ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Επαναληπτική Εξέταση στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

24 Ιουνίου 2011

Αν θέλετε, μπορείτε να επεξεργαστείτε όλα τα προβλήματα σε σύστημα μονάδων όπου η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 1$. Όλα τα δεδομένα των προβλημάτων δίδονται σε αυτό το σύστημα μονάδων.

Θέμα Α:

(α) Να υπολογιστεί η ενέργεια κατωφλίου του βλήματος Α το οποίο προσπίπτει πάνω στο ακίνητο σωματίδιο Β προκειμένου να δημιουργηθεί ένα νέο σωματίδιο Γ εκτός από τα Α και Β (Α+Β $\rightarrow$ Α+Β+Γ). Δίδονται οι μάζες των τριών σωματιδίων m_A, m_B, m_Γ.

(β) Στο σύστημα κέντρου ορμής ενός σωματιδίου Α μάζας m και ενός φωτονίου, τα δύο αυτά σωματίδια συγκρούονται ελαστικά με αποτέλεσμα μετά τη σύγκρουση να έχουμε αυτά τα δύο σωματίδια πάλι. Να συγκρίνετε τις συχνότητες των φωτονίων πριν και μετά την κρούση στο σύστημα κέντρου ορμής.

(γ) Εάν τα δύο προηγούμενα σωματίδια αντιστρέφουν τις φορές κίνησής τους μετά την κρούση στο ΚΟ, συγκρίνετε τις ενέργειες του σωματιδίου Α μετά την κρούση και πριν την κρούση, όπως αυτές μετριώνται σε ένα σύστημα που κινείται με ταχύτητα v στην ίδια κατεύθυνση που κινούνταν αρχικά το φωτόνιο. (Δίδεται η αρχική συχνότητα του φωτονίου στο ΚΟ).

Θέμα Β: Στο σύστημα αναφοράς Σ μια ράβδος με μήκος L κινείται κατά μήκος του άξονα y με ταχύτητα v_1 μένοντας συνεχώς παράλληλη στον άξονα x. Ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς Σ_2, το οποίο έχει τους άξονές του παράλληλους με του Σ, κινείται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα v_2. Να υπολογίσετε

1. το μήκος της ράβδου όπως αυτό μετριέται στο σύστημα Σ_2,
2. την κλίση που σχηματίζει ο άξονας της ράβδου με τον άξονα x_2 σύστημα Σ_2.
3. Για $v_1 = \epsilon \cos w, v_2 = \epsilon \sin w$ με $\epsilon << 1$ αλλά σταθερό, για ποια τιμή του w θα είναι η κλίση της ράβδου μέγιστη;

Θέμα Γ: Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος του άξονα x ενός συστήματος Σ με ταχύτητα $v > 0$, ενώ στο ίδιο σύστημα ένα φωτόνιο που ξεκινά από το σημείο $(0, a, 0)$ τελικά χτυπά το σωματίδιο στο σημείο $(b, 0, 0)$ με $a, b > 0$.

1. Αν στο σύστημα του σωματιδίου το φωτόνιο το χτυπά από ”εμπρός” δηλαδή κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x (χωρίς αυτό να σημαίνει ότι κινείται επί του άξονα x) ποια είναι η σχέση ανισότητας που συνδέει τα v, a, b;
2. Ποιο από τα δύο (σωματίδιο - φωτόνιο) διέσχισε πρώτο κατά την κίνησή του (πριν τη σύγκρουση) τον άξονα y;
3. Έστω ότι επιβαίνουμε σε ένα όχημα που κινείται ευθύγραμμα με σχετικιστική ταχύτητα και περνάμε κάτω από τον πύργο του Άϊφελ. Τη στιγμή που έχουμε διασχίσει απόσταση από τη βάση του πύργου όση και το ύψος του κοιτάζουμε εμπρός μας (όχι πίσω μας) και βλέπουμε την κορυφή του πύργου σε γωνία $45°$ εμπρός και πάνω από τον ορίζοντα. Να βρεθεί η ταχύτητα του οχήματος και το χρώμα που θα βλέπουμε τότε από το όχημα να έχει ένας μπλε λαμπτήρας ο οποίος βρίσκεται στην κορυφή του πύργου (βρείτε τη σχέση ν'/ν των δύο συχνοτήτων, όπου ν η συχνότητα του μπλε φωτός του λαμπτήρα).

Θέμα Δ: Στο σύστημα Σ το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι $\vec{E} = A\hat{x}$ και $\vec{B} = \frac{A}{2}(\hat{x} + \hat{y})$ με $A \neq 0$. Με χρήση των αναλλοιώτων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ελέγξτε:

1. αν υπάρχει άλλο σύστημα αναφοράς στο οποίο το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο να γίνουν κάθετα,
2. αν υπάρχει άλλο σύστημα αναφοράς στο οποίο είτε το ηλεκτρικό πεδίο είτε το μαγνητικό πεδίο να μηδενίζεται,
3. αν υπάρχει άλλο σύστημα αναφοράς στο οποίο το ηλεκτρικό πεδίο και το μαγνητικό πεδίο να είναι αντιπαράλληλα.
4. Δεδομένου ότι υπάρχει σύστημα στο οποίο το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο γίνονται ομοπαράλληλα, να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στο σύστημα αυτό.
5. Υπολογίστε τα στοιχεία του τανυστή $F^{\mu}_{\ \nu}$ του εν λόγω πεδίου στο σύστημα Σ.

Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, \qquad & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

Η γενική μορφή του τανυστή του ηλεκτρ/κού πεδίου είναι

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Λύσεις

Θέμα Α:

- Από $P^2_{LAB} = P^2_{CM}$ έχουμε
$$-m_A^2 - m_B^2 - 2E_A m_B = -(E^{CM}_{\text{ολ}})^2 \leq (m_A + m_B + m_\Gamma)^2.$$
Λύνοντας βρίσκουμε $E_A \geq \frac{(m_A+m_B+m_\Gamma)^2 - m_A^2 - m_B^2}{2m_B}$ ή $T_A \geq \frac{(m_A+m_B+m_\Gamma)^2-(m_A+m_B)^2}{2m_B}$.

- Με άτονες αρχικά ποσότητες και τονούμενες μετά την κρούση θα έχουμε $\sqrt{m^2+p^2}+p = \sqrt{m^2+p'^2}+p'$ όπου p, p' οι ορμές των φωτονίων. Επειδή η συνάρτηση $x+\sqrt{m^2+x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα όπως μπορεί να δείξει κάποιος η παραπάνω ισότητα σημαίνει $p = p'$ και επομένως το φωτόνιο θα έχει ίδια ενέργεια πριν και μετά.

- Με αντίστροφο τυποποιημένο μετασχηματισμό Lorentz τη μια φορά στο
$$\begin{pmatrix} \sqrt{m^2+p^2} \\ p \end{pmatrix}$$
και την άλλη φορά στο
$$\begin{pmatrix} \sqrt{m^2+p^2} \\ -p \end{pmatrix}$$
βρίσκουμε
$$\frac{\text{μετά}}{\text{πριν}} = \frac{\sqrt{m^2+p^2} - vp}{\sqrt{m^2+p^2}+vp}.$$

Θέμα Β:

- $$\Delta x^\mu|_\Sigma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \gamma_1 v_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 v_1 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t \\ L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \Delta t \\ L \\ \gamma_1 v_1 \Delta t \\ 0 \end{pmatrix}$$
και
$$\Delta x^\mu|_{\Sigma_2} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2 v_2 & 0 & 0 \\ -\gamma_2 v_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \Delta t \\ L \\ \gamma_1 v_1 \Delta t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 \Delta t - \gamma_2 v_2 L \\ -\gamma_1 \gamma_2 v_2 \Delta t + \gamma_2 L \\ \gamma_1 v_1 \Delta t \\ 0 \end{pmatrix}$$
Για να μετρήσουμε τα άκρα της ράβδου θα πρέπει να το κάνουμε ταυτόχρονα δηλαδή $\gamma_1\gamma_2\Delta t - \gamma_2 v_2 L = 0$ οπότε $\Delta t = v_2 L/\gamma 1$. Με αντικατάσταση αυτού βρίσκουμε
$$\Delta x = L/\gamma_2\ ,\ \Delta y = v_1 v_2 L.$$
Επομένως $L_2 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = L\sqrt{1 - v_2^2 + v_1^2 v_2^2}$.

- $$\tan\theta = v_1 v_2 \gamma_2.$$

- $$\tan\theta = \epsilon^2 \cos w \sin w / \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 w} \simeq \epsilon^2 \cos w \sin w = (\epsilon^2/2)\sin(2w).$$
Αυτή γίνεται μέγιστη όταν $w = \pi/4$, δηλαδή $v_1 = v_2$

Θέμα Γ:

- Το φωτόνιο έχει τετραορμή

$$p^\mu = h\nu \begin{pmatrix} 1 \\ b/\sqrt{b^2+a^2} \\ -a/\sqrt{b^2+a^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

  και στο σύστημα του σωματιδίου

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} h\nu \begin{pmatrix} 1 \\ b/\sqrt{b^2+a^2} \\ -a/\sqrt{b^2+a^2} \\ 0 \end{pmatrix} = h\nu \begin{pmatrix} \gamma(1 - vb/sqrtb^2+a^2) \\ \gamma(-v + b/sqrtb^2+a^2) \\ -a/\sqrt{b^2+a^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Για να φαίνεται ότι έρχεται από μπροστά θα πρέπει $(-v+b/sqrtb^2+a^2) < 0$ δηλαδή $v > b/sqrtb^2+a^2$.

- Αν συγκρούστηκαν την $t = 0$ το σωματίδιο διέσχισε τον y thn $t_\sigma = -b/v$ και το φωτόνιο την $t_\gamma = -\sqrt{a^2+b^2}$ δηλαδή $t_\sigma > t_\gamma$ (πρώτα το φωτόνιο).

-

$$1 = \frac{-a/\sqrt{b^2+a^2}}{\gamma(-v + b/sqrtb^2+a^2)}$$

  και θέτωντας $a = b = H$ βρίσκουμε

$$\gamma(\sqrt{2}v - 1) = 1$$

  με ρίζα $v = 2\sqrt{2}/3$ (η άλλη λύση $v = 0$ δεν ικανοποιεί την ανισότητα του να έρχεται από μπροστά. Με αυτή την ταχύτητα βρ΄σικουμε $\nu' = \nu$ (ίδιο μπλε χρώμα).

Θέμα Δ: Με δεδομένα τα αναλλοίωτα $\vec{E} \cdot \vec{B} = A^2/2$ και $E^2 - B^2 = A^2/2$

- Δεν μπορεί γιατί το πρώτο αναλλοίωτο θα ήταν 0.

- Δεν μπορεί γιατί το πρώτο αναλλοίωτο θα ήταν 0.

- Δεν μπορεί γιατί το πρώτο αναλλοίωτο θα ήταν αρνητικό.

- Στο σύστημα αυτό θα είχαμε $E'B' = A^2/2$ και $E'^2 - B'^2 = A^2/2$. Μπορούμε να λύσουμε το σύστημα και να βρούμε $E'^2 = A^2(1+\sqrt{5})/4$ και $B'^2 = (A^4/4)/E'^2$.

- Με τη βοήθεια της μετρικής από δεξιά κατεβάζουμε τον δεξιά δείκτη:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -/2 \\ 0 & 0 & 0 & /2 \\ 0 & /2 & -/2 & 0 \end{pmatrix}$$