

*Κανάρης Χ. Τσίγκανος
Καθηγητής Τμήματος Φυσικής
Πανεπιστημίου Αθηνών*

Εισαγωγή στη
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

με 200 παραδείγματα και λυμένα προβλήματα

Αθήνα - 2004

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Θεωρήματα διατήρησης ορμής, στροφορμής, ενέργειας & παραδείγματα

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε ότι κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, η ορμή, η στροφορμή και η ενέργεια κατά την κίνηση ενός υλικού σημείου διατηρούνται. Θα δώσουμε παραδείγματα συντηρητικών πεδίων όπου οι δυνάμεις προέρχονται από δυναμικό. Με τη βοήθεια του δυναμικού θα συζητήσουμε πως μπορεί να γίνει μια ποιοτική μελέτη της τροχιάς. Στο τέλος θα δώσουμε μερικά σύγχρονα παραδείγματα όπως η επιτάχυνση αγωνιστικών μοτοποδηλάτων και η πτώση με αλεξίπτωτο στην ατμόσφαιρα της Γης.

4.1 Θεώρημα διατήρησης της ορμής

Από το νόμο της επιτάχυνσης του Νεύτωνα έχουμε:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} \Rightarrow \begin{cases} F_x = m\dot{v}_x, & \text{αν } F_x = 0 \Rightarrow mv_x = \text{σταθ.} \\ F_y = m\dot{v}_y, & \text{αν } F_y = 0 \Rightarrow mv_y = \text{σταθ.} \\ F_z = m\dot{v}_z, & \text{αν } F_z = 0 \Rightarrow mv_z = \text{σταθ.} \end{cases}$$

Δηλαδή όταν $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow m\vec{v} = \text{σταθ.}$ Αν σε ένα σωματίδιο δεν επιδρούν εξωτερικές δυνάμεις η ορμή του διατηρείται.

4.2 Θεώρημα διατήρησης της στροφορμής

Στροφορμή ενός υλικού σημείου ως προς κάποιο σημείο O ορίζουμε το μέγεθος,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Τότε, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του υλικού σημείου είναι,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N},$$

όπου \vec{N} η ροπή της δύναμεις \vec{F} ως προς το σημείο O . Επομένως, αν

$$\vec{N} = 0 \iff \vec{L} = \text{σταθ.}$$

Η στροφορμή υλικού σημείου ως προς σταθερό σημείο O σε ένα αδρανειακό σύστημα $Oxyz$ διατηρείται αν η ροπή της δύναμης που ενεργεί στο σωματίδιο ως προς το O , είναι μηδέν.

4.3 Έργο και κινητική ενέργεια

Το έργο δύναμεις που μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της από μια θέση 1 σε μια άλλη θέση 2 είναι,

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int_1^2 m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \int_1^2 d\left(\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2\right) = \int_1^2 dT = T_2 - T_1.$$

Δηλαδή το έργο δύναμεις που μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της από μια θέση 1 σε μια άλλη θέση 2 ισούται με την αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής ενέργειας.

4.4 Δυνάμεις που προέρχονται από δυναμικό

Έστω ότι η δύναμη \vec{F} που δρα σε ένα υλικό σημείο μπορεί να γραφεί ως η κλίση ενός «δυναμικού» V ,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V.$$

Ως γνωστόν από τα Μαθηματικά, γί αυτά τα πεδία ισχύει,

$$\text{curl}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0.$$

Το έργο που επιτελεί μία τέτοια δύναμη κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από μία θέση 1 σε μία άλλη θέση 2 είναι,

$$\begin{aligned} W_{12} &= - \int_1^2 \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) \\ &= - \int_1^2 dV = V_1 - V_2. \end{aligned}$$

Επομένως, το έργο δύναμης που προέρχεται από δυναμικό κατά τη μετακίνηση υλικού σημείου από τη θέση 1 στη θέση 2 είναι ανεξάρτητο του δρόμου που ακολουθείται και εξαρτάται μόνο από τις τιμές του δυναμικού στις θέσεις 1 και 2.

4.5 Διατήρηση της ολικής ενέργειας

Αποδείξαμε προηγουμένως ότι για πεδία δυνάμεων που προέρχονται από δυναμικό,

$$W_{12} = T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \Rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \Rightarrow E_1 = E_2 .$$

Άρα, εάν

$$\text{curl} \vec{F} = 0 \Rightarrow E_{o\lambda} = \text{σταθ.} ,$$

δηλαδή, η ολική ενέργεια, το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας ενός υλικού σημείου εντός πεδίου δυνάμεων που προέρχονται από δυναμικό διατηρείται. Γι' αυτό, πεδία δυνάμεων προερχομένων από δυναμικό ονομάζονται και συντηρητικά πεδία δυνάμεων.

4.6 Παραδείγματα συντηρητικών πεδίων δυνάμεων

4.6.1 Ομογενές πεδίο βαρύτητας

Για το ομογενές πεδίο βαρύτητας έχουμε,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -mg\hat{z} , \\ -mg\hat{k} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} , \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= mg \Rightarrow V(z) = mgz + c = mg(z - z_0) . \end{aligned}$$

4.6.2 Πεδίο βαρύτητας γύρω από ένα σφαιρικό σώμα

Όπως θα αποδείξουμε στα επόμενα, η βαρυτική έλξη \vec{B} που ασκεί ένα σφαιρικό σώμα μάζας M σε ένα υλικό σημείο μάζας m που ευρίσκεται σε απόσταση \vec{r} από το κέντρο του είναι,

$$\vec{B} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}.$$

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας γύρω από το σφαιρικό σώμα μάζας M είναι τότε,

$$-\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{r} \Rightarrow V(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

4.6.3 Πεδία κεντρικών δυνάμεων

Επειδή όλες οι κεντρικές δυνάμεις είναι εξ' ορισμού της μορφής

$$\vec{F} = f(r)\hat{r},$$

κατά συνέπεια, $\text{curl}\vec{F} = 0$ και οι δυνάμεις αυτές είναι συντηρητικές. Τότε η ροπή $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ η στροφορμή $\vec{L} = \text{σταθ.}$, ενώ υπάρχει δυναμικό

$$V(r) = -\int_{r_0}^r f(r)dr,$$

και η ολική ενέργεια διατηρείται.

4.6.4 Ευθύγραμμη κίνηση

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε το δυναμικό $V(x)$ της δύναμης $\vec{F} = F(x)\hat{x}$, ως εξής :

$$V(x) = -\int F(x)dx.$$

4.6.5 Δυνάμεις ελατηρίου

Ειδική περίπτωση της κίνησης σε μονοδιάστατο πεδίο δυνάμεων είναι η κίνηση σώματος υπό την επίδραση δυνάμεως ελατηρίου,

$$F = -kx, \quad V = \frac{1}{2}kx^2.$$

4.7 Σύνοψη των νόμων διατήρησης

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \dot{\vec{p}}, & \vec{F} = 0 &\Rightarrow \vec{p} = \text{σταθ.} \\ \vec{N} &= \dot{\vec{L}}, & \vec{N} = 0 &\Rightarrow \vec{L} = \text{σταθ.} \\ E &= T + V, & \vec{F} = -\vec{\nabla}V &\Rightarrow E = \text{σταθ.}\end{aligned}$$

4.8 Το πρόβλημα της στροφορμής κατά τη γέννηση των αστείων

Σχετικό με το νόμο της διατήρησης της στροφορμής όταν δεν έχουμε εξωτερικές ροπές σε ένα σύστημα είναι και το πρόβλημα της στροφορμής κατά τη γέννηση του Ήλιου και των άστρων. Ας υποθέσουμε ότι ένα μεσοαστρικό νεφέλωμα διαστάσεων περί το 1 έτος φωτός (ε.φ.), $r_o = 1$ ε.φ., περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\Omega_o = 10^{-15} \text{sec}^{-1}$, όση είναι η τιμή της γωνιακής ταχύτητας του Γαλαξία στην απόσταση του Ήλιου ($V_\odot = 250 \text{ km/sec}$, $r_\odot = 30.000$ ε.φ.). Έστω επίσης ότι η πυκνότητά του είναι $n_o \simeq 20$ άτομα / cm^3 , έτσι ώστε η ολική του μάζα να είναι ίση με τη μάζα του Ήλιου. Έστω ότι αυτό το νεφέλωμα καταρρέει βαρυτικά για να σχηματίσει ένα άστρο με ακτίνα όση και ο Ήλιος, δηλ., 700.000 km . Περιστροφικά φαινόμενα δεν θα εμποδίσουν την κατάρρευσή του παράλληλα στον άξονα της περιστροφής του, αλλά η διατήρηση της στροφορμής του ($\propto \Omega r^2$) απαιτεί ότι καθώς η ακτίνα του ελαττώνεται κατά παράγοντα 10^7 , η τιμή του Ω πρέπει να αυξηθεί κατά 14 τάξεις μεγέθους στην τιμή 10^{-1}sec^{-1} (περίοδος περιστροφής $T \sim 1 \text{ min}$). Η περιστροφική του ταχύτητα θα πρέπει να γίνει τότε ίση με το 20% της ταχύτητας του φωτός και ο λόγος φυγοκεντρικών/βαρυτικών δυνάμεων στον ισημερινό του θα είναι πολύ μεγάλος ($\sim 10^4$). Αν και η πραγματική γεωμετρία του νεφελώματος πριν την κατάρρευσή του για να γίνει σφαιρικό άστρο θα είναι εν γένει διαφορετική από αυτή που υποθέσαμε, το γενικό επιχείρημα ισχύει. Οι παρατηρήσεις όμως δείχνουν ότι τα νέα άστρα περιστρέφονται πολύ αργότερα, με περιστροφικές ταχύτητες κατά πολύ χαμηλότερες. Για παράδειγμα, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του Ήλιου είναι πολύ χαμηλότερη, $\Omega_\odot = 2.7 \times 10^{-6} \text{sec}^{-1}$ (περίοδος περιστροφής $T = 27$ ημέρες $\approx 40.000 \text{ min}$). Τίθεται επομένως το ερώτημα: Αν τα άστρα δεν σχηματίζονται από νεφελώματα με ιδιαίτερα χαμηλές τιμές στροφορμής, πώς μεταφέρεται εκτός του νεφελώματος στροφορμή έτσι ώστε αυτό να μπορέσει να καταρρεύσει για να σχηματίσει το άστρο;

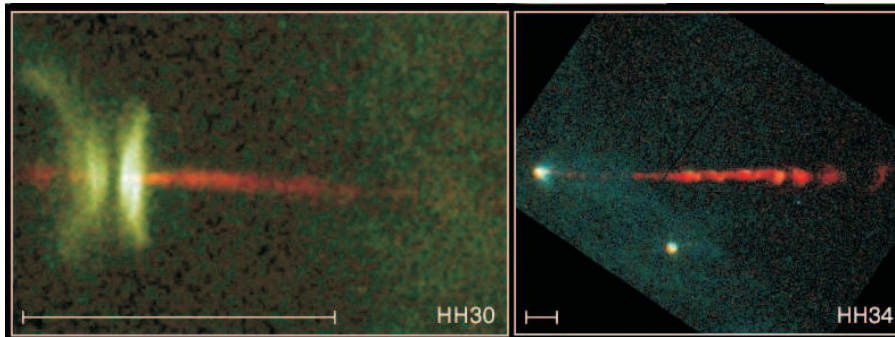
Το φαινόμενο των εστιασμένων εκροών πλάσματος (jets) που αναδύονται από δίσκους συσσώρευσης γύρω από νεογέννητα άστρα, φαίνεται να είναι η απάντηση στη λύση αυτού του μυστηρίου. Τα jets αυτά «κλέβουν» στροφορμή από το δίσκο συσσώρευσης επιτρέποντας έτσι στο πλάσμα να καταρρεύσει στο κέντρο και να δημιουργήσει το άστρο. Δηλ., καθώς το άστρο προσπαθεί να αναδυθεί μέσα από την αέρια μήτρα του, από τον δίσκο εκτοξεύονται σαν περίτεχνα πυροτεχνήματα οι λεπτοί αυτοί πίδακες πλάσματος που διαδίδονται ανέπαφοι για αρκετά έτη φωτός, πολλές χιλιάδες φορές την απόσταση Γης - Ήλιου. Οι πίδακες είναι πλάσμα του δίσκου το οποίο επιταχύνεται μακριά από το δίσκο λόγω μαγνητοπεριστροφικών δυνάμεων. Το φαινόμενο αυτό είναι ανάλογο με εκείνο της ολίσθησης χαντρών περασμένων σε σύρματα τα οποία είναι κολλημένα σε ένα περιστρεφόμενο δίσκο και σχηματίζουν κάποια γωνία με τον άξονα περιστροφής του δίσκου.

Μια άριστα μελετημένη περιοχή γέννησης αστέρων ευρίσκεται στο νεφέλωμα του αστερισμού του Ωρίωνος, σε απόσταση περίπου 1500 ετών φωτός από τη Γη που εντοπίζεται εύκολα στον ουρανό σαν η θαμπή φωτεινή περιοχή κάτω από τη ζώνη του μυθικού κυνηγού Ωρίωνα. Το νεφέλωμα αυτό οφείλει το φως του στα λαμπρά άστρα του Τραπεζίου τα οποία εκλύουν τεράστιες ποσότητες υπεριώδους ακτινοβολίας με την οποία ιονίζουν το αέριο του νεφέλωματος, ενώ όταν τα ηλεκτρόνια επανασυνδέονται με τους πυρήνες το νεφέλωμα ακτινοβολεί. Το νεφέλωμα του Ωρίωνος αποτελεί συγχρόνως και ένα αστρικό βρεφοκομείο με εκατοντάδες αστρικά νεογνά διασπαρμένα σε μια έκταση διαστάσεων περί τα 10 έτη φωτός. Οι περισσότεροι αστέρες του νεφέλωματος έχουν ηλικία μόνο μερικά εκατομμύρια έτη, ενώ προβλέπεται να ζήσουν τουλάχιστον χίλιες φορές περισσότερο. Επομένως, στην ανθρώπινη κλίμακα είναι βρέφη, ηλικίας μόλις μερικών μηνών.

Σχηματισμός αστέρων συμβαίνει όταν ένα γιγαντιαίο μοριακό νεφέλωμα διαστάσεων πολλών ετών φωτός που περιέχει κατά 90 % άτομα υδρογόνου και 10 % άτομα ηλίου και των υπόλοιπων βαρύτερων στοιχείων, καθώς επίσης νερό, αμμωνία, οργανικές ενώσεις, κλπ., καταρρέει λόγω του δικού του βάρους. Λόγω του νόμου διατήρησης της στροφορμής, καθώς το νεφέλωμα καταρρέει περιστρέφεται ολοένα και ταχύτερα. Τότε, όπως ένα αρχικά σφαιρικό κομμάτι ζύμης που περιστρέφεται στον αέρα από ένα σεφ πλατύνεται και παίρνει τη μορφή της πίτσας, έτσι και το ταχύτατα περιστρεφόμενο νεφέλωμα μετατρέπεται σε ένα δίσκο. Στο κέντρο του δίσκου ευρίσκεται ο πρωταστέρας, ο οποίος μόνο μετά από μερικές δεκάδες εκατομμύρια χρόνια και συνεχή προσαύξηση ύλης από τον δίσκο του αποκτά στο κέντρο του συνθήκες (υψηλή θερμοκρασία και πυκνότητα) κατάλληλες για την έναρξη θερμοπυρηνικών αντιδράσεων.

Διαδίκτυο

Περισσότερα για αυτό το θέμα μπορείτε να δείτε στο διαδίκτυο στη διεύθυνση:
<http://hubblesite.org/newscenter/newsdesk/archive/releases/1995/24/>



Σχ. 4.1: Δύο τυπικοί πίδακες πλάσματος που αναβλύζουν από αστρικά νεογνά - ηλικίας μόνο λίγων εκατομμυρίων ετών. *Αριστερά:* Το τυπικό σύστημα πρωτοαστέρα/δίσκου/πιδάκων πλάσματος HH 30, σε απόσταση 450 ετών φωτός στον αστερισμό του Ταύρου. Το φως του πρωτοαστέρα που είναι κρυμμένος από τον περιβάλλοντα δίσκο φωτίζει το δίσκο στα άκρα του. Ο ερυθρωπός πίδακας αναβλύζει από τον τον πρωτοαστέρα στο κέντρο του δίσκου (Διαστημικό Τηλεσκόπιο, WFPC2, NASA, 1995, C. Burrows). *Δεξιά:* το παρόμοιο σύστημα HH 34 στο τρεις φορές μακρυνότερο νεφέλωμα του Ωρίωνος με τους χαρακτηριστικούς ισάπεχοντες φωτεινούς κόμβους που απομακρύνονται με ταχύτητα περί το 1000 χιλιόμετρα την ώρα (Διαστημικό Τηλεσκόπιο, WFPC2, NASA, J. Hester). Η γραμμή σε κάθε εικόνα αντιστοιχεί σε 1000 φορές την απόσταση Γης - Ήλιου. Σήμερα ανιχνεύουμε πολλά τέτοια συστήματα νεογέννητων αστερών με πίδακες.

4.9 Λύση μονοδιάστατων προβλημάτων χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα της ενέργειας

Έστω ότι η δύναμη $\vec{F} = F(x)\hat{x}$ προέρχεται από το δυναμικό $V(x)$. Τότε ισχύει το θεώρημα της διατήρησης της ενέργειας,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = \text{σταθ.}$$

Από αυτό το ολοκλήρωμα παίρνουμε:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]},$$

και

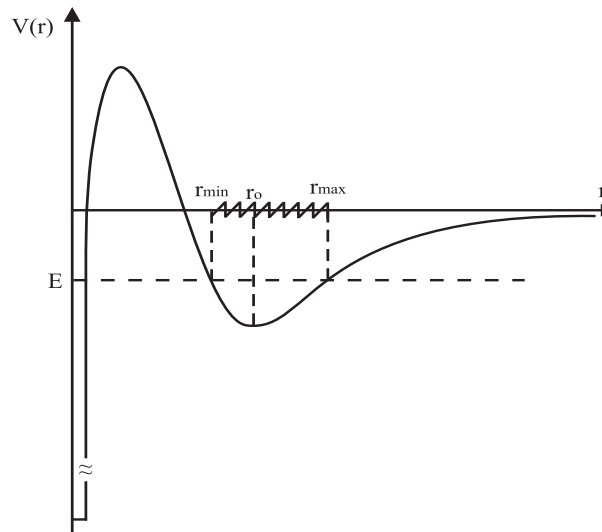
$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} .$$

Παρατηρούμε ότι η λύση $t = t(x)$ ή $x = x(t)$ εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες x_0 και $\dot{x}_0 = v_0$, μέσω της ολικής ενέργειας E ,

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(x_0) .$$

4.10 Χρησιμοποίηση της καμπύλης του δυναμικού για την εύρεση των ορίων της τροχιάς

Ως ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την καμπύλη της δυναμικής ενέργειας αλληλεπίδρασης δύο ατόμων υδρογόνου στο μόριο του υδρογόνου H_2 η οποία έχει την μορφή του Σχ. 4.2. Όταν το ένα άτομο υδρογόνου είναι στο



Σχ. 4.2: Καμπύλη της δυναμικής ενέργειας αλληλεπίδρασης δύο ατόμων υδρογόνου στο μόριο του υδρογόνου H_2 .

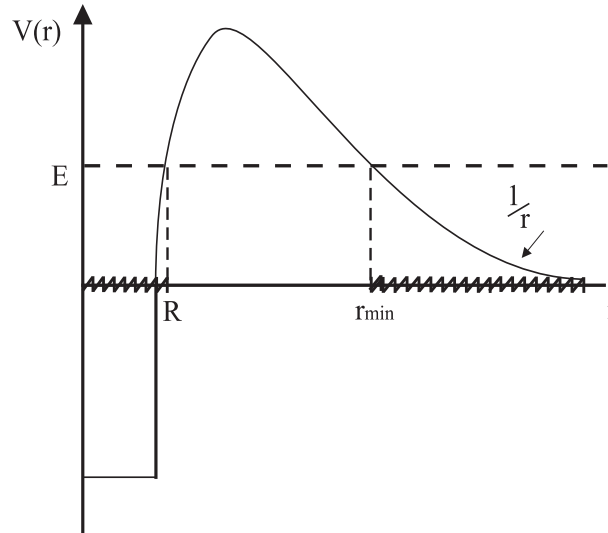
άπειρο εν σχέσει με το άλλο του μορίου του H_2 , το κάθε ηλεκτρόνιο του ατόμου ευρίσκεται στην θεμελιώδη ενεργειακή στάθμη του ατόμου του υδρογόνου E_0 . Όταν τα δύο άτομα είναι σε πεπερασμένη απόσταση r μεταξύ τους, λόγω της αλληλεπίδρασης των δύο ατόμων, το καθένα από τα δύο ηλεκτρόνια ευρίσκεται

σε χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη από εκείνη που θα είχε αν τα δύο μόρια ήταν στο άπειρο και δεν αλληλεπιδρούσαν. Δηλ., το κάθε ηλεκτρόνιο βρίσκεται τώρα στην ενεργειακή στάθμη $E_0 - \epsilon(r)$, ένθα $\epsilon(r)$ είναι το δυναμικό αλληλεπίδρασης (που εξαρτάται από την σχετική απόσταση των δύο ατόμων). Επομένως, η ενέργεια στην οποία ευρίσκονται τα δύο ηλεκτρόνια με αντιπαράλληλο σπιν (η χαμηλοενεργειακή στάθμη) είναι χαμηλότερη κατά $2\epsilon(r)$ αυτής που θα είχαν εάν τα άτομα ήταν σε άπειρη απόσταση αναμεταξύ τους. Επομένως, τό κάθε ηλεκτρόνιο αισθάνεται φαινομενικά ένα ελκτικό δυναμικό για μεγάλες αποστάσεις r στην καμπύλη $V(r)$, $r > r_0$. Από το άλλο μέρος, στις μικρότερες αποστάσεις, $r < r_0$, υπερισχύει η ηλεκτροστατική άπωση των δύο πυρήνων ενώ όταν οι πυρήνες ευρεθούν εντός της εμβέλειας των πυρηνικών δυνάμεων, έλκονται. Δηλ., το απωστικό δυναμικό οφείλεται στην ηλεκτροστατική άπωση των δύο πυρήνων, ενώ το ελκτικό δυναμικό στις πολύ μικρές αποστάσεις οφείλεται στις μικρής εμβέλειας ελκτικές πυρηνικές δυνάμεις. Το ελάχιστο του δυναμικού στη θέση r_0 αντιστοιχεί στην απόσταση ισορροπίας των δύο πρωτονίων στο μόριο του υδρογόνου H_2 όπου η ενεργός έλξη που προέρχεται από το άπλωμα της κυματοσυνάρτησης των δύο ηλεκτρονίων σε όλο το μόριο, εξισορροπείται από την ηλεκτροστατική άπωση των δύο πυρήνων.¹ Έτσι, για καμπύλες δυναμικού της μορφής του Σχ. 4.2, και όταν η ενέργεια είναι E , το επιτρεπτό διάστημα των αποστάσεων που μπορεί να βρεθεί το ηλεκτρόνιο είναι (r_{min}, r_{max}) όπου $E = V(r_{max}) = V(r_{min})$ και για $r_{min} < r < r_{max}$ έχουμε $E - V(x) = \frac{1}{2}mv^2 > 0$.

Από το άλλο μέρος, ας θεωρήσουμε μία καμπύλη δυναμικού της μορφής του Σχ. 4.3. Για παράδειγμα, ένα τέτοιο δυναμικό βλέπει ένα πρωτόνιο καθώς κινείται μέσα στο Κουλομπικό και πυρηνικό δυναμικό ενός άλλου πρωτονίου. Ο πυρήνας του Ήλιου είναι ένα τέτοιο περιβάλλον όπου λόγω της ψηλής θερμοκρασίας του ($T \sim 15 \times 10^6$ K) τα πρωτόνια είναι γυμνά από ηλεκτρόνια. Το απωστικό δυναμικό $1/r$ αντιστοιχεί στην ηλεκτροστατική άπωση των δύο πρωτονίων ενώ το ελκτικό μέρος, το «πηγάδι» δυναμικού στις πολύ μικρές αποστάσεις, οφείλεται στις ελκτικές ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις. Έστω ότι η κινητική ενέργεια του πρωτονίου σε άπειρη απόσταση από το άλλο πρωτόνιο είναι E . Τότε, το επιτρεπτό διάστημα των αποστάσεων που μπορεί να βρεθεί το πρωτόνιο είναι $r > r_{min}$ και $r < R$ όπου $E = V(r_{min}) = V(R)$ και για $r > r_{min}$ ή $r < R$ έχουμε $E - V(x) = \frac{1}{2}mv^2 > 0$. Η περιοχή $R < r < r_{min}$ είναι απαγορευμένη κλασικά για το εξωτερικό πρωτόνιο το οποίο καθώς πλησιάζει από το άπειρο το άλλο πρωτόνιο συναντά το φράγμα δυναμικού στο διάστημα $R < r < r_{min}$. Το ύψος του φράγματος δυναμικού είναι της τάξεως της ενέργειας των ισχυρών πυρηνικών δυνάμεων, δηλ., μερικά MeV , ενώ η ενέργεια του πρωτονίου είναι $3kT/2 \sim 2 keV$.² Σημειώστε ότι στο γεγονός αυτό του πολύ μεγάλου φράγματος δυναμικού οφείλεται η μακροζωία

¹βλ. *Κβαντομηχανική II*, Σ. Τραχανάς, Κεφ. 12, ΠΕΚ, για μία πιο εκτεταμένη συζήτηση.

² $k = 1.38 \times 10^{-16}$ erg/K, $1 eV = 1.5 \times 10^{-12}$ erg.



Σχ. 4.3: Σχηματικό διάγραμμα του δυναμικού που βλέπει ένα πρωτόνιο καθώς κινείται μέσα στο Κουλομπικό και πυρηνικό δυναμικό ενός άλλου πρωτονίου.

των άστρων καθώς επίσης και η δική μας παρουσία εδώ (μπορείτε να το εξηγήσετε ;)!)

4.11 Κίνηση στο πεδίο βαρύτητας της Γης

Η μέγιστη απόσταση στην οποία μπορεί να βρεθεί ένα σώμα που κινείται μέσα στο πεδίο βαρύτητας της Γης είναι η r_{max} , όπου $E = V(r_{max})$ και η ταχύτητά του εκεί είναι μηδέν. Όταν το σώμα έχει $E = 0$, $r_{max} \rightarrow \infty$ και η ταχύτητα διαφυγής δίδεται από τη σχέση,

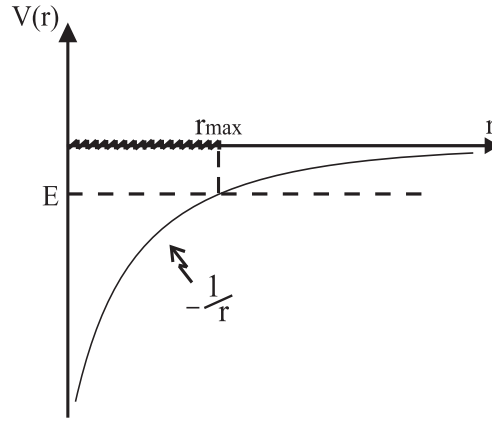
$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R_0} = 0,$$

όπου R_0 είναι η αρχική απόσταση όπου η ταχύτητα είναι v_0 ,

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}}.$$

Η ταχύτητα διαφυγής από τη Γη είναι $v_0 \simeq 11$ km/sec, από τον Ήλιο 620 km/sec και από τη Σελήνη 2.3 km/sec.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μπορούμε να κατανοήσουμε απλά σύμφωνα με τα προηγούμενα την απουσία ελαφρών μορίων από την ατμόσφαιρα της Γης λόγω



Σχ. 4.4: Σχηματικό διάγραμμα του δυναμικού που αισθάνεται ένα σώμα στο πεδίο βαρύτητας της Γης.

του ότι η μέση θερμική τους ταχύτητα είναι πολύ κοντά στην ταχύτητα διαφυγής. Έτσι για το υδρογόνο έχουμε,

$$V_{rms}^{H_2} \simeq \sqrt{\frac{3kT}{m_{H_2}}} \simeq 1.84 \frac{\text{km}}{\text{sec}} ,$$

ενώ για το οξυγόνο,

$$V_{rms}^{O_2} \simeq \sqrt{\frac{3kT}{m_{O_2}}} \simeq 0.49 \frac{\text{km}}{\text{sec}} .$$

Γενικά, αν $V_{rms} \simeq \frac{1}{5}V_{\text{διαφ}}$, εντός 100×10^6 ετών, τα μόρια του συγκεκριμένου στοιχείου χάνονται στο διάστημα.

Όταν μικραίνει η ακτίνα R_0 και η μάζα του σώματος παραμένει σταθερή, επιτυγχάνεται ένα όριο όπου η ταχύτητα φθάνει την ταχύτητα του φωτός c . Η οριακή αυτή ακτίνα ονομάζεται ακτίνα Schwarzschild του ορίζοντα γεγονότων της μελανής οπής,

$$R_{Sch} = \frac{2GM}{c^2} ,$$

και για μια ηλιακή μάζα $R_{Sch} = 3 \text{ km}$.

ενώ η δύναμη τριβής είναι

$$F \leq \mu N_2 ,$$

όπου μ ο συντελεστής τριβής τροχού - οδοστρώματος. Επειδή ο συντελεστής στατικής τριβής είναι μεγαλύτερος του συντελεστή κινητικής τριβής, η μέγιστη δύναμη τριβής εφαρμόζεται στον τροχό κατά την εκκίνηση, οπότε,

$$F = \mu N_2 .$$

Η μέγιστη τιμή της N_2 επιτυγχάνεται όταν $N_1 = 0$, οπότε $N_2 = Mg$. Σε αυτή την περίπτωση

$$a_{max} = \frac{F_{max}}{M} = \mu \frac{Mg}{M} = \mu g .$$

Η συνήθης τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ ελαστικού και οδοστρώματος είναι $\mu \simeq 1$ και επομένως η μέγιστη επιτάχυνση είναι ίση με $a_{max} \simeq g = 9.8 m/sec^2$. Εάν το μοτοποδήλατο διατηρεί αυτή την επιτάχυνση καθόλο το μήκος της διαδρομής του

$$v = at , \quad s = \frac{1}{2}gt^2 .$$

Εάν η αγωνιστική πίστα έχει μήκος $s = 400 m$, η τελική ταχύτητα είναι

$$v = 89 \frac{m}{sec} = 320 \frac{km}{h} ,$$

και επιτυγχάνεται σε περίπου $t = 9 sec$. Το παγκόσμιο ρεκόρ μέχρι πρόσφατα ήταν, $v = 134.8 m/sec = 485 km/h$ σε 4.8 secs. Οι μεγαλύτερες αυτές τελικές ταχύτητες μπορεί να επιτευχθούν με τη βοήθεια ειδικών πτερυγίων που κατά την κίνηση προσθέτουν αεροδυναμικές δυνάμεις που ουσιαστικά αυξάνουν το βάρος του οχήματος και έτσι αυξάνουν περαιτέρω την a_{max} .

4.13 Ελεύθερη πτώση στο πεδίο βαρύτητας - Πτώση αλεξιπτωτιστών

Ένα συναρπαστικό σπορ είναι και η ελεύθερη πτώση στο πεδίο βαρύτητας.³ Ας δούμε πρώτα τι θα συνέβαινε αν δεν υπήρχε η αντίσταση του αέρα. Το σύνηθες ύψος απ' όπου πέφτουν οι αλεξιπτωτιστές είναι $z = 1400 m$ το οποίο διανύουν σε χρόνο ελεύθερης πτώσης $t_{ε.π.}$,

$$t_{ε.π.} = \sqrt{\frac{2z}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 1400}{10}} \simeq 17 \text{ secs} ,$$

³ Classical Mechanics, Barger & Olsson, McGraw-Hill, Chap. 1.

με τελική ταχύτητα της ελεύθερης πτώσης κατά την πρόσκρουση στο έδαφος,

$$v_{ε.π.} = gt_{ε.π.} = 170 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \simeq 612 \frac{\text{km}}{\text{h}} .$$

Ευτυχώς ωστόσο που υπάρχει η ατμόσφαιρα και η αντίσταση του αέρα που ελαττώνει την τελική ταχύτητα πρόσκρουσης σε μία άλλη χαμηλότερη τιμή v_0 .

Γενικά, η δύναμη της αντίστασης \vec{F}_a κατά την κίνηση ενός σώματος μέσα σε ένα ρευστό είναι σε πρώτη προσέγγιση,

$$\vec{F}_a(\vec{v}) = -cv^n \frac{\vec{v}}{v} ,$$

όπου για χαμηλές ταχύτητες $v \leq 24 \text{ m/sec}$, $n \simeq 1$, ενώ για ψηλότερες υποηχητικές ταχύτητες $v \leq 330 \text{ m/sec}$, $n \simeq 2$.

Για την περίπτωση όπου $24 \text{ m/sec} < v < 330 \text{ m/sec}$, η σταθερά c είναι

$$c = \frac{1}{2} C_D S \rho ,$$

ένθα C_D είναι ένας αριθμητικός παράγων της τάξεως της μονάδος και S η διατομή του σώματος που κινείται σε ένα ρευστό με πυκνότητα ρ .

Η οριακή ταχύτητα v_0 με την οποία φθάνει στο έδαφος ένας αλεξιπτωτιστής με $m \simeq 70 \text{ kg}$, χωρίς να ανοίξει το αλεξίπτωτο υπολογίζεται εάν θέσουμε $F = 0$ στην εξίσωση κινήσεως:

$$F = mg - cv_0^2 ,$$

$$F = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{mg}{c}} , \quad c = \frac{mg}{v_0^2} .$$

Επειδή $S \simeq 1 \text{ m}^2$ για την επιφάνειά του κατά την πτώση του στην ατμόσφαιρα όπου $\rho \simeq 1 \text{ kg/m}^3$ προκύπτει:

$$v_0 = 54 \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 194.4 \frac{\text{km}}{\text{h}} .$$

Όταν $F \neq 0$, $v \neq v_0$, και η ταχύτητα $v(t)$ υπολογίζεται ολοκληρώνοντας την εξίσωση,

$$F = m \frac{dv}{dt} = mg - cv^2 \Rightarrow \frac{mdv}{dt} = mg - \frac{mg}{v_0^2} v^2 = \frac{mg}{v_0^2} (v_0^2 - v^2) ,$$

ή,

$$\int_0^v \frac{dv}{v_0^2 - v^2} = \int_0^t \frac{g}{v_0^2} dt \Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{(v_0 - v)(v_0 + v)} = \frac{g}{v_0^2} t .$$

Όμως επειδή,

$$\frac{1}{(v_0 - v)(v_0 + v)} = \frac{A}{v_0 - v} + \frac{B}{v_0 + v},$$

$$A(v_0 + v) + B(v_0 - v) = 1, \quad 2v_0A = 1, \quad A = B = \frac{1}{2v_0},$$

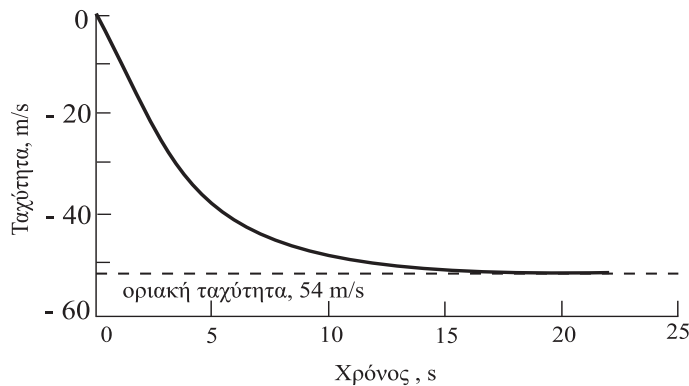
και

$$\frac{1}{2v_0} \ln \left(\frac{v_0 + v}{v_0 - v} \right) = \frac{g}{v_0^2} t \Rightarrow \ln \left(\frac{v_0 + v}{v_0 - v} \right) = \frac{2gt}{v_0},$$

$$\frac{1 - \frac{v}{v_0}}{1 + \frac{v}{v_0}} = e^{-\frac{2gt}{v_0}} \Rightarrow 1 - \frac{v}{v_0} = \left(1 + \frac{v}{v_0} \right) e^{-\frac{2gt}{v_0}} = 0,$$

$$\Rightarrow \frac{v}{v_0} (1 + e^{-\frac{2gt}{v_0}}) = 1 - e^{-\frac{2gt}{v_0}},$$

$$\Rightarrow \frac{v}{v_0} = \frac{1 - e^{-\frac{2gt}{v_0}}}{1 + e^{-\frac{2gt}{v_0}}}.$$



Σχ. 4.6: Η ταχύτητα ενός αλεξιπτωτιστή ως συνάρτηση του χρόνου.

Ας σημειωθεί ότι ασυμπτωτικά, για $t \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{v}{v_0} \rightarrow 1$, δηλ. ο άνθρωπος πέφτει με την αρκετά υψηλή ταχύτητα v_0 , αν δεν ανοίξει το αλεξίπτωτο. Π.χ., όταν $\frac{2gt_1}{v_0} = 4$, $1 - e^{-4} \simeq 1 + e^{-4} \simeq 1$, δηλ., μετά από χρόνο $t_1 = 11$ sec ο αλεξιπτωτιστής έχει ταχύτητα $v_1 \simeq 52$ m/sec. Η ταχύτητα του ανθρώπου πρὶν ανοίξει το αλεξίπτωτο σαν συνάρτηση του χρόνου της πτώσεως δίνεται στο Σχ. 4.6. Βέβαια, όταν ο άνθρωπος ανοίξει το αλεξίπτωτό του η αντίσταση του αέρα ελαττώνει σημαντικά την οριακή του ταχύτητα έτσι ώστε να πέσει στο έδαφος με

πολύ μικρότερη ταχύτητα.

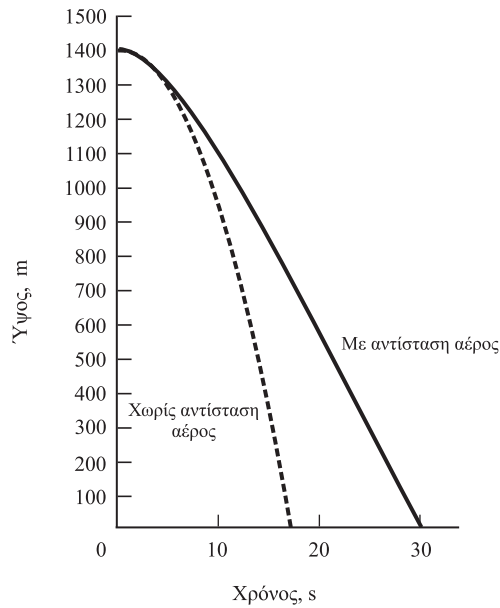
Ας υπολογίσουμε στη συνέχεια το μήκος $s(t)$ της απόστασης που διανύει,

$$s = h - z = v_0 \left[t - \frac{v_0}{2g} \int_0^t \frac{2e^{-\frac{2gt}{v_0}}}{1 + e^{-\frac{2gt}{v_0}}} d\left(\frac{2gt}{v_0}\right) \right],$$

$$s = h - z = v_0 \left[t - \frac{v_0}{g} \int_0^{\frac{2gt}{v_0}} \frac{e^{-z}}{1 + e^{-z}} dz \right]$$

$$= v_0 \left[t - \frac{v_0}{g} \ln(1 + e^{-z}) \Big|_0^{\frac{2gt}{v_0}} \right]$$

$$= v_0 \left[t - \frac{v_0}{g} \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-\frac{2gt}{v_0}}}\right) \right].$$



Σχ. 4.7: Το ύψος από το έδαφος ενός αλεξιπτωτιστή ως συνάρτηση του χρόνου.

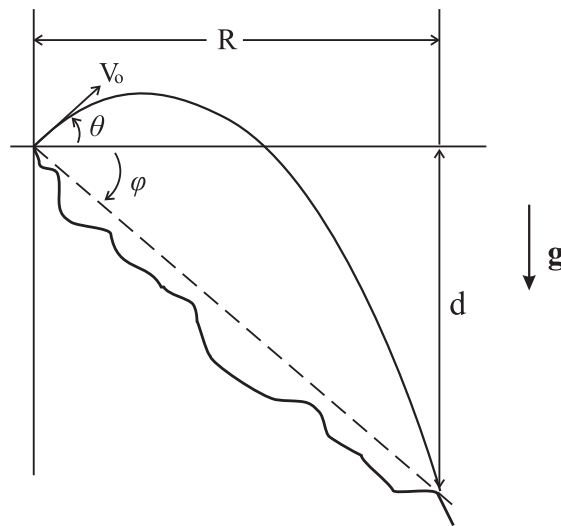
Στο χρονικό διάστημα $t_1 = 2v_0/g \simeq 11 \text{ sec}$, ο άνθρωπος έχει διανύσει

$$s_1 = h - z_1 = \frac{v_0^2}{g} \left[2 - \ln \left(\frac{2}{1 + e^{-4}} \right) \right] \simeq 385 \text{ m} .$$

Συνήθως το συνολικό ύψος πτώσεως είναι 1400 m και επομένως διανύει το μεγαλύτερο μέρος του ύψους αυτού πέφτοντας με την οριακή ταχύτητα v_0 , ενώ ο συνολικός χρόνος πτώσης είναι $t_{\text{ολ}} \simeq 30 \text{ sec}$.

Ασκήσεις

- 4.1 Μια σφαίρα εκτοξεύεται από την κάνη ενός πυροβόλου όπλου με αρχική ταχύτητα v_0 και υπό γωνία θ ως προς τον ορίζοντα, ενώ η κλίση του εδάφους είναι φ όπως στο σχήμα.



Σχ. 4.8: Η βολή της σφαίρας του προβλήματος 4.1.

Δείξτε την αλήθεια των προτάσεων:

1. Το βεληνεκές R συνδέεται με τα θ και v_0 από τη σχέση

$$R \sin 2\theta + d(1 + \cos 2\theta) = \frac{R^2}{R_0} , \quad R_0 = \frac{v_0^2}{g} .$$

2. Η μέγιστη τιμή του βεληνεκούς R_{max} επιτυγχάνεται όταν

$$\tan 2\theta_{max} = \frac{R_{max}}{d} .$$

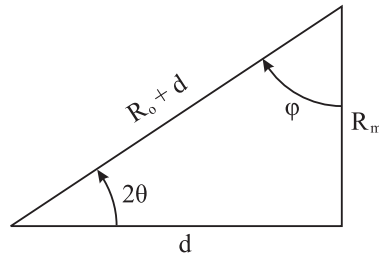
3. Συναρτήσει της κλίσης του εδάφους ϕ , $d = R_{max} \tan \phi$, και η γωνία για μέγιστο βεληνεκές θ_{max} είναι

$$2\theta_{max} + \phi = 90^\circ .$$

4. Το R_{max} δίνεται από τη σχέση

$$R_0^2 + 2dR_0 = R_{max}^2 .$$

5. Οι γωνίες θ_{max} , ϕ καθώς και τα R_{max} , R_0 , d συνδέονται όπως στο ακόλουθο ορθογώνιο τρίγωνο.



Σχ. 4.9: Σχέση των γωνιών θ_{max} και ϕ καθώς και των R_{max} , R_0 , d του προβλήματος 4.1.

4.2 Η βολή ενός πυροβόλου γίνεται υπό γωνία α με τον ορίζοντα και αρχική ταχύτητα v_0 στο ομογενές πεδίο βαρύτητας της Γης g . Η αντίσταση του αέρα είναι,

$$\vec{F}_{\betaολής} = -km\vec{v} .$$

Δείξτε ότι ο χρόνος T της βολής δίνεται από την εξίσωση

$$T = \frac{kv_0 \sin \alpha + g}{gk} (1 - e^{-kT}) .$$

Στο όριο πολύ μικρής αντίστασης του αέρα, $k \rightarrow 0$, δείξτε ότι:

$$T \simeq \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \left(1 - \frac{kv_0 \sin \alpha}{3g} \right) .$$

Εν συνεχεία δείξτε ότι το βεληνεκές είναι,

$$R \simeq \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \left(1 - \frac{4kv_0 \sin \alpha}{3g} \right).$$

Συγκρίνετε την τιμή του R με αυτήν για $k = 0$ και υπολογίστε τη διαφορά του πραγματικού βεληνεκού R από αυτή της ιδεατής κατάστασης όπου $k = 0$. Συγκεκριμένα δείξτε ότι η διαφορά αυτή είναι

$$\Delta R \simeq \frac{4kv_0^2}{3g^2} \sin \alpha \sin 2\alpha.$$

- 4.3 Ένα σώμα κινείται οριζόντια εντός ενός μέσου με αντίσταση $\vec{F}_\alpha = -km\vec{v}$. Δείξτε ότι αν η αρχική του ταχύτητα $v(t=0) = v_0$ στην αρχική του θέση $x(t=0) = 0$, η θέση του τη χρονική στιγμή t είναι,

$$x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}).$$

Υπολογίστε επίσης την ταχύτητα $v(x)$.

- 4.4 Ένα σώμα πέφτει κατακόρυφα εντός του πεδίου βαρύτητας στην ατμόσφαιρα όπου στις χαμηλές ταχύτητες πτώσης η αντίσταση του αέρα είναι $\vec{F}_\alpha = -km\vec{v}$, ένθα k σταθερά. Δείξτε ότι αν $v(t=0) = v_0$ και $z(t=0) = h$ η στιγμιαία ταχύτητα και το ύψος του είναι,

$$v(t) = \frac{g}{k} + \frac{kv_0 - g}{k}e^{-kt},$$

$$z(t) = h - \frac{gt}{k} - \frac{kv_0 - g}{k^2}(1 - e^{-kt}).$$

- 4.5 Ένα σώμα μάζας m κινείται εντός ενός μέσου με αντίσταση $F_\alpha = -mk(v^3 + a^2v)$ όπου k, a σταθερές. Δείξτε ότι όσο μεγάλη και αν είναι η αρχική ταχύτητά του, η μέγιστη απόσταση απομάκρυνσης δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από $\pi/2ka$.

- 4.6 Ένα σώμα μάζας m κινείται εντός πεδίου δυνάμεων που προέρχονται από το δυναμικό

$$V(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}.$$

ένθα a, b σταθερές. Να ευρεθούν τα σημεία ισορροπίας και τα είδη των κινήσεων αναλόγως των αρχικών συνθηκών.

- 4.7 Ένα σώμα μάζας m κινείται πάνω στον άξονα Ox υπό την επίδραση της δύναμης $F(x) = -k/x^2$, $x > 0$. Αν $x(t = 0) = a > 0$, $\dot{x}(t = 0) = 0$ δείξτε ότι θα φθάσει στην αρχή σε χρόνο

$$t_0 = \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{ma}{2k}} .$$

- 4.8 Ένα μπαλάκι εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_a στο ομογενές πεδίο βαρύτητας της Γης. Στην κίνησή του υφίσταται αντίσταση ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητάς του και όταν επανέλθει στο σημείο από το οποίο αρχικά εκτοξεύτηκε έχει ταχύτητα v_τ . Εάν T_α , T_τ είναι οι αρχικές και τελικές κινητικές του ενέργειες και $T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ ένθα v_0 η οριακή ταχύτητα δείξτε ότι

$$\frac{1}{T_\tau} = \frac{1}{T_\alpha} + \frac{1}{T_0} .$$

- 4.9 Στο πρόβλημα της ελεύθερης πτώσης του αλεξιπτωτιστή που συζητήθηκε προηγουμένως, βρείτε την ταχύτητα σαν συνάρτηση της απόστασης που έχει διανυθεί. Σε ποιά απόσταση η ταχύτητα είναι ίση με $\frac{2}{3}v_0$, $v_0 = 54 \text{ m/sec}$;
- 4.10 Μια σφαιρική σταγόνα νερού με αρχική ακτίνα r_0 και αρχική ταχύτητα v_0 πέφτοντας μέσα σε ένα νέφος της ατμόσφαιρας συγκεντρώνει πάνω της υδρατμούς και ο ρυθμός αύξησης της μάζας της είναι ανάλογος της διατομής της. Αγνοώντας δυνάμεις αντίστασης δείξτε ότι η ακτίνα της αυξάνει γραμμικά με το χρόνο και ότι αν η r_0 είναι αμελητέα, η ταχύτητα αυξάνει γραμμικά με το χρόνο μέσα στο νέφος.