ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Πτυχιακές Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

27 Μαρτίου 2008

Να γραφούν και τα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα 1:

1. Δείξτε ότι το άθροισμα οσονδήποτε χρονοειδών (χρονικών - timelike) τετρανυσμάτων με κατεύθυνση προς το μέλλον (με θετική δηλαδή χρονική συνιστώσα) είναι και πάλι ένα χρονοειδές τετράνυσμα.

2. Βάσει του προηγούμενου ερωτήματος δείξτε ότι η συνολική τετραορμή ενός πλήθους σωματιδίων μη μηδενικής μάζας μπορεί να γραφεί ως η τετραορμή ενός μόνο υποθετικού σωματιδίου. Ποια η σχέση της μάζας αυτής με το άθροισμα των μαζών ηρεμίας όλων των σωματιδίων;

3. Πώς πρέπει να κινούνται όλα τα σωματίδια ώστε η μάζα του υποθετικού σωματιδίου να είναι η μικρότερη δυνατή;

Θέμα 2: Έστω δύο γεγονότα Α, Β με συντεταγμένες $(c\,t, x, y, z)$ σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς: $(10, 2, 3, 0)$ και $(13, 2, 7, 3)$ αντίστοιχα, εκφρασμένες σε κατάλληλο σύστημα μονάδων όπου η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 1$.

1. Να ελεγχθεί αν τα δύο γεγονότα συνδέονται με ένα χωροειδές, χρονοειδές ή φωτοειδές τετράνυσμα.

2. Η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα συνεπάγεται ότι υπάρχει σύστημα αναφοράς στο οποίο τα δύο γεγονότα μπορούν να γίνουν ταυτόχρονα;

3. Αν ένα σύστημα αναφοράς κινείται κατά μήκος του άξονα x είναι δυνατό τα δύο γεγονότα να αντιστραφούν ως προς τη χρονική τους σειρά;

4. Αν ένα σύστημα αναφοράς κινείται κατά μήκος του άξονα y είναι δυνατό τα δύο γεγονότα να αντιστραφούν ως προς τη χρονική τους σειρά; Βρείτε την ελάχιστη ταχύτητα του συστήματος αναφοράς ώστε αυτό να είναι δυνατό.

5. Εάν σε κάποιο δικαστήριο αναφερόταν το γεγονός Α ως η εκπυρσοκρότηση ενός όπλου και το γεγονός Β ως ο φόνος κάποιου από βλήμα και καλούσασταν ως ειδικός θα μπορούσατε να αποφανθείτε αν είναι δυνατό το βλήμα να προέρχεται από το εν λόγω όπλο;

Θέμα 3: Στο σύστημα κέντρου ορμής συγκρούονται δύο ίδια σωματίδια με μάζα ηρεμίας m το καθένα και παράγονται δύο ίδια σωματίδια με μάζα ηρεμίας $2m$ το καθένα. Ποια η ταχύτητα των προϊόντων σωματιδίων ως συνάρτηση του s όπου s ένας αριθμητικός παράγοντας που καθορίζει πόσο μεγάλη είναι η κινητική ενέργεια του καθενός από τα δύο αντιδρώντα σωματίδια σύμφωνα με τη σχέση $T = sm$; Ποια η ελάχιστη τιμή του s για την οποία μπορεί να επιτευχθεί η αντίδραση;

Θέμα 4: Εκτελέστε ένα μετασχηματισμό Lorentz του τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

κατά μήκος του άξονα y με ταχύτητα v και δείξτε ότι ο μετασχηματισμός των πεδίων είναι σύμφωνος την ακόλουθη διανυσματική μορφή μετασχηματισμού των πεδίων.

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times \mathbf{E})$$

Λύσεις

Θέμα 1:

1. Αν $A^0_{(i)} > |\mathbf{A}_{(i)}| \geq 0$, τότε και
$$\sum A^0_{(i)} > \sum |\mathbf{A}_{(i)}| \geq |\sum \mathbf{A}_{(i)}|.$$
Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα, δηλαδή το άθροισμα 2 ανυσμάτων έχει μήκος μικρότερο από το συνολικό μήκος των αθροιζόμενων.

2. Οι τετραορμές των σωματιδίων με μάζα είναι χρονοειδή τετρανύσματα, επομένως η συνολική τετραορμή
$$P^\mu_{\text{ολ}} = \sum P^\mu_{(i)}$$
θα είναι και αυτή χρονοειδές, δηλαδή
$$P^0_{\text{ολ}} > |\mathbf{P}_{\text{ολ}}|$$
Η μάζα που αντιστοιχεί σε αυτή την τετραορμή είναι
$$M^2 = (P^0_{\text{ολ}})^2 - (\mathbf{P}_{\text{ολ}})^2 > 0,$$
η οποία, όντας αναλλοίωτη ποσότητα (μετρά το τετράγωνο της τετραορμής με αντίθετο πρόσωπο), είναι η ίδια σε όλα τα συστήματα αναφοράς. Ας χρησιμοποιήσουμε λοιπόν το σύστημα κέντρου ορμής για να ξαναγράψουμε την προηγούμενη σχέση
$$M^2 = (P^0_{\text{ολ}})^2_{CM}.$$
Ταυτόχρονα σε οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς ισχύει ότι $P^0_{(i)} = E_{(i)} \geq m_{(i)}$ με την ισότητα να ισχύει αν στο εν λόγω σύστημα το σωματίδιο είναι ακίνητο. Έτσι
$$M^2 = \left(\sum P^0_{(i)}\right)^2_{CM} \geq \left(\sum m_{(i)}\right)^2$$

3. Σύμφωνα με τα παραπάνω η ισότητα (η μικρότερη δυνατή τιμή για την M) ισχύει αν όλα τα σωματίδια είναι ακίνητα στο κέντρο ορμής, ή με άλλα λόγια αν όλα τα σωματίδια ΄κινούνται με την ίδια ταχύτητα στο σύστημα του εργαστηρίου.

Θέμα 2:

1. $-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta \mathbf{x})^2 = -3^2 + (0^2 + 4^2 + 3^2) = 16 > 0$. Επομένως πρόκειται περί χωροειδούς τετρανύσματος.

2. Εφόσον ισχύει το ανωτέρω ναι είναι εφικτό. (Αν κινηθεί κάποιος με ταχύτητα $\mathbf{v} = (\Delta t)(\Delta \mathbf{x})/(\Delta \mathbf{x})^2$.)

3. Όχι διότι
$$\Delta t' = \gamma((\Delta t) - (v/c^2)(\Delta x)) = \gamma(\Delta t)$$
πού είναι ομόσημο του Δt.

4. Αν θέσουμε
$$0 = \Delta t' = \gamma((\Delta t) - (v/c^2)(\Delta y)) \Rightarrow v = c\frac{c\Delta t}{\Delta y} = \frac{3}{4}c.$$

5. Όχι δεν είναι δυνατό αφού δύο γεγονότα που συνδέονται με ένα χωροειδές τετράνυσμα δεν μπορούν να έχουν σχέση αιτίου-αιτιατού.

Θέμα 3: Από διατήρηση ενέργειας

$$E_{\text{ολ}} = 2(T+m) = 2E' = 2\sqrt{\mathbf{p}'^2 + (2m)^2}.$$

Τα 2άρια οφείλονται στο ότι βρισκόμαστε στο σύστημα ΚΟ επομένως οι ορμές και οι κινητικές ενέργειες είναι ίδιες. Επίσης $v' = |\mathbf{p}'|/E'$. Έτσι

$$v' = \frac{\sqrt{(T+m)^2 - 4m^2}}{2(T+m)} = \frac{\sqrt{(s+1)^2 - 4}}{(s+1)}$$

Προφανώς για $s < 1$ η παραπάνω σχέση δεν οδηγεί σε πραγματική λύση. Επίσης για $s \to \infty$, $v' \to \infty 1$.
Θέμα 4: Ο μετασχηματισμός Lorentz ενός τανυστή 2ης τάξης γίνεται ως ακολούθως

$$F^{\mu'\nu'} = L^{\mu'}_{\ \kappa} L^{\nu'}_{\ \lambda} F^{\kappa\lambda} = \mathbf{L}\mathbf{F}\mathbf{L}^\top$$

όπου τα τελευταία παχιά σύμβολα αντιπροσωπεύουν τους αντίστοιχους πίνακες. Έτσι (θα αγνοήσουμε τους όρους c για ευκολία θέτοντας $c = 1$)

$$F^{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma v & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma v & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \gamma v E_y & \gamma(E_x + vB_z) & \gamma E_y & \gamma(E_z - vB_x) \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -\gamma E_y & -\gamma(vE_x + B_z) & -v\gamma E_y & \gamma(-vE_z + B_x) \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma v & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma(E_x + vB_z) & (\gamma^2 - \gamma^2 v^2)E_y & \gamma(E_z - vB_x) \\ \gamma(-E_x - vB_z) & 0 & \gamma(vE_x + B_z) & -B_y \\ (-\gamma^2 + \gamma^2 v^2)E_y & -\gamma(vE_x + B_z) & 0 & \gamma(-vE_z + B_x) \\ \gamma(-E_z + vB_z) & B_y & \gamma(vE_z - B_x) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma(E_x + vB_z) & E_y & \gamma(E_z - vB_x) \\ -\gamma(E_x + vB_z) & 0 & \gamma(B_z + vE_x) & -B_y \\ -E_y & -\gamma(B_z + vE_x) & 0 & \gamma(B_x - vE_z) \\ -\gamma(E_z - vB_z) & B_y & -\gamma(B_x - vE_z) & 0 \end{pmatrix}$$

Ας συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με αυτά από τις διανυσματικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} F^{0'2'} = E'_y = \mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} = E_y \Rightarrow \text{σωστό} \\ \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \Rightarrow \\ \hat{x}E'_x + \hat{z}E'_z = \hat{x}F^{0'1'} + \hat{z}F^{0'3'} = \gamma(\hat{x}E_x + \hat{z}E_z + v\hat{y} \times \mathbf{B}) = \\ \gamma(\hat{x}(E_x + vB_z) + \hat{z}(E_z - vB_x)) \Rightarrow \text{σωστό} \\ -F^{1'3'} = B'_y = \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} = B_y \Rightarrow \text{σωστό} \\ \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}) \Rightarrow \\ \hat{x}B'_x + \hat{z}B'_z = \hat{x}F^{2'3'} + \hat{z}F^{1'2'} = \gamma(\hat{x}B_x + \hat{z}B_z - v\hat{y} \times \mathbf{E}) = \\ \gamma(\hat{x}(B_x - vE_z) + \hat{z}(B_z + vE_x)) \Rightarrow \text{σωστό} \end{aligned}$$