ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

23 Μαρτίου 2011

Αν θέλετε μπορείτε να επεξεργαστείτε όλα τα προβλήματα σε σύστημα μονάδων όπου η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 1$. Όλα τα δεδομένα των προβλημάτων δίδονται σε αυτό το σύστημα μονάδων.

Θέμα 1: Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας M και κινητικής ενέργειας T διασπάται αυθόρμητα σε δύο σωματίδια με ίδια μάζα ηρεμίας m. (α) Να μελετηθεί αν είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί αυτή η διάσπαση αν $2m > M$. (β) Βρείτε πώς θα κινούνται τα δύο σωματίδια που θα δημιουργηθούν από τη διάσπαση αν $M = 2m$. (γ) Αν είναι $m = 3M/10$ και $T = 2M/3$ να βρεθεί η μέγιστη γωνία απόκλισης κάποιου από τα δύο καινούργια σωματίδια από την αρχική διεύθυνση κίνησης του αρχικού σωματιδίου. [Υπόδειξη: Θα μπορούσατε να αναλύσετε τις τετραορμές στο σύστημα κέντρου ορμής των σωματιδίων και μετά να τις μεταφράσετε στο σύστημα του εργαστηρίου.]

Θέμα 2: (α) Να γραφεί η τετραορμή ενός φωτονίου συχνότητας ν που κινείται κατά μήκος του άξονα x. (β) Ένα ίδιο με το πρώτο φωτόνιο, που κινείται όμως κατά μήκος του άξονα y, αν συγκρουστεί με το πρώτο οδηγεί σε δημιουργία ενός νέου σωματιδίου. Ποια θα είναι η μάζα αυτού του σωματιδίου; (γ) Πως θα κινείται το σωματίδιο αυτό; (δ) Στη συνέχεια το σωματίδιο αυτό συγκρούεται με ίδιο ακίνητο σωματίδιο, επέρχεται εξαΰλωση και δημιουργούνται δύο νέα φωτόνια ίδιας μεταξύ τους συχνότητας ν', τα οποία κινούνται στο επίπεδο $x - y$ σχηματίζοντας ίσες γωνίες ϕ εκατέρωθεν της διεύθυνσης κίνησης του σωματιδίου. Να βρεθεί η ν' και η γωνία ϕ.

Θέμα 3: (α) Να γραφεί ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου για ένα πεδίο που σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς έχει τη μορφή $\vec{E} = E\hat{x}, \vec{B} = B\hat{z}$. (β) Υπολογίστε τα δύο αναλλοίωτα του πεδίου αυτού. (γ) Σε ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα $\vec{V} = V\hat{y}$ να υπολογιστούν οι τιμές του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. (δ) Δείξτε ότι τα αναλλοίωτα που υπολογίσατε πιο πριν είναι πράγματι αναλλοίωτες ποσότητες, ανεξάρτητες του συστήματος αναφοράς στο οποίο αυτές υπολογίζονται.

Θέμα 4: Ένας πύραυλος μήκους L κινείται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα V. Στο σύστημα του πυραύλου συμβαίνουν ταυτόχρονα δύο εκρήξεις στη βάση και την κορυφή αυτού, αντίστοιχα. (α) Στο σύστημα Σ ως προς το οποίο ο πύραυλος κινείται με την ανωτέρω ταχύτητα ποια έκρηξη συνέβη πρώτα; (β) Ποια η χωρική απόσταση των δύο εκρήξεων και ποια η χρονική διαφορά αυτών στο σύστημα Σ; (γ) Ένας παρατηρητής του συστήματος Σ ίσως υποθέσει ότι η έκρηξη που προηγήθηκε υπήρξε η αιτία για τη δεύτερη έκρηξη. Πως θα κρίνατε την πρόταση αυτή; (δ) Ποια η χωροχρονική θέση του κάθε γεγονότος, συγκριτικά με τον κώνο φωτός που έχει αρχή (κορυφή) το άλλο γεγονός; (ε) Υπολογίστε τη χωροχρονική απόσταση των 2 γεγονότων.

Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων.

$$\mathbf{E'}_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad \mathbf{E'}_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{B'}_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \qquad \mathbf{B'}_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times \mathbf{E})$$

Να γραφούν και τα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

Λύσεις

Θέμα 1: (α) Στο σύστημα ΚΟ θα πρέπει $M = (m + T_1) + (m + T_2)$ πράγμα αδύνατο αφού οι κινητικές ενέργειες T_1, T_2 είναι θετικές ή μηδέν και $M < 2m$. (β) Για τον ίδιο λόγο η παράπνω εξίσωση ενεργειών στο σύστημα ΚΟ οδηγεί στη μοναδική λύση $T_1 = T_2 = 0$ δηλαδή ακίνητα στο σύστημα αυτό. Με άλλα λόγια η διάσπαση μπορεί να επιτευχθεί αλλά τα καινούργια σωματίδια θα κινούνται και τα 2 ακριβώς με την ταχύτητα του αρχικού σωματιδίου (μετάβαση από το σύστημα ΚΟ στο σύστημα του εργαστηρίου). (γ) Από διατήρηση τετραορμής $\mathbf{P} = \mathbf{P_1} + \mathbf{P_2}$. Με μετακίνηση όρων και ύψωση στο τετράγωνο

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_1)^2 &= (\mathbf{P_2})^2 \Leftrightarrow \\ -M^2 - m^2 - 2(-EE_1 + \vec{p} \cdot \vec{p_1}) &= -m^2 \Leftrightarrow \\ \cos\theta_1 &= \frac{EE_1 - M^2/2}{|\vec{p}||\vec{p_1}|}. \end{aligned} \tag{1}$$

Αν αντικαταστήσουμε τις αριθμητικές τιμές και θέσουμε $E_1 = xm = x(3M/10)$, οπότε θα είναι $|vecp_1| = m\sqrt{x^2-1} = (3M/10)\sqrt{x^2-1}$,

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{(5/3)(3/10)x - (1/2)}{(4/3)(3/10)\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{((1/2)(x-1)}{(4/10)\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{5}{4}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Το x είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του

$$xm = E_1 = T + M - E_2 \leq T + M - m \Leftrightarrow x \leq (5/3) - (3/10) = 41/30. \tag{3}$$

Όπως φαίνεται λοιπόν η μέγιστη γωνία (το μικρότερο $\cos\theta_1$ θα είναι $\pi/2$ για $x = 1$, δηλαδή για ακίνητο σωματίδιο. Θα μπορούσε κάποιος να πει ότι η γωνία αυτή δεν ορίζεται για ακίνητο σωματίδιο αλλά στο όριο $x \to 1$ (σχεδόν ακίνητο σωματίδιο) η γωνία τείνει στην $\pi/2$.

Θέμα 2: (α)

$$\mathbf{P}_1 = h\nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

(β)

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = h\nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + h\nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

οπότε

$$-m^2 = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 = (h\nu)^2(-4 + 1 + 1 + 0) \Leftrightarrow m = \sqrt{2}h\nu. \tag{6}$$

(γ) Η ταχύτητα του σωματιδίου θα είναι $\vec{v} = P^i/P^0 = (1, 1, 0)/2$, δηλαδή θα κινείται κατά μήκος της διχοτόμου του επιπέδου $x - y$ με ταχύτητα $v_x = v_y = 1/2$.

(δ)

$$= h\nu \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = h\nu' \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\pi/4+\phi) \\ \sin(\pi/4+\phi) \\ 0 \end{pmatrix} + h\nu' \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\pi/4-\phi) \\ \sin(\pi/4-\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Λύνοντας βρίσκουμε (από διατήρηση ενεργειών) $\nu' = \nu(1+1/\sqrt{2})$ και (από διατήρηση 3-ορμών) $\nu = \nu'[\cos(\pi/4+\phi)+\cos(\pi/4-\phi)]$ και $\nu = \nu'[\sin(\pi/4+\phi)+\sin(\pi/4-\phi)]$. Οι 2 τελευταίες καταλήγουν σε $\cos\phi = \nu/(\sqrt{2}\nu') = 1/(1+\sqrt{2})$.

Θέμα 3: (α)

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & B & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

(β)

$$\frac{1}{2}F^{\mu\nu} = -(E^2 - B^2)\ ,\ \frac{1}{8}\epsilon\mu\nu\kappa\lambda F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda} = \vec{E}\cdot\vec{B} = 0. \tag{9}$$

(γ)

$$\begin{aligned} E'_y = E_y = 0, (E'_x\hat{x} + E'_z\hat{z}) &= \gamma[(E_x\hat{x}+E_z\hat{z}) + v\hat{y}\times(B_x\hat{x}+B_z\hat{z})] = \gamma(E+vB)\hat{x}, \\ B'_y = B_y = 0, (B'_x\hat{x} + B'_z\hat{z}) &= \gamma[(B_x\hat{x}+B_z\hat{z}) - v\hat{y}\times(E_x\hat{x}+E_z\hat{z})] = \gamma(B+vE)\hat{z}, \end{aligned} \tag{10}$$

(δ) Τα δύο πεδία είναι πάλι κάθετα μεταξύ τους οπότε το δεύτερο αναλλοίωτο παραμένει 0, ενώ το πρώτο είναι $\gamma^2(-(E+vB)^2 + (B+vE)^2) = ... = B^2 - E^2$.

Θέμα 4: (α) Έστω 1 το γεγονός της έκρηξης στη βάση και 2 αυτό στη μύτη του πυραύλου. Στο Σ' σύστημα του πυραύλου είναι $t'_1 = t'_2$, $x'_2 = x'_1 + L$. Στο σύστημα Σ $t_2 - t_1 = \gamma((t'_2 - t'_1) + v(x'_2 - x'_1)) = \gamma vL$ δηλαδή $t_2 > t_1$, πρώτα συμβαίνει η έκρηξη στη βάση. (β) $\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma vL$, $\Delta x = x_2 - x_1 = \gamma((x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)) = \gamma L$. (γ) Είναι αδύνατο το ένα γεγονός να υπήρξε αίτιο για το άλλο αφού στο Σ' συνέβησαν ταυτόχρονα και άρα θα χρειαζόταν άπειρη ταχύτητα διάδοσης πληροφορίας για να προκληθεί η μία έκρηξη εξαιτίας της άλλης. (δ) Το κάθε γεγονός βρίσκεται εκτός του κώνου φωτός του άλλου γεγονότος αφού δεν μπορεί το ένα να είναι αίτιο του άλλου. (ε) $\Delta s^2 = -0^2 + L^2 = L^2 > 0$. Όντας αναλλοίωτο για να το υπολογίσουμε χρησιμοποιήσαμε ένα σύστημα, το Σ.