

# Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

Ιούνιος 2005

Να λυθούν τα τέσσερα από τα πέντε θέματα

Σημείωση: οι λατινικοί δείκτες  $i, j, \dots$  παίρνουν όλες τις χωροχρονικές τιμές 0,1,2,3.

**Θέμα 1:** Παρατηρητές 1 και 2 με τετραταχύτητες  $u_1$  και  $u_2$ , αντίστοιχα, παρατηρούν φωτόνιο τετραορμής  $p^i$ .

α. Δείξτε ότι ο λόγος των συχνοτήτων  $\nu_1/\nu_2$  του φωτονίου που παρατηρούν οι παρατηρητές στο ιδιοσύστημά τους είναι ίσος με  $u_1^i p_i / u_2^i p_i$ .

β. Εάν η σχετική ταχύτητα του παρατηρητή 1 ως προς τον παρατηρητή 2 είναι  $\vec{u}$  αποδείξτε [χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α)] τη σχέση *Doppler* που συνδέει τις συχνότητες που παρατηρούν οι δύο παρατηρητές για το φωτόνιο θεωρώντας ότι στο ιδιοσύστημα του 2 η γωνία μεταξύ της  $\vec{u}$  και της κατεύθυνσης διάδοσης του φωτονίου είναι  $\theta$ .

**Θέμα 2:** Το αδρανειακό σύστημα αναφοράς  $\Sigma'$  κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς  $\Sigma$  με ταχύτητα  $u$ . Μια ράβδος κινείται παράλληλα προς τον άξονα  $x$  του  $\Sigma$  με σταθερή ταχύτητα  $v$ . Εάν  $L$  και  $L'$  είναι τα μήκη της ράβδου που μετρούν οι παρατηρητές των  $\Sigma$  και  $\Sigma'$  αντίστοιχα, αποδείξτε ότι:  $L = [1 - \beta(v)\beta(u)]\gamma(u)L'$ .

**Θέμα 3:** Σε ένα αδρανειακό σύστημα  $\Sigma$  το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  βρίσκονται στο επίπεδο  $y - z$  και σχηματίζουν γωνία  $\phi \neq \pi/2$ . Θεωρούμε ένα άλλο σύστημα  $\Sigma'$  το οποίο κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο ως προς το  $\Sigma$  κατά μήκος του κοινού άξονα  $x, x'$  με ταχύτητα  $v$ .

α. Δείξτε ότι τα πεδία  $\vec{E}'$  και  $\vec{B}'$  που παρατηρούνται στο  $\Sigma'$  μπορεί να είναι παράλληλα και βρείτε την ταχύτητα  $v$  ώστε αυτό να συμβαίνει.

β. Εξηγήστε γιατί το  $\Sigma'$  δεν είναι μοναδικό με βάση τους μετασχηματισμούς των πεδίων. [Υποδ: πώς πρέπει να κινείται ένα  $\Sigma''$  ως προς το  $\Sigma'$  ώστε και σε αυτό να είναι τα πεδία παράλληλα;]

Δίνονται οι εκφράσεις μετασχηματισμού των πεδίων

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, & \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{u} \times \vec{B}) \\ B'_{\parallel} &= B_{\parallel}, & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{u} \times \vec{E}) \end{aligned}$$

και οι διανυσματικές ταυτότητες

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}), \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \end{aligned}$$

**Θέμα 4:** Στο αδρανειακό σύστημα  $\Sigma$  το τετράνυσμα  $A^i$  έχει συνιστώσες:  $A^i = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{pmatrix}_{\Sigma}$ .

(α) Υποθέτοντας ότι το  $A^i$  είναι χρονικό υπολογίστε την ταχύτητα  $\vec{u}$  ενός συστήματος  $\Sigma'$  στο οποίο το  $A^i$  δεν έχει χωρικές συνιστώσες.

(β) Υπάρχει τέτοια ταχύτητα όταν το  $A^i$  είναι χωρικό;

(γ) Η τετραορμή ενός σωματιδίου στο  $\Sigma$  είναι  $p^i = \begin{pmatrix} 3 \\ \hat{x} - \hat{y} \end{pmatrix}_{\Sigma}$ . Υπολογίστε τη μάζα, την ενέργεια και την ταχύτητα  $\vec{u}$  του σωματιδίου στο  $\Sigma$  ( $c = 1$ ).

**Θέμα 5:** Φωτόνιο συχνότητας  $\nu$  απορροφάται από ακίνητο ηλεκτρόνιο μάζας  $m$ . Εάν το ηλεκτρόνιο επανεκπέμπει το φωτόνιο σε γωνία  $\theta$  ως προς την αρχική διεύθυνση του φωτονίου, υπολογίστε τη συχνότητα  $\nu'$  του εκπεκκόμενου φωτονίου.

Καλή σας επιτυχία