}{\varpi}}\right).$$

16. (Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2010 – 2 μονάδες)
 Η ροή ακτινοβολίας από ένα λεπτό αστροφυσικό δίσκο προσαύξησης, ο οποίος εκπέμπει σαν μέλαν σώμα, είναι

$$F_{\nu} = \frac{1}{d^2} \int_{\varpi_{in}}^{\varpi_{out}} I_{\nu} 2\pi \varpi d\varpi \sin i,$$

$$\text{όπου } I_{\nu} = \frac{\frac{2h\nu^3}{c^2}}{\exp\left[\frac{h\nu}{k_B T(\varpi)}\right] - 1},$$

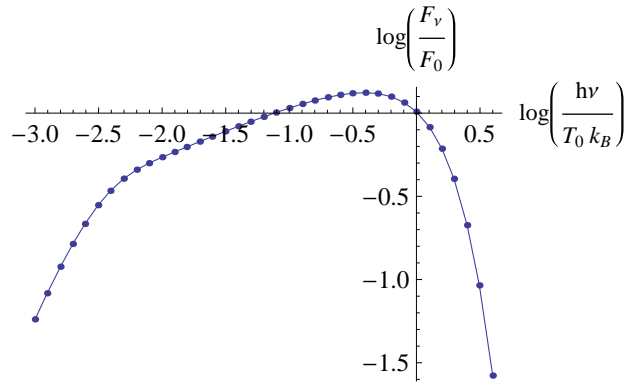
$$T(\varpi) = \left(1 - \sqrt{\frac{\varpi_{in}}{\varpi}}\right)^{1/4} \left(\frac{\varpi}{\varpi_{in}}\right)^{-3/4} T_0, \quad T_0 = \left(\frac{3GM\dot{M}_a}{8\pi\sigma_{SB}\varpi_{in}^3}\right)^{1/4}.$$

- (α) Τι εκφράζουν τα διάφορα μεγέθη που περιέχονται στις παραπάνω σχέσεις; (Ζητείται απλή αναφορά του μεγέθους που παριστά κάθε σύμβολο.)
 (β) Η ροή μπορεί να γραφεί σαν

$$F_{\nu} = F_0 \left(\frac{h\nu}{k_B T_0}\right)^3 \int_1^{\frac{\varpi_{out}}{\varpi_{in}}} \frac{w dw}{\exp\left[\frac{h\nu}{k_B T_0} w^{3/4} (1 - w^{-1/2})^{-1/4}\right] - 1},$$

$$F_0 = \frac{4\pi\varpi_{in}^2 k_B^3 T_0^3 \sin i}{h^2 c^2 d^2}$$

και φαίνεται στο επόμενο σχήμα (για $\varpi_{out} = 10^4 \varpi_{in}$).



Σχολιάστε τα τρία μέρη του φάσματος.

17. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2010 – 2.5 μονάδες)

(α) Δείξτε ότι το γωνιακό άνοιγμα H/ϖ των λεπτών δίσκων προσαύξησης είναι της τάξης c_s/V_ϕ . Αναφέρατε όλες τις υποθέσεις που οδηγούν σε αυτή τη σχέση.

(β) Δείξτε ότι η ταχύτητα περιστροφής στους λεπτούς δίσκους προσαύξησης είναι ελάχιστα υπο-Κεπλεριανή. Συγκεκριμένα ότι $V_\phi \approx (GM/\varpi)^{1/2} (1 - \epsilon)$ όπου το ϵ είναι της τάξης H^2/ϖ^2 .

Δίνονται οι προσεγγιστικές εκφράσεις των συνιστωσών της εξίσωσης ορμής σε $\hat{\omega}$ και \hat{z} διεύθυνση

$$\frac{V_\phi^2}{\varpi} \approx \frac{GM}{\varpi^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial \varpi}, \quad -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} \approx \frac{GM}{\varpi^2} \frac{z}{\varpi}.$$

Βιβλιογραφία:

- Longair, M. S., High Energy Astrophysics, vol 2
- Krolik, J. H., Active Galactic Nuclei

Κεφάλαιο 4

Παραρτήματα:

4.1 Το σύστημα μονάδων Γκάους

Οι εξισώσεις στα προηγούμενα κεφάλαια είναι γραμμένες στο σύστημα Γκάους.¹

Πολλές εξισώσεις ηλεκτρομαγνητισμού έχουν διαφορετική μορφή αναλόγως του αν χρησιμοποιούμε μονάδες SI² ή Γκάους. Αν ξέρουμε ένα τύπο στο σύστημα SI μπορούμε να τον γράψουμε στο Γκάους αν και στα δυο μέλη αντικαταστήσουμε τα σύμβολα στη στήλη «SI» του πίνακα 4.1 με τα σύμβολα της στήλης «Γκάους». Το αντίστροφο επίσης ισχύει αν θέλουμε να μετατρέψουμε ένα τύπο από το Γκάους στο SI. Τυχόν γινόμενα $\epsilon_0\mu_0$ που θα εμφανιστούν μετά τις αντικαταστάσεις τα αντικαθιστούμε με $1/c^2$ (αφού $c^2\epsilon_0\mu_0 = 1$).

Παραδείγματα:

Έστω ότι θέλουμε να γράψουμε στο Γκάους τον τύπο της δύναμης έλξης δυο φορτίων που στο SI δίνεται από τη σχέση $F = (1/4\pi\epsilon_0)q_1q_2/r^2$. Αντικαθιστούμε τα φορτία q_1, q_2 με $\sqrt{4\pi\epsilon_0} q_1, \sqrt{4\pi\epsilon_0} q_2$ (τα υπόλοιπα μεγέθη δεν υπάρχουν στον πίνακα 4.1 και άρα τα αφήνουμε ως έχουν) και βρίσκουμε $F = q_1q_2/r^2$.

Ο νόμος του Γκάους στο σύστημα Γκάους γράφεται $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho/\epsilon$, όπου ρ η πυκνότητα φορτίου. Σύμφωνα με τον πίνακα 4.1, για να βρούμε τον τύπο στο SI, πρέπει να αντικαταστήσουμε το $\mathbf{E}/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$ με \mathbf{E} , το $\sqrt{4\pi\epsilon_0} \rho$ με ρ και το ϵ_0 με ϵ . Γι' αυτό, ξαναγράφουμε τον τύπο στο σύστημα Γκάους σαν $\nabla \cdot (\mathbf{E}/\sqrt{4\pi\epsilon_0}) = \sqrt{4\pi\epsilon_0} \rho/\epsilon_0$ και μετά τις αντικαταστάσεις βρίσκουμε τον τύπο στο SI $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$.

Το πεδίο \mathbf{H} στο SI δίνεται από $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$. Στο Γκάους ο προηγούμενος τύπος γίνεται $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$.

Ο πίνακας 4.2 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μετατροπή μονάδων από το ένα σύστημα στο άλλο. Σε όλα τα πολλαπλάσια του 3 του πίνακα αυτού (εκτός των εκθετών), ακριβέστερες τιμές βρίσκονται αν αντικατασταθεί το 3 με 2.99792458 (αυτό προκύπτει από την αριθμητική τιμή της ταχύτητας του φωτός που είναι $2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ αντί της προσεγγιστικής τιμής $3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$).

¹Το σύστημα Γκάους λέγεται επίσης και cgs από τα αρχικά των θεμελιωδών του μονάδων για το μήκος (cm), τη μάζα (g) και το χρόνο (s).

²Το σύστημα SI λέγεται επίσης και mks από τα αρχικά των θεμελιωδών του μονάδων για το μήκος (m), τη μάζα (kg) και το χρόνο (s).

Πίνακας 4.1: Μετατροπή τύπων από SI σε Γκάους και αντίστροφα.

Ποσότητα	Γκάους	SI
ταχύτητα φωτός	c	$1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$
ηλεκτρικό πεδίο	$\mathbf{E}/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$	\mathbf{E}
ηλεκτρικό δυναμικό	$V/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$	V
ηλεκτρική μετατόπιση	$\sqrt{\epsilon_0/4\pi} \mathbf{D}$	\mathbf{D}
πυκνότητα φορτίου	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \rho$	ρ
φορτίο	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} q$	q
πυκνότητα ρεύματος	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{J}$	\mathbf{J}
ρεύμα	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} I$	I
ηλεκτρική πόλωση	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P}$	\mathbf{P}
μαγνητικό πεδίο	$\sqrt{\mu_0/4\pi} \mathbf{B}$	\mathbf{B}
διανυσματικό δυναμικό πεδίο \mathbf{H}	$\mathbf{H}/\sqrt{4\pi\mu_0}$	\mathbf{H}
μαγνήτιση	$\sqrt{4\pi/\mu_0} \mathbf{M}$	\mathbf{M}
ειδική αγωγιμότητα	$4\pi\epsilon_0 \sigma$	σ
διηλεκτρική σταθερά	$\epsilon_0\epsilon$	ϵ
μαγνητική διαπερατότητα	$\mu_0\mu$	μ
αντίσταση	$R/4\pi\epsilon_0$	R
εμπέδηση	$Z/4\pi\epsilon_0$	Z
συντελεστής αυτεπαγωγής	$L/4\pi\epsilon_0$	L
χωρητικότητα	$4\pi\epsilon_0 C$	C

Πίνακας 4.2: Μετατροπή μονάδων από SI σε Γκάους και αντίστροφα.

Ποσότητα	SI	Γκάους
μήκος	1 m	10^2 cm
μάζα	1 kg	10^3 g
χρόνος	1 s	1 s
συχνότητα	1 Hz	1 Hz
δύναμη	1 N	10^5 dynes
έργο	1 J	10^7 ergs
ενέργεια	1 J	10^7 ergs
ισχύς	1 W	10^7 ergs s ⁻¹
φορτίο	1 Cb	3×10^9 statcoulombs
πυκνότητα φορτίου	1 Cb m ⁻³	3×10^3 statcoul cm ⁻³
ρεύμα	1 A	3×10^9 statamperes
πυκνότητα ρεύματος	1 A m ⁻²	3×10^5 statamp cm ⁻²
ηλεκτρικό πεδίο	1 V m ⁻¹	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$ statvolt cm ⁻¹
ηλεκτρικό δυναμικό	1 V	$\frac{1}{300}$ statvolt
ηλεκτρική πόλωση	1 Cb m ⁻²	3×10^5 dipole moment cm ⁻³
ηλεκτρική μετατόπιση	1 Cb m ⁻²	$12\pi \times 10^5$ statcoul cm ⁻²
ειδική αγωγιμότητα	1 Ω ⁻¹ m ⁻¹	9×10^9 s ⁻¹
αντίσταση	1 Ω	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$ s cm ⁻¹
χωρητικότητα	1 F	9×10^{11} cm
μαγνητική ροή	1 Wb	10^8 G cm ² ή maxwells
μαγνητικό πεδίο	1 T	10^4 G
πεδίο \mathbf{H}	1 A m ⁻¹	$4\pi \times 10^{-3}$ Oe
μαγνήτιση	1 A m ⁻¹	10^{-3} magnetic moment cm ⁻³
συντελεστής αυτεπαγωγής	1 H	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$

Πίνακας 4.3: Τιμές φυσικών σταθερών στο σύστημα Γκάους.

ταχύτητα φωτός	$c = 2.997925 \times 10^{10}$
σταθερά παγκόσμιας έλξης	$G = 6.6732 \times 10^{-8}$
σταθερά Planck	$h = 6.625 \times 10^{-27}$
μάζα ηλεκτρονίου	$m_e = 9.10956 \times 10^{-28}$
φορτίο ηλεκτρονίου	$e = 4.80325 \times 10^{-10}$
ηλεκτρονιοβόλτ	$eV = 1.602192 \times 10^{-12}$
μάζα πρωτονίου	$m_p = 1.672614 \times 10^{-24}$
σταθερά λεπτής υφής	$e^2/\hbar c = 1/137.036$
διατομή Thomson	$\sigma_T = 0.665245 \times 10^{-24}$
σταθερά Boltzmann	$k_B = 1.38062 \times 10^{-16}$
σταθερά ακτινοβολίας	$\alpha_{BB} = 7.5641 \times 10^{-15}$
έτος	$yr = 3.155815 \times 10^7$
αστρονομική μονάδα	$AU = 1.495985 \times 10^{13}$
parsec	$pc = 3.0856 \times 10^{18}$
μάζα του ήλιου	$M_\odot = 1.989 \times 10^{33}$
ακτίνα του ήλιου	$R_\odot = 6.96 \times 10^{10}$
λαμπρότητα του ήλιου	$L_\odot = 3.9 \times 10^{33}$
μάζα της γης	$= 5.977 \times 10^{27}$
ισημερινή ακτίνα της γης	$= 6.3782 \times 10^8$
μέση ακτίνα της γης	$= 6.37103 \times 10^8$
επιτάχυνση βαρύτητας στην επιφάνεια της γης	$= 9.80665 \times 10^2$
ακτίνα Bohr στο άτομο του υδρογόνου	$= 0.5292 \times 10^{-8}$

Για παράδειγμα $1 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1} = 8.987551787 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ αντί του προσεγγιστικού $9(= 3^2) \times 10^9 \text{ s}^{-1}$.

Τέλος, οι τιμές διαφόρων φυσικών σταθερών στο σύστημα Γκάους δίνονται στον πίνακα 4.3.

Βιβλιογραφία:

- Jackson, J. D., Classical Electrodynamics