*Κανάρης Χ. Τσίγκανος*
*Καθηγητής Τμήματος Φυσικής*
*Πανεπιστημίου Αθηνών*

# Εισαγωγή στη ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

*με 200 παραδείγματα και λυμένα προβλήματα*

**Αθήνα - 2004**

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## Οι Αρχές της Κλασικής Μηχανικής

Η αφετηρία κάθε επιστημονικής θεωρίας είναι ένα σύνολο από αξιώματα, αρχές ή υποθέσεις. **Αξίωμα**, είναι μια φυσική πρόταση η οποία αν στη συνέχεια επαληθευτεί από το πείραμα αποκτά την ισχύ **φυσικού νόμου**. Με άλλα λόγια, το πείραμα τελικά επαληθεύει μία συγκεκριμένη μαθηματική έκφραση ενός φυσικού νόμου. Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ωστόσο ότι η ισχύς των φυσικών νόμων δεν είναι πάντα καθολική, αλλά περιορίζεται εκεί που έχει ελεγχθεί από το **πείραμα**. Για παράδειγμα, τα αξιώματα του Ευκλείδη ενώ ισχύουν στη συνηθισμένη κλίμακα, δεν ισχύουν στην κοσμολογική κλίμακα όπου τα τροποποιεί η θεωρία της Γενικής Σχετικότητας του Einstein. Από το άλλο μέρος, οι νόμοι της διατήρησης της ενέργειας, ορμής και στροφορμής, φαίνεται να έχουν, από όσο γνωρίζουμε ως τώρα, καθολική ισχύ.

Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε τις βασικές αρχές της Κλασικής Μηχανικής, όπως τις διετύπωσε ο Νεύτων στο έργο του *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* το έτος 1687.

### 3.1 Τα αξιώματα του Νεύτωνα

- $1^o$ αξίωμα (*νόμος της αδράνειας*).

  *Ένα σώμα παραμένει σε ηρεμία ή κινείται με σταθερή ταχύτητα, εκτός αν δράσει πάνω του μια δύναμη.*

  Το αξίωμα αυτό εισάγει την έννοια του «ελευθέρου σώματος» και (αρνητικά) τον όρο «δύναμη», δηλαδή αναφέρεται στο τι συμβαίνει όταν σε ένα σώμα δεν δρα κάποια δύναμη. Ας ορίσουμε την ορμή $\vec{p}$, ή ποσότητα κινήσεως του σώματος,

$$\vec{p} \equiv m^a \vec{v} \ ,$$

όπου $m^a$ είναι μία *σταθερή* βαθμωτή ποσότητα που χαρακτηρίζει το σώμα και ονομάζεται *μάζα αδράνειας του σώματος* και $\vec{v}$ η ταχύτητά του. Τότε, το αξίωμα αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής :

απουσία εξωτερικής δύναμης $\Longrightarrow$ $\vec{p}$ $=$ σταθερό διάνυσμα

δηλ., το αξίωμα αυτό μας λέει ότι ένα ελεύθερο υλικό σημείο δε μπορεί από μόνο του να αλλάξει την κινητική του κατάσταση.

- $2^o$ αξίωμα (*νόμος της επιτάχυνσης*).

  *'Οταν ένα σώμα επηρεάζεται από μια δύναμη $\vec{F}$, τότε κινείται έτσι ώστε ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του να ισούται με τη δύναμη $\vec{F}$,*

  $$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \ .$$

  Εφόσον στην Κλασική Μηχανική η μάζα αδράνειας ενός σώματος είναι σταθερή, το δεύτερο αξίωμα μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής,

  $$\vec{F} = m^a \vec{a} = m^a \frac{d\vec{v}}{dt} = m^a \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \ .$$

  Το αξίωμα αυτό εισάγει πραγματικά την έννοια της δύναμης, και ο προηγούμενος τύπος συνδέει δύο βασικά μεγέθη της φυσικής, τη δύναμη $\vec{F}$ και τη μάζα αδράνειας $m^a$.

  Το δεύτερο αξίωμα μας δίνει τη βασική διαφορική εξίσωση η επίλυση της οποίας προσδιορίζει μονοσήμαντα τη θέση $\vec{r}(t)$ ενός σώματος εφόσον γνωρίζουμε :

  - την έκφραση της δύναμης $\vec{F}(\vec{r}, t)$ η οποία δρα στο σώμα και
  - τη θέση $\vec{r}(t_0)$ και ταχύτητα $\vec{v}(t_0)$ του σώματος κάποια αρχική χρονική στιγμή $t_0$.

  Επομένως στην Κλασική Μηχανική ισχύει η **αρχή του καθορισμού**, δηλαδή η εξέλιξη ενός συστήματος από κάποια δεδομένη αρχική κατάσταση είναι μονοσήμαντα καθορισμένη από τις αρχικές συνθήκες και το δεύτερο αξίωμα του Νεύτωνα. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στην Κλασική Μηχανική δεχόμαστε ότι είναι δυνατό να προσδιορίσουμε κάποια χρονική στιγμή τη θέση και την ταχύτητα ενός σώματος με άπειρη ακρίβεια, κάτι βέβαια που τροποποιεί η αρχή της απροσδιοριστίας της Κβαντικής Μηχανικής. Αξίζει επίσης να σημειώσουμε ότι η εξίσωση του δεύτερου αξιώματος είναι μια *δευτεροτάξια* διαφορική εξίσωση και γι΄ αυτό απαιτούνται μόνο η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα για τον πλήρη προσδιορισμό της θέσης ενός σώματος. Αν π.χ. το δεύτερο αξίωμα του Νεύτωνος εκφραζόταν από μια τριτοτάξια διαφορική εξίσωση, τότε θα χρειαζόταν και η αρχική επιτάχυνση για τον πλήρη καθορισμό της τροχιάς του σώματος.

- $3^o$ αξίωμα (*νόμος δράσης - αντίδρασης*).

  *Εάν δύο απομονωμένα σώματα αλληλεπιδρούν, τότε οι δυνάμεις που το ένα ασκεί στο άλλο είναι ίσες σε μέγεθος, αντίθετες σε διεύθυνση και ενεργούν στην ευθεία που ενώνει τα δύο σώματα.* Το αξίωμα αυτό λέει δηλαδή ότι αν $\vec{F}_{12}$ είναι η δύναμη που ασκεί ένα σώμα 1 σε ένα άλλο σώμα 2 (δράση), τότε η δύναμη $\vec{F}_{21}$ που ασκεί το σώμα 2 στο σώμα 1 (αντίδραση) είναι

  $$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \ .$$

  Οι δυνάμεις εκδηλώνονται κατά ζεύγη και μεμονωμένη δύναμη δεν υπάρχει. Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι το τρίτο αξίωμα δεν ισχύει στον Ηλεκτρομαγνητισμό κατά την αλληλεπίδραση δύο κινουμένων φορτίων. Εκεί οι δύο δυνάμεις *που εξαρτώνται απο την ταχύτητα*, δεν ενεργούν στην ίδια ευθεία ενώ το Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει επίσης ορμή.

- $4^o$ αξίωμα (*απόλυτος χρόνος*).

  *Η ροή του χρόνου δεν επηρεάζεται από οτιδήποτε εξωτερικό.* Δηλαδή υπάρχει μια παγκόσμια χρονική κλίμακα και επομένως δύο παρατηρητές που έχουν συγχρονίσει τα ρολόγια τους, θα συμφωνούν πάντοτε για το χρόνο οποιουδήποτε γεγονότος. Έτσι, ο χρόνος θεωρείται **ομογενής**, δηλαδή τα αποτελέσματα ενός πειράματος είναι τα ίδια για διαφορετικές χρονικές στιγμές εκτέλεσης του πειράματος.

- $5^o$ αξίωμα (*απόλυτος χώρος*).

  *Ο χώρος είναι απόλυτος και ανεπηρέαστος από οποιοδήποτε εξωτερικό αίτιο.* Δηλαδή ο χώρος θεωρείται συνεχής, τριών διαστάσεων, **ομογενής** και **ισότροπος** (Ευκλείδειος) και τα αποτελέσματα ενός πειράματος είναι ανεξάρτητα των χωρικών του συντεταγμένων και του προσανατολισμού του.

Μια άλλη σημαντική παραδοχή της Κλασικής Μηχανικής είναι η ύπαρξη μιάς ειδικής κατηγορίας συστημάτων, των *αδρανειακών συστημάτων*, όπου οι βασικοί νόμοι της Μηχανικής είναι πάντοτε οι ίδιοι.

Συνοψίζοντας, πρέπει να αναφέρουμε ότι με βάση αυτά τα πέντε απλά αξιώματα του Νεύτωνα, η Κλασική Μηχανική έχει καταφέρει να ερμηνεύσει, με ικανοποιητικό τρόπο, όλα σχεδόν τα φυσικά φαινόμενα του «χειροπιαστού» μας κόσμου. Παρόλα τα 300 χρόνια που έχουν περάσει από τότε και παρόλες τις τροποποιήσεις της Νευτώνειας Μηχανικής κατά τον τελευταίο αιώνα, τα αξιώματα του Νεύτωνα περιγράφουν ικανοποιητικά πολλά φαινόμενα, όπως π.χ. την τοποθέτηση σε τροχιά γύρω απο την Γη διαφόρων τεχνητών δορυφόρων.

## 3.2 Ο Νόμος της Παγκοσμίου Έλξεως

Ο Νεύτων (1666) μελετώντας τους νόμους του Kepler, έδειξε ότι αυτοί μπορούν να κατανοηθούν και να αποδειχθούν εάν ισχύει ο νόμος της παγκόσμιας έλξης,

$$\vec{F}_{12} = -\frac{G m_1^\beta m_2^\beta}{r^2}\hat{r} \ ,$$

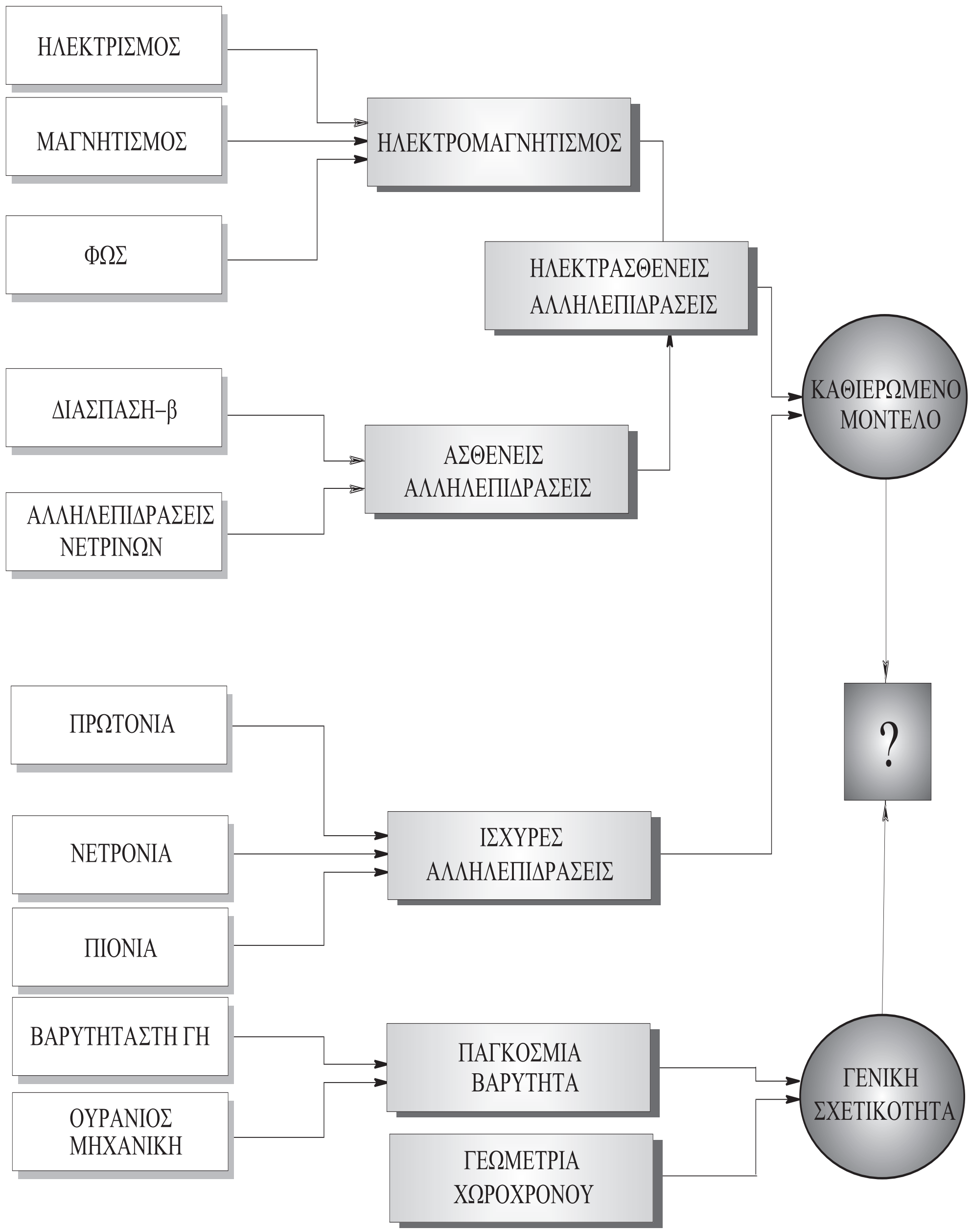
όπου η δύναμη έλξης ανάμεσα σε δύο μάζες $m_1^\beta$, $m_2^\beta$ είναι ανάλογη των μαζών αυτών και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της αποστάσεως αναμεταξύ τους. Στην έκφραση αυτή εισέρχεται και η σταθερά της παγκοσμίου έλξεως G,

$$G = 6.672 \times 10^{-8} \frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{gr\ sec}^2} \ .$$

Οι ποσότητες $m_1^\beta$ και $m_2^\beta$ ονομάζονται μάζες «βαρύτητας» των σωμάτων 1 και 2. Αξίζει να σημειωθεί ότι η δύναμη της βαρύτητας είναι η πλέον ασθενής από τις τέσσερεις δυνάμεις της φύσης:

| Δυνάμεις/αλληλεπιδράσεις | Ισχύς |
|---|---|
| Δυνάμεις **ισχυρών** αλληλεπιδράσεων (Ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις) | 1 |
| Δυνάμεις **ηλεκτρομαγνητικών** αλληλεπιδράσεων (Ηλεκτρ/κές δυνάμεις) | $10^{-2}$ |
| Δυνάμεις **ασθενών** αλληλεπιδράσεων (Ασθενείς πυρηνικές δυνάμεις) | $10^{-13}$ |
| Δυνάμεις **βαρυτικών** αλληλεπιδράσεων (Βαρυτικές δυνάμεις) | $10^{-38}$ |

Μολαταύτα, στο Σύμπαν η βαρύτητα παίζει κυρίαρχο ρόλο, ενώ οι άλλες δυνάμεις περιορίζονται σε δευτερότερο ρόλο, όπως αυτόν του να καθυστερήσουν την τελική κατάληξη των άστρων και του Σύμπαντος σε καταστάσεις εξαιρετικά μεγάλης πυκνότητος (μελανές οπές).




**Σχ. 3.1:** *Οι Αλληλεπιδράσεις στη Φυσική και η πορεία ενοποίησής τους.*

## 3.3 Μάζα Αδράνειας και Μάζα Βαρύτητας

Οι μάζες που εμφανίζονται στο νόμο της παγκοσμίου έλξεως είναι οι μάζες «βαρύτητας», $m^\beta$, ενώ στο δεύτερο αξίωμα του Νεύτωνα η μάζα «αδράνειας», $m^\alpha$

$$\vec{F} = m^\alpha \vec{a}\,, \qquad \vec{F} = -G\frac{m_1^\beta m_2^\beta}{r^2}\hat{r}\ .$$

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε μερικά πειραματικά δεδομένα που αποδεικνύουν ότι ο λόγος των μαζών αδράνειας και βαρύτητας είναι ο ίδιος για όλα τα σώματα. Συνεπώς, με κατάλληλη εκλογή των μονάδων, η «βαρεία μάζα» συμπίπτει με την «αδρανή μάζα». Η ισότητα αυτών των δύο μαζών επαληθεύτηκε με πολύ ακριβή πειράματα με το ζυγό στρέψεως από τον Eotvos (1890),

$$\frac{\Delta(m^\beta - m^\alpha)}{m} \ll 10^{-11}\ .$$

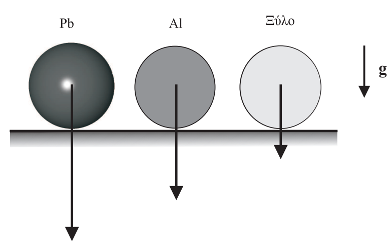
Στη Θεωρία της Σχετικότητας η **αρχή της ισοδυναμίας** δέχεται *αξιωματικά* ότι $m^\beta = m^\alpha$.

### 3.3.1 Ελεύθερη πτώση σωμάτων στην επιφάνεια της Γης

Για δύο σώματα πάνω στην επιφάνεια της Γης, ο λόγος των δυνάμεων έλξεως της Γης πάνω τους, δηλαδή ο λόγος των βαρών τους είναι

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{m_1^\beta}{m_2^\beta}\ .$$

Υπό την επίδραση των $B_1, B_2$ τα σώματα πέφτουν με επιταχύνσεις $g_1$ και $g_2$ και




**Σχ. 3.2:** *Σύμφωνα με τις κλασικές μετρήσεις του Γαλιλαίου στην Πίζα, οι τρείς μάζες από μόλυβδο, αλουμίνιο και ξύλο πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση στο πεδίο βαρύτητας της Γης.*

επομένως

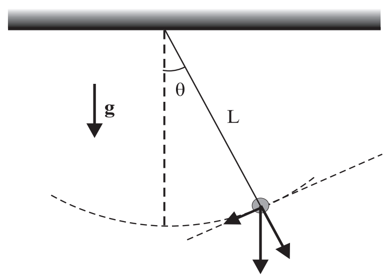
$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{m_1^\alpha g_1}{m_2^\alpha g_2} \; .$$

Σύμφωνα όμως με τις μετρήσεις του Γαλιλαίου, και τα δύο σώματα πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση, $g = g_1 = g_2$. Επομένως,

$$\frac{m_1^\alpha}{m_1^\beta} = \frac{m_2^\alpha}{m_2^\beta} \equiv \lambda \; .$$

Το αποτέλεσμα αυτό μας λέγει ότι ο λόγος $\lambda$ της μάζας αδράνειας και μάζας βαρύτητος είναι ο ίδιος για όλα τα σώματα.

### 3.3.2 Η περίοδος μικρών ταλαντώσεων ενός απλού εκκρεμούς




**Σχ. 3.3:** *Ταλαντώσεις μικρού γωνιακού πλάτους ενός απλού εκκρεμούς μήκους $L$.*

Για να συγκρίνει τις $m^\beta$ και $m^\alpha$ ο Νεύτων παρατήρησε ότι στην περίπτωση των ταλαντώσεων μικρού γωνιακού πλάτους ενός απλού εκκρεμούς μήκους $L$, η εξίσωση της κινήσεώς του

$$B \sin\theta = -m^\alpha L \ddot{\theta} \; ,$$

γίνεται για μικρά $\theta$,

$$\ddot{\theta} + \frac{m^\beta}{m^\alpha} \frac{g}{L} \theta \simeq 0 \; .$$

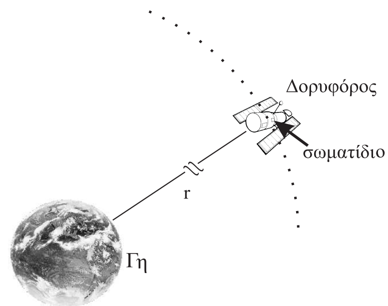
Συνεπώς, η περίοδος των ταλαντώσεων του εκκρεμούς είναι

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sqrt{\frac{m^\alpha}{m^\beta}} \; .$$

Ο Νεύτων παρατήρησε ότι η περίοδος αυτή $T$ είναι ανεξάρτητη της φύσεως της ταλαντούμενης μάζας και επομένως ο λόγος $\lambda$ είναι ανεξάρτητος της ταλαντούμενης μάζας.

### 3.3.3 Κίνηση μάζας εντός δορυφόρου σε τροχιά περί τη Γη

Ένας άλλος τρόπος που μπορεί να ελεχθεί ο λόγος $m^\alpha/m^\beta$ ενός σώματος είναι όταν αυτό ευρίσκεται εντός ενός δορυφόρου που έχει τεθεί σε τροχιά γύρω από τη Γη. Έστω $M_\oplus^\beta$ η μάζα βαρύτητας της Γης, $M_\Delta^\alpha$, $M_\Delta^\beta$ η μάζα αδράνειας και βαρύτητας του δορυφόρου αντίστοιχα, και $m^\alpha$, $m^\beta$ οι αντίστοιχες μάζες του σώματος μέσα στο δορυφόρο. Τότε, επειδή ο δορυφόρος ευρίσκεται σε κυκλική




**Σχ. 3.4:** *Κίνηση μάζας εντός δορυφόρου σε τροχιά περί τη Γη.*

τροχιά ακτίνας $R$,

$$M_\Delta^\alpha \frac{v^2}{R} = \frac{G M_\oplus^\beta}{R^2} M_\Delta^\beta \; .$$

Επειδή όμως και το σώμα διαγράφει μαζί με το δορυφόρο την ίδια κυκλική τροχιά θα έχουμε επίσης,

$$m^\alpha \frac{v^2}{R} = \frac{G M_\oplus^\beta}{R^2} m^\beta \; ,$$

εφόσον το σώμα κινείται με την ίδια ταχύτητα $v$ μαζί με το δορυφόρο γύρω από τη Γη. Έχουμε τότε

$$\frac{M_\Delta^\alpha}{M_\Delta^\beta} = \frac{m^\alpha}{m^\beta} \, .$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι και στις τρείς προηγούμενες περιπτώσεις, το πείραμα ήταν αυτό που οδήγησε στη σταθερότητα του λόγου της αδρανειακής και της μάζας βαρύτητος.

## 3.4 Αδρανειακά συστήματα

Ένα εύλογο ερώτημα είναι σε ποιά συστήματα συντεταγμένων ισχύουν οι τρεις νόμοι του Νεύτωνα ; Ως γνωστό, η Γη κινείται γύρω από τον Ήλιο σε περίπου κυκλική τροχιά ακτίνας $\alpha \simeq 150.000.000$km με ταχύτητα περίπου 30km/sec. Επομένως η Γη αισθάνεται επιτάχυνση $a = v^2/r = 0.6\,\mathrm{cm/sec}^2 \ll g = 10^3\,\mathrm{cm/sec}^2$. Από το άλλο μέρος, ο Ήλιος κινείται επίσης σε περίπου κυκλική τροχιά ακτίνας $R \approx 30.000$ ετών φωτός $\simeq 2.8 \times 10^{22}\,\mathrm{cm}$ και με ταχύτητα $V = 250\,\mathrm{km/sec}$ γύρω από το κέντρο του Γαλαξία μας. Επομένως λόγω της κίνησης αυτής γύρω από το κέντρο του Γαλαξία, δέχεται επιτάχυνση, $A = 2.2 \times 10^{-8}\,\mathrm{cm/sec}^2 \ll \alpha \ll g = 10^3\,\mathrm{cm/sec}^2$. Επομένως ούτε και αυτό το σύστημα είναι αδρανειακό, δηλαδή μη επιταχυνόμενο.

Σε πρώτη προσέγγιση ωστόσο μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων που ορίζεται από το κέντρο μάζας του Ηλιακού μας συστήματος και τρεις μη συνεπίπεδες διευθύνσεις από το σημείο αυτό προς τρεις μακρινούς αστέρες. Έχοντας αυτό το σύστημα αναφοράς ως βάση μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα άλλο σύστημα αναφοράς είναι αδρανειακό.

Ένα τέτοιο σύστημα ορίζεται από το κέντρο της Γης και τρεις σταθερές διευθύνσεις. Αυτές μπορεί να είναι ο άξονας περιστροφής της Γης και δύο άλλες διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους, οι οποίες δεν παρακολουθούν την περιστροφή της Γης αλλά μετατοπίζονται παράλληλα προς τον εαυτό τους. Το σύστημα αυτό είναι αδρανειακό διότι αν δεν λάβουμε υπόψη την καμπυλότητα της τροχιάς της Γης περί τον Ήλιο, κινείται ευθύγραμμα και με σταθερή ταχύτητα ως προς το βασικό αδρανειακό σύστημα.

Σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας του Γαλιλαίου όλα τα αδρανειακά συστήματα είναι ισοδύναμα για τη διατύπωση των νόμων της Μηχανικής, ενώ *κριτήριο* για να διαπιστώσουμε αν ένα σύστημα είναι αδρανειακό είναι να ελέγξουμε αν ισχύει σ' αυτό το πρώτο αξίωμα του Νεύτωνα.

Οι τύποι μετασχηματισμού του Γαλιλαίου ανάμεσα σε δύο συστήματα αναφοράς εκ των οποίων το ένα κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το άλλο σύστημα αναφοράς είναι:

$$x = x' \ ,$$

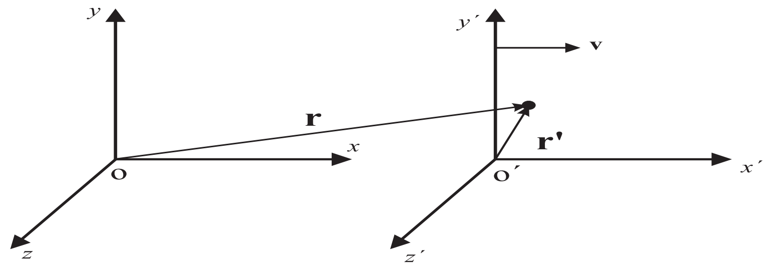
$$y = y' \ ,$$

$$z = z' + vt \ ,$$

$$t = t' \ .$$

Από τους τύπους αυτούς του μετασχηματισμού παρατηρούμε:

$$F_x = F'_x \ ,$$




**Σχ. 3.5:** *Δύο συστήματα αναφοράς $Oxyz$, $O'x'y'z'$ εκ των οποίων το δεύτερο κινείται με σταθερή ταχύτητα $v$ ως προς το πρώτο.*

$$F_y = F'_y \ ,$$

$$F_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 z'}{dt'^2} = F'_z \ ,$$

και συνεπώς $\vec{F} = \vec{F}'$. Δηλαδή, αν ένα σύστημα $O^{'}x^{'}y^{'}z^{'}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $v$ ως προς ένα ακίνητο σύστημα Oxyz τότε αυτό είναι αδρανειακό. Αντίθετα, αν το $O^{'}x^{'}y^{'}z^{'}$, επιταχύνεται ως προς το $Oxyz$, δεν είναι αδρανειακό σύστημα.

## Διαδίκτυο

Βιογραφικά στοιχεία γιά τον Νεύτωνα και τον Γαλιλαίο, μπορειτε να βρείτε στις διευθύνσεις :
http://www−history.mcs.st−andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Newton.html
http://www−history.mcs.st−andrews.ac.ulk/history/Mathematicians/Galileo.htm

Ειδική σελίδα γιά τον Νεύτωνα στο διαδίκτυο υπάρχει στη διεύθυνση :

http://www.newton.cam.ac.uk/newton.html#web

Ενδιαφέροντα στοιχεία γιά τον Νεύτωνα και την εξέλιξη των ιδεών που οδήγησαν στη Νευτώνεια Μηχανική μπορείτε να βρείτε στη διεύθυνση :

http://www.courses.fas.harvard.edu/˜ scia17/

Από αυτές τις διευθύνσεις μπορείτε να κάνετε πολλές άλλες σχετικές και ενδιαφέρουσες συνδέσεις.

## 3.5 Σύντομο Βιογραφικό του Ι. Νεύτωνα


**Σχ. 3.6:** *I. Newton (1642-1727), National Portrait Gallery, UK.*

Τη χρονιά που πέθανε ο Γαλιλαίος, γεννήθηκε ο θεμελιωτής του Απειροστικού Λογισμού και της Μηχανικής Isaac Newton, τα Χριστούγεννα του 1642, από γονείς αγρότες στο μικρό χωριό Woolsthorpe της Αγγλίας. Στη νεανική του ηλικία δεν επέδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις σπουδές του, σαν φοιτητής όμως του Πανεπιστημίου του Cambridge, ο Νεύτων είχε τέτοιες επιδόσεις που ο καθηγητής του I. Barrow παραιτήθηκε οικειοθελώς από την έδρα του χάριν του ασύγκριτου μαθητή του, ηλικίας τότε 26 ετών. Τρία χρόνια πριν, το 1665, όταν το Πανεπιστήμιο έκλεισε λόγω μιας επιδημίας, ο Νεύτων συνέλαβε επαναστατικές ιδέες για τη Φυσική και τα Μαθηματικά που δημοσίευσε αργότερα στα έργα του:

**1**. *Method of Fluxions, 1736.* Ένα χειρόγραφο ημερομηνίας 20 Μαΐου 1665 δείχνει πως ο Νεύτων είχε ήδη αναπτύξει αρκετά τις αρχές του Λογισμού ώστε να μπορεί να βρεί την εφαπτομένη και την καμπυλότητα σε κάθε σημείο μίας συνεχούς καμπύλης. Κάλεσε τη μέθοδό του «ρευστά» από την ιδέα των «ρεόντων» ή μεταβλητών ποσοτήτων και από τους ρυθμούς «ροής» ή αύξησής τους.

**2**. *Philosophia Naturalis Principia Mathematica, 1687.* Η δεύτερη από τις μεγάλες εμπνεύσεις του Νεύτωνα ήταν ο νόμος της παγκοσμίου έλξεως. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον νόμο και τον Λογισμό που πρόσφατα είχε επίσης εφεύρει, εξήγησε τους τρείς εμπειρικούς νόμους του Kepler, υπολόγισε τη μάζα του Ήλιου, ζύγισε τη Γη και κάθε πλανήτη που έχει δορυφόρο, εξήγησε τις παλίρροιες, κτλ. Για τις προηγούμενες καθώς και τις άλλες ανακαλύψεις του, ο Lagrange παρατήρησε ότι ο Νεύτων δεν ήταν μόνο ο μεγαλύτερος επιστήμονας που έζησε ποτέ, αλλά και ο τυχερότερος, γιατί μόνο μια φορά μπορεί κανείς να περιγράψει τους νόμους του κόσμου.

**3**. *Theory of Light-Optics, 1704.* Στην τρίτη θεωρία του για τη φύση του φωτός, πρότεινε ότι στο φως συμβαίνει εκπομπή σωματιδίων και έτσι δεν είναι ένα κυματικό φαινόμενο, όπως ισχυριζόταν ο Huygens. Αν και οι δύο θεωρίες φαίνονταν να αντιφάσκουν μεταξύ τους, σήμερα έχουν συνδυασθεί και συμφιλιωθεί στη μοντέρνα κβαντική θεωρία. Το 1668 κατασκεύασε μόνος του ένα ανακλαστικό τηλεσκόπιο για να παρατηρήσει τους δορυφόρους του Δία. Αυτό που αναμφίβολα τον ενδιέφερε ήταν να διαπιστώσει «ιδίοις όμμασι» κατά πόσον ο νόμος του της βαρύτητας ήταν πραγματικά παγκόσμιος.

Στην περίφημη *Philosophiae Naturalis Mathamatica* (Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας) ο Νεύτων κατέγραψε τις ανακαλύψεις του στα Μαθηματικά, την Αστρονομία και τη Φυσική και δημοσίευσε το 1687 με παρακίνηση και έξοδα του Halley. Η εικοσαετής καθυστέρηση του Νεύτωνα να δημοσιεύσει το νόμο της βαρύτητας, πιθανότατα οφείλεται στην αδυναμία του (;) να λύσει ένα πρόβλημα ολοκληρωτικού λογισμού, που σήμερα οι νέοι φοιτητές καλούνται να λύσουν σε είκοσι λεπτά. Δηλαδή, να βρεί τη συνολική έλξη που ασκείται από μια σφαιρική ομοιογενή μάζα πάνω σε ένα σωματίδιο με δοσμένη μάζα που βρίσκεται έξω από τη σφαίρα. Η έλξη βέβαια είναι η ίδια, σαν να είχε συγκεντρωθεί ολόκληρη η μάζα της σφαίρας σε ένα και μόνο σημείο στο κέντρο της, και το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό της έλξης δύο σωματιδίων με γνωστές μάζες και σε γνωστή απόσταση μεταξύ τους. Στο πρώτο βιβλίο της *Principia* έθεσε τις αρχές της Δυναμικής. Στο δεύτερο πραγματεύεται την κίνηση σωμάτων σε μέσα με αντίσταση, και την κίνηση των ρευστών. Στο τρίτο περιγράφει το περίφημο «Σύστημα του Κόσμου». Πιθανώς κανένας άλλος νόμος της Φυσικής δεν έχει τόσο απλά ενοποιήσει έναν τόσο μεγάλο αριθμό φυσικών φαινομένων.

Ο Νεύτων συνέχισε τις έρευνές του έως τα τελευταία του χρόνια κατά τα οποία ήταν διευθυντής του Βασιλικού Νομισματοκοπείου. Έτσι, όταν το 1696 ο Johann Bernoulli έθεσε στους μαθηματικούς της Ευρώπης το πρόβλημα του βραχυστόχρονου, δηλαδή τον υπολογισμό του σχήματος της καμπύλης πάνω στην οποία πρέπει να γλιστρήσει χωρίς τριβή ένα σώμα υπό την επίδραση της βαρύτητας έτσι ώστε να φτάσει από το υψηλότερο στο χαμηλότερο σημείο στον ελάχιστο χρόνο, ο Νεύτων παρουσίασε αμέσως τη λύση του ανώνυμα στη Βασιλική Εταιρεία. Όταν ο Bernoulli έμαθε τη λύση και ρωτήθηκε για το ποιός θα μπορούσε να ήταν ο ανώνυμος μαθηματικός, αναφώνησε το περίφημο «εξ όνυχος τον λέοντα».

Τα Μαθηματικά, η Δυναμική και η Ουράνια Μηχανική δεν ήταν η μόνη ασχολία του Νεύτωνα. Φαίνεται ότι τον περισσότερο χρόνο του τον αφιέρωσε σε θεολογικές μελέτες. Πίστευε σε έναν πάνσοφο Δημιουργό του Σύμπαντος και η παρακάτω φράση του είναι αποκαλυπτική της κοσμοθεωριακής του τοποθέτησης:

*Δεν γνωρίζω πως μπορεί να φαίνομαι στον κόσμο. Όμως, η ιδέα που έχω για τον εαυτό μου είναι εκείνη ενός παιδιού που παίζει στην ακρογιαλιά και διασκεδάζει ανακαλύπτοντας μερικές φορές κάποιο βότσαλο πιο λείο και πιο όμορφο από τα συνηθισμένα, ή κάποιο χαριτωμένο όστρακο, ενώ ο μεγάλος ωκεανός της αλήθειας βρίσκεται όλος ανεξερεύνητος μπροστά μου.*