Κανάρης Χ. Τσίγκανος
Καθηγητής Τμήματος Φυσικής
Πανεπιστημίου Αθηνών

Εισαγωγή στη
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

με 200 παραδείγματα και λυμένα προβλήματα

Αθήνα - 2004

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

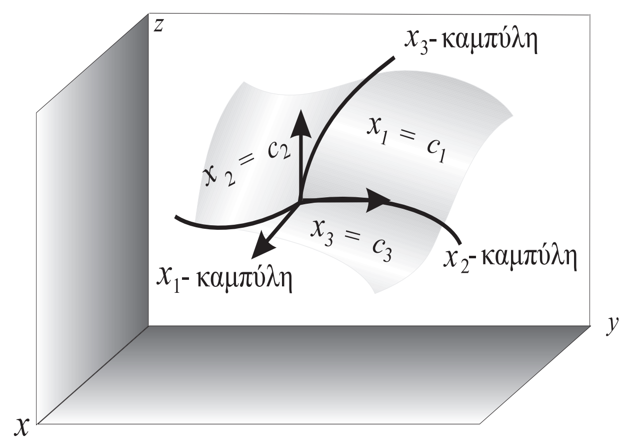
Κινηματική του υλικού σημείου

Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε εν συντομία συστήματα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων στα οποία μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση ενός υλικού σημείου το οποίο κινείται κατά μήκος κάποιας δεδομένης καμπύλης. Θα δώσουμε επίσης τις συνιστώσες των διανυσμάτων της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου το οποίο κινείται κατά μήκος μιάς δεδομένης καμπύλης σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες καθώς επίσης και το τοπικό συνοδεύον τρίεδρο της εφαπτομένης, πρώτης και δεύτερης καθέτου σε κάθε σημείο της τροχιάς του σώματος. Είναι επίσης πολύ χρήσιμο να γνωρίζουμε τις εκφράσεις των τελεστών της κλίσης, απόκλισης, στροφής και Λαπλασιανής σε τυχόν σύστημα ορθογώνιων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων.

2.1 Διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης υλικού σημείου

Στην Κλασική Μηχανική θεωρούμε ότι ο χώρος είναι Ευκλείδειος τριών διαστάσεων. Επομένως, η θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση ενός υλικού σημείου καθώς και άλλες διανυσματικές φυσικές ποσότητες όπως η ορμή του, στροφορμή του κ.τ.λ., περιγράφονται συναρτήσει μιας τριάδος διατεταγμένων αριθμών κάθε χρονική στιγμή t, των συντεταγμένων του σημείου (x_1, x_2, x_3). Τέτοιες τριάδες αριθμών υπάρχουν άπειρες, αλλά οι πλέον συνηθισμένες είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z), οι κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, ϕ, z) και οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ). Λιγώτερο γνωστές είναι οι παραβολικές, ελλειπτικές, τοροειδείς, κωνικές, κ.α., ορθόγωνες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Οι γνωστές μας ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) συσχετίζονται με τις ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) με κάποιους δεδομένους μετασχηματισμούς:

$$x = x(x_1, x_2, x_3) \ ,$$
$$y = y(x_1, x_2, x_3) \ ,$$
$$z = z(x_1, x_2, x_3) \ .$$



Σχ. 2.1: *Σχηματική αναπαράσταση των τριών γενικευμένων επιφανειών $(x_1, x_2, x_3) =$ σταθ. που είναι αντίστοιχα κάθετες στις διευθύνσεις $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$.*

Το διάνυσμα θέσεως τότε ενός υλικού σημείου είναι $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, ενώ

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_3}dx_3 = h_1 dx_1 \hat{x}_1 + h_2 dx_2 \hat{x}_2 + h_3 dx_3 \hat{x}_3 \, ,$$

όπου οι διανυσματικές μονάδες $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ και τα στοιχεία μήκους των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων h_1, h_2, h_3 συνδέονται με τις σχέσεις:

$$h_1 \hat{x}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1} \ , \quad h_2 \hat{x}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_2} \ , \quad h_3 \hat{x}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_3} \, .$$

Τότε, επειδή τα $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$ είναι μοναδιαία, ισχύει:

$$h_i = \mid \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \mid , \qquad \hat{x}_i = \frac{\partial \vec{r}/\partial x_i}{\mid \partial \vec{r}/\partial x_i \mid}, \quad i = 1, 2, 3 \, .$$

Το τετράγωνο του στοιχειώδους μήκους στις ορθογώνιες καμπυλόγραμμες αυτές συντεταγμένες είναι,

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2 \ ,$$

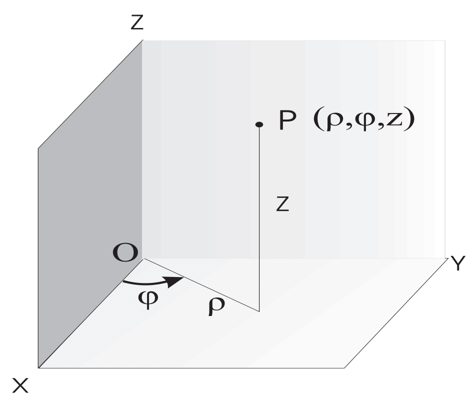
ενώ το στοιχείο όγκου είναι,

$$dV = h_1 h_2 h_3 dx_1 dx_2 dx_3 \ .$$

Παραδείγματα

1. Κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, ϕ, z):

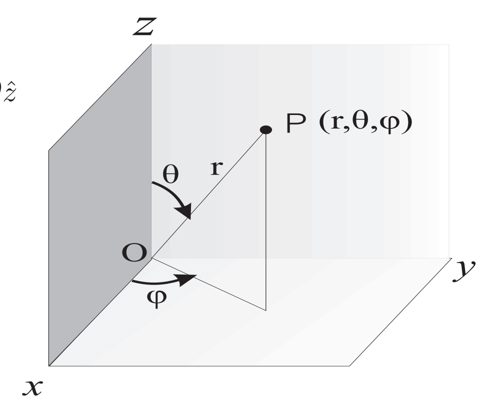
$x = \rho \cos\phi, \ y = \rho \sin\phi, \ z = z$
$h_1 = 1, \ h_2 = \rho, \ h_3 = 1$
$\hat{\rho} = \cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y}$
$\hat{\phi} = -\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y}$
$\hat{z} = \hat{z}$



Σχ. 2.2: *Ορισμός των κυλινδρικών συντεταγμένων* (ρ, ϕ, z).

2. Σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ):

$h_1 = 1, \ h_2 = r, \ h_3 = r \sin\theta$
$\vec{r} = r \sin\theta \cos\phi \hat{x} + r \sin\theta \sin\phi \hat{y} + r \cos\theta \hat{z}$
$\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$
$\hat{j} = \cos\theta \cos\phi \hat{x} + \cos\theta \sin\phi \hat{y} - \sin\theta \hat{z}$
$\hat{f} = -\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y} \, .$



Σχ. 2.3: *Ορισμός των σφαιρικών συντεταγμένων* (r, θ, ϕ).

2.2 Ταχύτητα και επιτάχυνση σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Στις κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, ϕ, z) το διάνυσμα θέσεως ενός υλικού σημείου είναι

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} \ ,$$

και η ταχύτητά του

$$\vec{v} = \frac{d(\rho\hat{\rho} + z\hat{z})}{dt} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\frac{d\hat{\rho}}{dt} + \dot{z}\hat{z} \ .$$

Επειδή όμως $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\phi)$,

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\hat{\rho}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}\hat{\phi} \ ,$$

η ταχύτητα γίνεται τελικά,

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z} \, .$$

Παρόμοια, για την επιτάχυνση έχουμε,

$$\vec{a} = \frac{d(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z})}{dt} =$$

$$= \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{d\hat{\rho}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} + \rho\dot{\phi}^2\frac{d\hat{\phi}}{d\phi} + \ddot{z}\hat{z} =$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z} \, .$$

2.2.1 Κίνηση πάνω σε καρδιοειδή καμπύλη

▷ Ένα σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα υ κατά μήκος της καρδιοειδούς καμπύλης $\rho = k(1 + \cos\phi)$ (Σχ. 2.4). Να υπολογισθεί η επιτάχυνση και η γωνιακή ταχύτητα του σωματιδίου.

Λύση: Επειδή σε κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, ϕ, z) η ταχύτητα και επιτάχυνση του σωματιδίου είναι,

$$\vec{\rho} = \rho\hat{\rho} \, , \qquad \dot{\vec{\rho}} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} \, , \qquad \ddot{\vec{\rho}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi} \, ,$$

έχουμε,

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2} = \dot{\phi}\sqrt{2k\rho} \;\Rightarrow\; \dot{\phi} = \frac{v}{\sqrt{2k^2(1+\cos\phi)}}\,.$$

Η ακτινική συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 = -k\left(\frac{v^2}{2k\rho}\cos\phi + \ddot{\phi}\sin\phi\right) - \frac{v^2}{2k}\,,$$

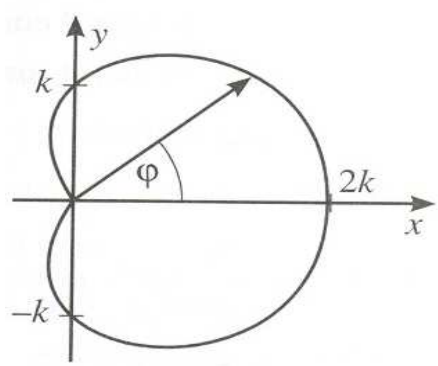
$$\ddot{\phi} = -\frac{v\dot{\rho}}{2\rho\sqrt{2k\rho}} = \frac{v^2\sin\phi}{4\rho^2} \;\Rightarrow\; a_\rho = -\frac{3}{4}\frac{v^2}{k}\,,$$

ενώ η αζιμουθιακή συνιστώσα της επιτάχυνσης a_ϕ είναι,

$$a_\phi = \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} = \frac{v^2\sin\phi}{4\rho} - 2k\frac{v^2\sin\phi}{2k\rho} = -\frac{3}{4}\frac{v^2}{k}\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi}\,.$$

Τελικά, η επιτάχυνση του σωματιδίου είναι:

$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\phi^2} = \frac{3}{4}\frac{v^2}{k}\sqrt{\frac{2}{1+\cos\phi}}\,.$$



Σχ. 2.4: *Η καρδιοειδής καμπύλη του προβλήματος.*

Η γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση απειρίζονται στην αρχή όταν $\rho \to 0,\ \phi \to 180^\circ$, παρά το ότι η ταχύτητα είναι πεπερασμένη. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η ανώμαλη συμπεριφορά της γωνιακής ταχύτητας οφείλεται μόνο στην επιλογή του συστήματος συντεταγμένων και είναι ανεξάρτητη της κίνησης πάνω στην καμπύλη.

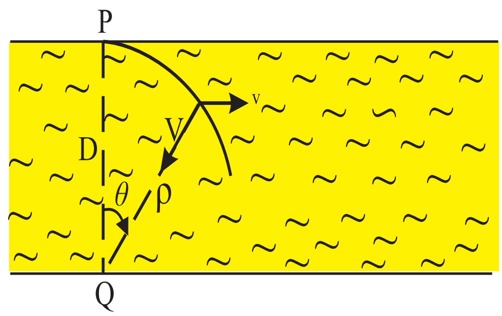
2.2.2 Κίνηση λέμβου σε ρεύμα

▷ Μια μηχανοκίνητη λέμβος ξεκινά από το σημείο P της μιας όχθης ενός ποταμού και κινείται με σταθερή ταχύτητα V προς το απέναντι σημείο Q, σε απόσταση D. Εάν ρ είναι η στιγμιαία απόστασή της από το Q και το ρεύμα του ποταμού κινείται με ταχύτητα v δείξτε ότι η τροχιά της λέμβου δίδεται από τη σχέση

$$\rho = \frac{D\sec\theta}{(\sec\theta + \tan\theta)^{\frac{V}{v}}} \; .$$

Εάν $v = V$ δείξτε ότι η τροχιά είναι παραβολική. Δίδεται ότι,

$$\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \ell n \left| \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} \right| \; .$$



Σχ. 2.5: *Κίνηση λέμβου με ταχύτητα V από τη μιά όχθη ενός ποταμού (το σημείο P) προς την αντίπερα όχθη του ποταμού (το σημείο Q) εάν το ρεύμα του ποταμού έχει ταχύτητα v.*

Λύση: Σε πολικές συντεταγμένες (ρ, θ) με τον άξονα-x στη διεύθυνση QP και τον άξονα-y από το Q και παράλληλα στην όχθη του ποταμού,

$$x = \rho\cos\theta \, , \quad y = \rho\sin\theta \, ,$$

$$\hat{\rho} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \, , \qquad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y} \, ,$$

και,

$$\vec{\rho} = \rho\hat{\rho} \, , \qquad \vec{v}_{\text{ολ}} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} \, .$$

Η συνολική ταχύτητα της λέμβου είναι

$$\vec{v}_{\text{ολ}} = (v\sin\theta - V)\;\hat{\rho} + v\cos\theta\;\hat{\theta} \, ,$$

και

$$\vec{v}_{\text{ολ}} = (v\sin\theta - V)\ \hat{\rho} + v\cos\theta\ \hat{\theta} = \frac{d\rho}{dt}\ \hat{\rho} + \rho\frac{d\theta}{dt}\ \hat{\theta}\,.$$

Έτσι,

$$\frac{d\rho}{dt} = v\sin\theta - V\,,$$

και

$$\rho\frac{d\theta}{dt} = v\cos\theta\,.$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε,

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta} = \tan\theta - \frac{V}{v}\sec\theta\,,$$

και ολοκληρώνοντας,

$$\ell n\rho = \ell n|\sec\theta| - \frac{V}{v}\ell n|\sec\theta + \tan\theta| + C\,,$$

Γιά (θ =0, $\rho = D$) και επομένως, $\ell nD = C$. Άρα,

$$\rho = \frac{D\sec\theta}{(\sec\theta + \tan\theta)^{\frac{V}{v}}}\ .$$

Όταν $V = v$,

$$\rho = \frac{D}{1+\sin\theta}\,,$$

και η τροχιά είναι παραβολική με τη μία εστία της παραβολής στο Q. Η λέμβος θα φθάσει στην αντίπερα όχθη σε σημείο που απέχει απόσταση $\rho = D/2$ από το Q.

2.3 Υπολογισμός ταχύτητας και επιτάχυνσης σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ).

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι, όπως και στις κυλινδρικές συντεταγμένες, τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$, μεταβάλλονται καθώς μεταβάλλονται οι συντεταγμένες $(\theta,\ \phi)$.

$$\begin{aligned}
\hat{r}(\theta,\ \phi) &= \frac{1}{h_r}\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z},\\
\hat{\theta}(\theta,\ \phi) &= \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z},\\
\hat{\phi}(\theta,\ \phi) &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y},
\end{aligned}$$

με $h_r = 1,\ h_\theta = r,\ h_\phi = r\sin\theta$. Έτσι:

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{r}}{dt} &= \dot{\theta}\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} + \dot{\phi}\frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} \\
&= \dot{\theta}\,(\cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z}) + \dot{\phi}\,(-\sin\theta\sin\phi\hat{x} + \sin\theta\cos\phi\hat{y}) \\
&= \dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\phi}
\end{aligned}$$

Παρόμοια,

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\theta}}{dt} &= \dot{\theta}\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta} + \dot{\phi}\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi} \\
&= \dot{\theta}\,(\sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}) - \dot{\phi}\,(\cos\theta\sin\phi\hat{x} - \cos\theta\cos\phi\hat{y}) \\
&= -\dot{\theta}\,\hat{r} + \cos\theta\dot{\phi}\,\hat{\theta}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\phi}}{dt} &= \dot{\theta}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\theta} + \dot{\phi}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\phi} = -\dot{\phi}\,\hat{x} - \dot{\phi}\cos\phi\,\hat{\theta} \\
&= -\dot{\phi}\left[\sin\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta}\right].
\end{aligned}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi},$$

και η επιτάχυνση:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} + a_\phi\hat{\phi},$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2,$$

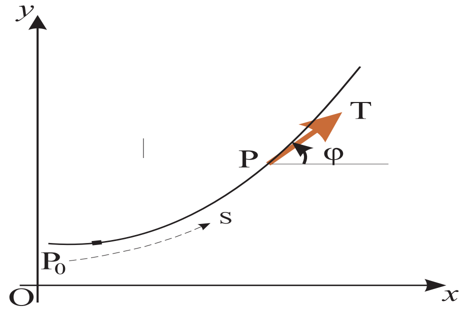
$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2,$$

$$a_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}).$$

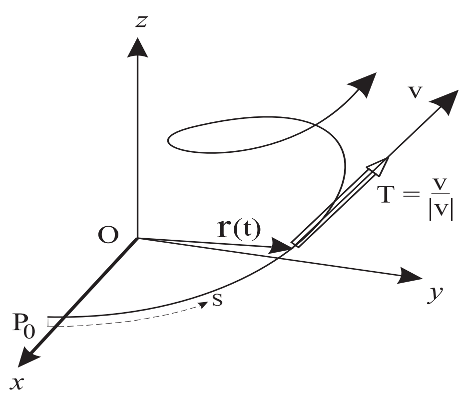
Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι για $\theta = \pi/2$, $(\sin\theta = 1,\ \dot{\theta} = 0,\ \cos\theta = 0)$ οι εκφράσεις αυτές ανάγονται στις αντίστοιχες εκφράσεις της ταχύτητας και επιτάχυνσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

2.4 Η εφαπτομένη, πρώτη και δεύτερη κάθετος μιας καμπύλης

Όπως είναι γνωστό απο τον Απειροστικό Λογισμό [1], όταν ένα σημείο κινείται κατά μήκος μιάς επίπεδης καμπύλης $\vec{r} = \vec{r}(s)$, τότε το διάνυσμα $d\vec{r}/ds$ είναι κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς (Σχ. 2.6),



Σχ. 2.6: *Σχηματική αναπαράσταση του διανύσματος της εφαπτομένης $\hat{T}$ σε δεδομένη επίπεδη καμπύλη $\vec{r} = \vec{r}(s)$.*



Σχ. 2.7: *Σχηματική αναπαράσταση του διανύσματος της εφαπτομένης $\hat{T}$ σε δεδομένη τριδιάστατη καμπύλη $\vec{r} = \vec{r}(s)$.*

Παρόμοια, έστω $\vec{r}(t)$ το διάνυσμα θέσεως ενός υλικού σημείου που κινείται κατά μήκος μιας καμπύλης στο χώρο. Η ταχύτητά του είναι

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\hat{T} \ ,$$

[1] *π.χ., βλ. Απειροστικός Λογισμός Ι*, G. Thomas & R. Finney, απόδοση στα Ελληνικά Κ. Τσίγκανος, ΠΕΚ.

όπου,

$$\hat{T} \equiv \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \ ,$$

είναι η εφαπτομένη της καμπύλης στο δεδομένο σημείο Σ. Επειδή το $\hat{T}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα,

$$\hat{T}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{T} \cdot \frac{d\hat{T}}{ds} = 0 \ .$$

Το διάνυσμα $d\hat{T}/ds$ είναι επομένως κάθετο στην εφαπτομένη και ορίζει την πρώτη κάθετο στην καμπύλη

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa \hat{N} \ .$$

με συντελεστή αναλογίας την **καμπυλότητα** κ της καμπύλης στο Σ,

$$\kappa = \frac{d\phi}{ds} \ .$$

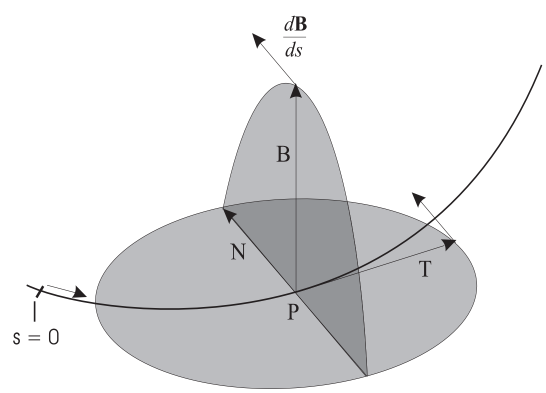
Το διάνυσμα,

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} \ ,$$

ορίζει ένα τρίτο μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στα $\hat{T}$ και $\hat{N}$ και ορίζει τη δεύτερη κάθετο της καμπύλης στο Σ. Η έκφραση

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \hat{N} \ ,$$

ορίζει τη **στρέψη** τ της καμπύλης στο Σ.



Σχ. 2.8: *Το συνοδεύον τρίεδρο $(\hat{T}, \hat{N}, \hat{B})$ μιάς τριδιάστατης καμπύλης $\vec{r} = \vec{r}(s)$.*

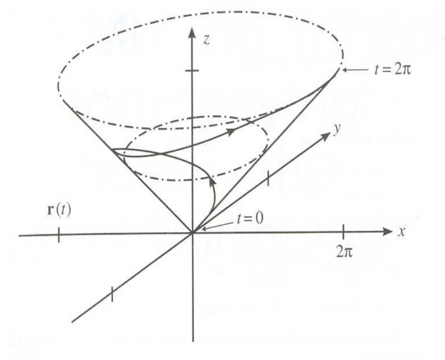
Τα διανύσματα $(\hat{T}, \hat{N}, \hat{B})$ ορίζουν **το συνοδεύον τρίεδρο** μιάς καμπύλης η οποία έχει καμπυλότητα κ και στρέψη τ.

2.4.1 Κίνηση πάνω σε σπειροειδή τροχιά στο χώρο

$\triangleright$ Ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω στην σπείρα (Σχ. 2.9),

$$r(t) = (R\cos\omega t,\ R\sin\omega t,\ b\omega t).$$

Να υπολογισθούν τα διανύσματα $\vec{T}$, $\vec{N}$, και $\vec{B}$.



Σχ. 2.9: *Η σπειροειδής καμπύλη του προβλήματος.*

Λύση: (α) *Εφαπτόμενο διάνυσμα*:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{v}}{v}\,.$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-\omega R\sin\omega t,\ \omega R\cos\omega t, b\omega), \quad v = \omega\sqrt{R^2+b^2}\,,$$

οπότε:

$$\vec{T} = \frac{(-R\sin\omega t,\ R\cos\omega t,\ b)}{\sqrt{R^2+b^2}}\,.$$

(β) *Πρώτη κάθετος*:

$$\kappa\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}/dt}{ds/dt} = \frac{-\omega R(\cos\omega t,\ \sin\omega t, 0)}{\omega\sqrt{R^2+b^2}\sqrt{R^2+b^2}}\,,$$

και επειδή $|\hat{N}| = 1$,

$$\kappa = \frac{R}{R^2+b^2}\,,$$

και

$$\vec{N} = -(\cos\omega t, \sin\omega t, 0)\,.$$

(γ) *Δεύτερη κάθετος*:

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{R^2+b^2}} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -R\sin\omega t & R\cos\omega t & b \\ -\cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \end{vmatrix} = \frac{(b\sin\omega t,\ -b\cos\omega t,\ R)}{R^2+b^2}\,,$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N} = \frac{d\vec{B}/dt}{ds/dt} = \frac{b}{R^2+b^2}(\cos\omega t,\ \sin\omega t,\ 0)\,,$$

και επειδή $|\hat{B}| = 1$, έχουμε:

$$\tau = \frac{b}{R^2+b^2}\,.$$

Σχόλια:

(*i*) Σε τυχούσα καμπύλη, η ακτίνα καμπυλότητος μεταβάλλεται συνεχώς κατά μήκος της καμπύλης και ισούται με την ακτίνα του τοπικά εφαπτόμενου κύκλου που καλείται και *συνεφαπτόμενος κύκλος*.

(*ii*) Η στρέψη της καμπύλης προσδιορίζει το ρυθμό με τον οποίο η καμπύλη αποκλίνει από το επίπεδο.

2.4.2 Εύρεση συνεφαπτόμενου κύκλου παραβολής

▷ Να υπολογισθούν τα διανύσματα της εφαπτομένης και της πρώτης καθέτου σε κάθε σημείο της παραβολής $y = x^2$ και να δειχθεί ότι ο συνεφαπτόμενος κύκλος της παραβολής στην αρχή των αξόνων έχει εξίσωση,

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,.$$

Λύση: Ένα κινητό που κινείται κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$ ξεκινώντας τη χρονική στιγμή $t = 0$ από την αρχή των αξόνων έχει διάνυσμα θέσεως, $\vec{r}(t)$,

$$\vec{r}(t) = t\hat{x} + t^2\hat{y}\,,$$

και ταχύτητα

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{x} + 2t\hat{y}\,, \qquad |\vec{v}| = \sqrt{1+4t^2}\,.$$

Η εφαπτομένη της τροχιάς είναι,

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\hat{x} + \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\hat{y}\,,$$

ενώ

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = -\frac{4t}{\sqrt{(1+4t^2)^3}}\hat{x} + \left[\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}} - \frac{8t^2}{\sqrt{(1+4t^2)^3}}\hat{y}\right].$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/dt}{|d\hat{T}/dt|}\,.$$

Στην αρχή των αξόνων, $t=0$ και η καμπυλότητα είναι,

$$\kappa(0) = \frac{1}{|v(0)|}\left|\frac{d\hat{T}(0)}{dt}\right| = 2\,.$$

Η ακτίνα καμπυλότητας είναι $R = 1/2$ και επειδή το κέντρο του συνεφαπτόμενου κύκλου είναι στο σημείο $(0, 1/2)$, ο συνεφαπτόμενος κύκλος θα έχει εξίσωση,

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,.$$

2.5 Επιτρόχιος και κεντρομόλος επιτάχυνση

Επειδή η ταχύτητα μέτρου $\dot{s}$ είναι στη διεύθυνση της εφαπτομένης $\hat{T}$,

$$\vec{v} = \dot{s}\hat{T}\ ,$$

η επιτάχυνση ενός υλικού σημείου έχει τις ακόλουθες συνιστώσες:

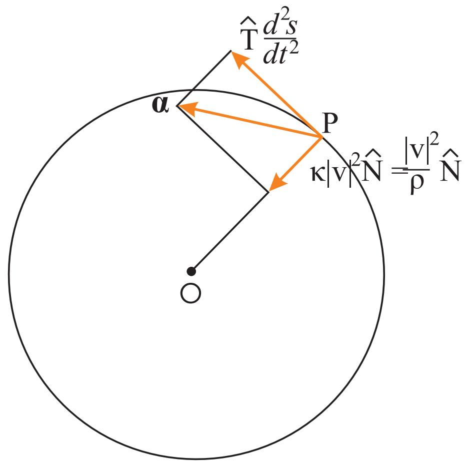
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{s}\hat{T} + \dot{s}\frac{d\hat{T}}{ds} = \ddot{s}\hat{T} + \dot{s}^2\kappa\hat{N}\ .$$

Η πρώτη συνιστώσα ονομάζεται **επιτρόχιος** επιτάχυνση και η δεύτερη **κεντρομόλος**.

2.6 Η καμπυλότητα μιάς καμπύλης

Για μια *επίπεδη* καμπύλη η καμπυλότητα ορίζεται από το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ϕ,

$$\kappa \equiv \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dt}\frac{dt}{ds}\,.$$



Σχ. 2.10: *Οι δύο συνιστώσες της επιτρόχιας και κεντρομόλου επιτάχυνσης.*

Επειδή (Σχ. 2.6),

$$\hat{T} = \cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y} \ ,$$

και

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{d\hat{T}}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{ds}(-\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}) \ ,$$

ενώ

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \ , \qquad (1+\tan^2\phi)\dot{\phi} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} \ .$$

εύκολα προκύπτει ότι η καμπυλότητα κ είναι

$$\kappa = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{s}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{|\vec{v}|^3} = \frac{\vec{v}\times\vec{a}}{|\vec{v}|^3} \ .$$

Η ίδια σχέση

$$\kappa = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3} \ ,$$

ισχύει για *τυχούσα μη επίπεδη καμπύλη*. Πράγματι, επειδή ισχύει

$$\vec{v} = \dot{s}\hat{T} \ ,$$

και

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{T} + \kappa\dot{s}^2\hat{N} \ ,$$

έχουμε ότι

$$|\vec{v} \times \vec{a}| = |\kappa \dot{s}^3| = \kappa |\vec{v}|^3 \ .$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε πως η καμπυλότητα κ, μια καθαρά γεωμετρική ιδιότητα της καμπύλης, υπολογίζεται από την ταχύτητα και επιτάχυνση οποιουδήποτε υλικού σημείου κινείται κατά μήκος της !

2.6.1 Μήκος καμπύλης

$\triangleright$ Να υπολογισθεί το μήκος της τρισδιάστατης καμπύλης που έχει εξίσωση:

$$\vec{r}(t) = 3\cosh(2t)\hat{x} + 3\sinh(2t)\hat{y} + t\hat{z},$$

στο διάστημα $0 \leq t \leq \pi$.

Λύση: Το μήκος s της καμπύλης είναι:

$$s = \int ds = \int \frac{ds}{dt} dt = \int \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt.$$

επειδή $ds = |d\vec{r}|$:

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = 6\sqrt{\sinh^2 2t + \cosh^2 2t + 1} = 6\sqrt{2} \cosh 2t,$$

αφού $\sinh^2 2t = \cosh^2 2t - 1$. Έτσι:

$$s = \int_0^\pi 6\sqrt{2} \cosh 2t \, dt = 3\sqrt{2} \sinh 2\pi.$$

2.7 Κλίση, απόκλιση, στροφή και Λαπλασιανή (Laplacian) σε ορθόγωνες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Η κλίση $\vec{\nabla} f$ μιάς *βαθμωτής* συνάρτησης $f(x_1, x_2, x_3)$ στις ορθόγωνες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) είναι:

$$grad\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\hat{x}_1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\hat{x}_2}{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\hat{x}_3}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \ .$$

Η απόκλιση $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ μιάς *διανυσματικής* συνάρτησης $\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = A_1 \hat{x}_1 + A_2 \hat{x}_2 + A_3 \hat{x}_3$ στις ορθόγωνες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) είναι:

$$div\ \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 A_3) \right] .$$

Η στροφή $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ της *διανυσματικής* συνάρτησης $\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = A_1 \hat{x}_1 + A_2 \hat{x}_2 + A_3 \hat{x}_3$ στις ορθόγωνες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) είναι:

$$curl\ \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{x}_1 & h_2 \hat{x}_2 & h_3 \hat{x}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

Τέλος, η Λαπλασιανή $\nabla^2 f$ της *βαθμωτής* συνάρτησης $f(x_1, x_2, x_3)$ στις ορθόγωνες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) είναι:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \right] .$$

2.7.1 Παραδειγμα υπολογισμού πεδίου δεδομένης κλίσης

$\triangleright$ Η κλίση ενός πεδίου $V(x, y)$ είναι $(1 + 2xy)\hat{x} + (x^2 + 3y^2)\hat{y}$. Να ευρεθεί το πεδίο $V(x, y)$.

Λύση:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 1 + 2xy \ \Rightarrow \ V(x, y) = x + x^2 y + \mathrm{f}_1(y),$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x^2 + 3y^2 \ \Rightarrow \ V(x, y) = x^2 y + y^3 + \mathrm{f}_2(y),$$

Συγκρίνοντας τις δύο αυτές εκφράσεις του $V(x, y)$ έχουμε:

$$\mathrm{f}_1(y) = y^3 + C_1, \quad \mathrm{f}_2(y) = x + C_2.$$

Επομένως:

$$V(x, y) = x + x^2 y + y^3 + C.$$

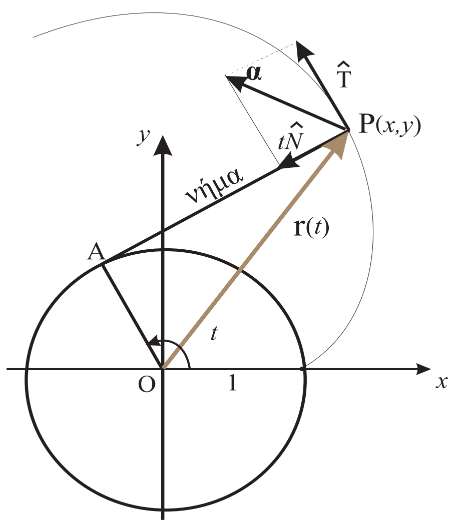
Ασκήσεις

2.1 Δείξτε ότι πάντοτε ισχύει:

$$\frac{d\hat{N}}{ds} = \tau \hat{B} - \kappa \hat{T} \qquad (\text{Τύπος} \;\; Frenet - Serret)\,.$$

2.2 Να αποδειχθεί ότι,

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right) = \kappa^2 \tau\,.$$



Σχ. 2.11: *Σχηματική αναπαράσταση της ενειλιγμένης του μοναδιαίου κύκλου του προβλήματος 2.3 και της επιτάχυνσης κινητού που κινείται κατά μήκος της. Στο σχήμα φαίνονται οι δύο συνιστώσες της επιτάχυνσης α, η εφαπτομενική (επιτρόχια) $a_T = 1$ καθώς και η κάθετη $a_N = t$.*

2.3 Η ενειλιγμένη ενός κύκλου είναι η καμπύλη που διαγράφει το άκρο P ενός τεντωμένου νήματος καθώς εκτυλίσσεται από την περιφέρεια του κύκλου.

Στο Σχ. 2.11 το νήμα εκτυλίσσεται με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού και έχει εξίσωση

$$\vec{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\hat{x} + (\sin t - t\cos t)\hat{y} \ .$$

Υπολογίστε την εφαπτομένη $\hat{T}$ και πρώτη κάθετο $\hat{N}$ της ενειλιγμένης του κύκλου καθώς και την ταχύτητα και επιτάχυνση ενός κινητού που κινείται κατά μήκος της ενειλιγμένης.

2.4 Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο έτσι ώστε το μέτρο της ταχύτητάς του και το μέτρο της επιταχύνσεώς του να είναι σταθερά. Να αποδειχθεί ότι η τροχιά είναι περιφέρεια κύκλου.

2.5 Υλικό σημείο κινείται σε ελλειπτική τροχιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Σε ποιά σημεία της τροχιάς η επιτάχυνση είναι μέγιστη και σε ποιά ελάχιστη;

2.6 Η θέση ενός σημείου στο επίπεδο προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες του x, y που δίνονται από τις εξισώσεις $x = \sin\omega_1 t$ και $y = \cos\omega_2 t$. Να αποδειχθεί ότι η τροχιά είναι περιοδική μόνο όταν ο λόγος ω_1/ω_2 είναι ρητός. Τί συμβαίνει όταν ο λόγος ω_1/ω_2 δεν είναι ρητός;

2.7 Η τροχιά προσγείωσης ενός μικρού ιδιωτικού αεροπλάνου έχει εξίσωση $\vec{r}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, H - b\omega t)$, με $R = 1$ km, $\omega = 1/7\ \text{sec}^{-1}$, $H = 400$ m, $b = H/6\pi, t \in [0, 42\pi]$ sec. Να υπολογισθεί η ταχύτητα του αεροπλάνου όταν προσγειώνεται τη στιγμή $t = 42\pi$ sec.

2.8 Ένα σώμα κινείται κατά μήκος της καμπύλης

$\vec{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$

Τι είδους καμπύλη διαγράφει και ποια είναι η ταχύτητα και επιτάχυνσή του κάθε χρονική στιγμή t;

2.9 Βρείτε την εξίσωση του συνεφαπτόμενου κύκλου της καμπύλης $y = e^x$ στο σημείο (0.1). Από την εξίσωση του κύκλου αυτού υπολογίστε τις παραγώγους $y'(x)$ και $y''(x)$ στο σημείο (0,1) του κύκλου και συγκρίνετε αυτές με τις αντίστοιχες παραγώγους της καμπύλης $y = e^x$ στο ίδιο σημείο.

2.10 Βρείτε την εξίσωση του συνεφαπτόμενου κύκλου της επίπεδης καμπύλης

$$\vec{r}(t) = (2\ln t)\hat{x} - \left(t + \frac{1}{t}\right)\hat{y}\,.$$

στο σημείο $t = 1$.