



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

30 Ιουνίου 2015

Αν θέλετε μπορείτε να επεξεργαστείτε όλα τα προβλήματα σε σύστημα μονάδων όπου η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 1$. Τα δεδομένα όλων των προβλημάτων δίδονται σε αυτό το σύστημα μονάδων.

ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ 4 ΑΠΟ ΤΑ 5 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Θέμα Α:

1. Θα μπορούσε το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δύο τετρανυσμάτων τετραταχύτητας u_1^μ, u_2^μ , να περιγράφει την τετραταχύτητα ενός σωματιδίου; Το εσωτερικό γινόμενο $u_1^\mu u_{2\mu}$ έχει συγκεκριμένο πρόσημο; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.
2. Συγκρίνετε τον ιδιόχρονο (βρείτε ποιος είναι μεγαλύτερος) κατά μήκος δύο κοσμικών γραμμών γ_1, γ_2 που συνδέουν τα γεγονότα \mathcal{A}, \mathcal{B} τα οποία σε κάποιο σύστημα αναφοράς συμβαίνουν στην ίδια χωρικά θέση $\mathcal{A} : (t_1, \mathbf{x})$ και $\mathcal{B} : (t_2, \mathbf{x})$ (με $t_2 > t_1$). Η μια κοσμική γραμμή γ_1 είναι αυτή ενός παρατηρητή που μένει ακίνητος στη θέση \mathbf{x} , ενώ η άλλη, η γ_2 , είναι αυτή ενός παρατηρητή που κινείται σε σχέση με τον πρώτο (όχι ισοταχώς), αλλά συμπίπτει με τον πρώτο τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 .
3. Ένα χωροχρονικό γεγονός χαρακτηρίζεται από ένα ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$ και μηδενικό μαγνητικό πεδίο, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, σε κάποιο σύστημα αναφοράς Σ . Ένα άλλο σύστημα αναφοράς Σ' κινείται σε σχέση με το πρώτο με ταχύτητα $\mathbf{v} = (3/5)(\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\hat{\mathbf{y}})$. Να υπολογιστούν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που μετρά ένας παρατηρητής του συστήματος Σ' και να βρεθεί η γωνία ϕ στην οποία και το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο παίρνουν ταυτόχρονα τη μέγιστη τιμή τους.
4. Ελέγξτε αν είναι δυνατό δύο φωτόνια που συγκρούονται μεταξύ τους να εξαφανιστούν δημιουργώντας μόνο ένα νέο φωτόνιο.

Θέμα Β: Θεωρήστε την αντίδραση βομβαρδισμού πρωτονίων με πιόνια: $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$, όπου το πρωτόνιο p είναι ακίνητο (στόχος) στο σύστημα του εργαστηρίου.

1. Ποια είναι η ενέργεια κατωφλίου (η ελάχιστη κινητική ενέργεια) του πιονίου π^- (ώστε να είναι δυνατή η παραπάνω αντίδραση);
2. Σε ένα πείραμα, τα πιόνια έχουν 3-ορμή p_1 . Υπολογίστε τον παράγοντα Lorentz γ του συστήματος Κ.Ο. (του συστήματος όπου μηδενίζεται η συνολική ορμή).
3. Στο παραπάνω πείραμα παρατηρείται ότι τα σωματίδια Λ^0 έχουν 3-ορμή $p_4 = p_1/\sqrt{2}$ και εκτοξεύονται σε γωνία 45° ως προς τη διεύθυνση των προσπιπτόντων πιονίων. Υπολογίστε την κατεύθυνση των καονίων K^0 στο σύστημα του εργαστηρίου καθώς και στο σύστημα Κ.Ο.

[Δίνονται οι μάζες των σωματιδίων: $m_\pi = m_1, m_p = m_2, m_K = m_3, m_\Lambda = m_4$.]

Θέμα Γ: Δέσμη ποζιτρονίων e^+ , ενέργειας E , σκεδάζεται σε στόχο ηλεκτρονίων, ο οποίος ηρεμεί στο εργαστήριο. Από τη σκέδαση παράγονται φωτόνια, τα οποία ανιχνεύονται με δύο ανιχνευτές Α, Β τοποθετημένους στο επίπεδο $x - y$ σε ίσες αποστάσεις από το στόχο και σε γωνίες ϕ και $\pi/2 + \phi$, αντίστοιχα, **εκατέρωθεν** του άξονα x . Υπολογίστε τη σχέση μεταξύ της ενέργειας E και της γωνίας ϕ που καθορίζει τις θέσεις των δύο ανιχνευτών που συλλαμβάνουν τα φωτόνια (και της μάζας m του ηλεκτρονίου). Αν τα φωτόνια παρατηρηθούν από τους μετρητές Α, Β, σε θέσεις που καθορίζονται από γωνία $\phi = 45^\circ$, ποια η ταχύτητα των ποζιτρονίων;

[Τα ποζιτρόνια είναι τα αντισωματίδια των ηλεκτρονίων και επομένως έχουν την ίδια μάζα με αυτά.]

Θέμα Δ: Μια ράβδος μήκους L παράλληλη με τον άξονα x κινείται κατά μήκος του άξονα y ενός συστήματος Σ' με ταχύτητα v_1 .

1. Δείξτε ότι χωρική απόσταση δύο γεγονότων που συμβαίνουν στα άκρα της ράβδου και τα οποία είναι ταυτόχρονα στο σύστημα της ράβδου Σ , είναι ίδια με τη χωρική απόσταση δύο άλλων που είναι ταυτόχρονα στο σύστημα Σ' .
2. Το σύστημα Σ' κινείται σε σχέση με ένα άλλο σύστημα Σ'' κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα v_2 . Να βρεθεί η γωνία που μετράται να σχηματίζει η ράβδος με τον άξονα x στο σύστημα Σ'' (τα άκρα της ράβδου θα πρέπει να μετρηθούν ταυτόχρονα στο Σ'').
3. Πόση είναι η χωρική απόσταση των δύο γεγονότων που συμβαίνουν στα άκρα της ράβδου και τα οποία είναι ταυτόχρονα στο Σ'' ;
4. Τη στιγμή που το αριστερό άκρο της ράβδου περνά από την αρχή των αξόνων του Σ'' , ένα φωτεινό σήμα στέλνεται προς το άλλο άκρο. Πότε το σήμα αυτό θα συναντήσει το άλλο άκρο σύμφωνα με το Σ'' και πότε σύμφωνα με το Σ ;

Θέμα Ε: Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου q βρίσκεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{x}}$.

1. Να γράψετε τις συνιστώσες της εξίσωσης κίνησης

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}u_\nu,$$

όπου p^μ η τετραορμή του σωματιδίου, $F^{\mu\nu}$ ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και u_ν η **συναλλοίωτη** μορφή της τετραταχύτητας του σωματιδίου.

2. Λύστε τις εξισώσεις κίνησης. [Υποδ.: Θα διευκόλυνε να θέσετε τις ποσότητες $\gamma = \xi$, $\gamma u_x = \eta$, $\gamma u_y = \sigma$, $\gamma u_z = \zeta$ στις παραπάνω εξισώσεις και να προσπαθήσετε να βρείτε τις συναρτήσεις $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, $\sigma(\tau)$, $\zeta(\tau)$. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2w}{d\tau^2} = \lambda^2 w$$

μπορεί να γραφεί στην απλή μορφή: $w(\tau) = C \cosh(\lambda\tau) + S \sinh(\lambda\tau)$.]

3. Αν αρχικά (για $t = 0$) η ταχύτητα είναι $\mathbf{u} = u_0 \hat{\mathbf{x}}$, υπολογίστε την ταχύτητα του φορτισμένου σωματιδίου ως συνάρτηση του ιδιόχρονου τ .
4. Ένα φωτόνιο στέλνεται προς το σωματίδιο εκκινώντας από το σημείο $\mathbf{r}_0 = (x_0, 0, 0)$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ που το σωματίδιο ξεκινά την κίνησή του από το σημείο $(0, 0, 0)$. Το φωτόνιο κινείται κατά μήκος του άξονα x (κυνηγώντας το σωματίδιο). Ποια είναι η οριακή τιμή $x_0^{(\min)}$ έτσι ώστε το φωτόνιο να μην καταφέρει να φτάσει ποτέ το σωματίδιο αν $x_0 < x_0^{(\min)}$;

Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

Καλή σας επιτυχία.