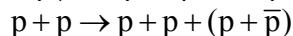


# ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ

Περίοδος Φεβρουαρίου 1990

## Θέμα 1

Οι επιταχυντές της δεκαετίας του 1950, δημιουργούσαν πρωτόνια με επαρκή ενέργεια για την παραγωγή ζευγών πρωτονίου - αντιπρωτονίου ( $p\bar{p}$ ) κατά τη σκέδαση τους πάνω σε ακίνητους πυρήνες υδρογόνου σύμφωνα με την αντίδραση:



Ποια είναι η ελαχίστη **κινητική** ενέργεια

α) στο σύστημα εργαστηρίου

β) στο σύστημα κέντρου ορμών που πρέπει να έχουν -το πρωτόνια από τον επιταχυντή για να πραγματοποιείται ή παραπάνω αντίδραση; Δίνεται η μάζα του πρωτονίου και του αντιπρωτονίου

$$(m_p = m_{\bar{p}} = 1 \frac{\text{Gev}}{c^2}).$$

## Θέμα 2

Σωματίο ενέργειας  $E_1$  και μάζας  $m_1$  σκεδάζεται ελαστικά με ακίνητο σωματίο μάζας  $m_2$  με ( $m_2 < m_1$ ).

α) Να υπολογισθεί το συνημίτονο της γωνίας σκέδασης  $\theta$ , του σωματίου 1 ως προς την αρχική του διεύθυνση συναρτήσει της ενέργειας του  $E_1'$  μετά από τη σκέδαση

β) Να αποδειχθεί ότι ισχύει η σχέση  $\sin \theta_{\max} = \frac{m_2}{m_1}$

(όπως και σε μη σχετικιστικές ελαστικές σκεδάσεις).

## Θέμα 3

Ράβδος AB κινείται στο επίπεδο xy αδρανειακού συστήματος K έτσι ώστε το A να ολισθαίνει στον άξονα x με σταθερή ταχύτητα u και η ράβδος να δημιουργεί με τον άξονα x σταθερή γωνία φ.

Έστω σύστημα K' το οποίο κινείται ως προς το K κατά τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα x. Εάν  $m = \tan \varphi$  η κλίση της ράβδου στο K, να υπολογίσετε την κλίση της m' στο K'.

## Θέμα 4

Δίδονται τρία αδρανειακά συστήματα  $K_1$ ,  $K_2$  και  $K_3$ . Το  $K_2$  κινείται ως προς το  $K_1$  κατά τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα  $v_1$  κατά μήκος του άξονα  $x_1$ . Το  $K_3$  κινείται ως προς το  $K_1$  κατά τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα  $v_2$  κατά μήκος του άξονα  $y_2$ . Έστω ότι η σχετική ταχύτητα  $\vec{v}_{31}$  του  $K_3$  ως προς το  $K_1$

σηματίζει γωνία  $\theta_1$  με τον άξονα  $x_1$  στο σύστημα  $K_1$  ενώ η σχετική ταχύτητα  $\vec{v}_{13}$  του  $K_1$  ως προς το  $K_3$  σχηματίζει γωνία  $\theta_3$  με τον άξονα  $x_3$  στο σύστημα  $K_3$ .

α) Δείξτε ότι

$$\tan \theta_1 = \frac{v_2}{v_1 \gamma_1} \quad \text{και} \quad \tan \theta_3 = \frac{v_2 \gamma_2}{v_1} \quad \text{όπου} \quad \gamma_1 = \gamma_1(v_1) \quad \text{και} \quad \gamma_2 = \gamma_2(v_2)$$

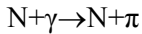
β) Να υπολογίσετε την απόκλιση  $\delta\theta = \theta_3 - \theta_1$  των  $K_3$  και  $K_1$  συναρτήσει των  $\gamma_1$ , και  $\gamma_2$

$$\text{Δίνεται η σχέση} \quad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

## Περίοδος Φεβρουαρίου 1992

### Θέμα 1

Στο σύστημα εργαστηρίου νουκλεόνιο σκεδάζεται με αντίθετα κινούμενο φωτόνιο ενέργειας  $E_\phi = 5 \times 10^{-10}$  Mev σύμφωνα με την αντίδραση:



Ποια είναι η ελάχιστη ενέργεια  $E_N$  του νουκλεονίου ώστε να πραγματοποιηθεί η αντίδραση; Δίνονται ενέργειες ηρεμίας του νουκλεονίου και του πιονίου  $E_{0N} = 1000$  Mev και  $E_{0\pi} = 140$  Mev.

Υπόδειξη: Θεωρήστε ότι η ενέργεια του νουκλεονίου είναι πολύ μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας του. Γιατί ισχύει αυτό;

### Θέμα 2

Σε ένα σύστημα αναφοράς δίνονται οι τετραορμές  $p_1 = \begin{bmatrix} E_1 \\ c \\ \vec{p}_1 \end{bmatrix}$  και  $p_2 = \begin{bmatrix} E_2 \\ c \\ \vec{p}_2 \end{bmatrix}$  δύο σωματίων. Να

υπολογίσετε στο σύστημα ηρεμίας του 1:

- Την ενέργεια  $E_{2,1}$  του δεύτερου
- Το μέτρο της χωρικής ορμής  $|\vec{p}_{2,1}|$  του δεύτερου
- Το μέτρο της σχετικής ταχύτητας  $|\vec{v}_{2,1}|$  του δεύτερου

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε το αναλλοίωτο του εσωτερικού γινομένου δύο τετραορμών

### Θέμα 3

Σε ένα ΑΣΑ  $\Sigma$  φωτόνιο έχει ορμή  $\vec{p}$  και ενέργεια  $E$ . Ένα άλλο σύστημα  $\Sigma'$  κινείται με ταχύτητα  $\vec{v}$  ως προς το  $\Sigma$ . Στο  $\Sigma$  η διεύθυνση διάδοσης του φωτονίου σχηματίζει με την ταχύτητα  $\vec{v}$  γωνία  $\theta$ . Να υπολογίσετε στο  $\Sigma'$ .

- Την ενέργεια  $E'$  του φωτονίου
- Την γωνία  $\theta'$  που σχηματίζει η διεύθυνση διάδοσής του με την ταχύτητα  $\vec{v}$ .

### Θέμα 4

Σωματίο κινείται με ταχύτητα  $\vec{v}$  στο επίπεδο  $xy$  ενός ΑΣΑ  $\Sigma$ . Η ταχύτητα του σωματίου σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον θετικό ημιάξονα  $x$  του  $\Sigma$ . Το σωματίο προσκρούει ελαστικά σε τοίχο, ο οποίος είναι κάθετος στον άξονα  $x$  του  $\Sigma$  και κινείται με ταχύτητα  $u$  η οποία έχει την κατεύθυνση του αρνητικού ημιάξονα του  $\Sigma$ . Ζητείται η γωνία ανάκλασης  $\phi$  του σωματίου.

Υπόδειξη: Στο σύστημα ηρεμίας του τοίχου ισχύει ο νόμος της ανάκλασης. Δηλαδή η κάθετη στον τοίχο συνιστώσα της ταχύτητας αντιστρέφεται, ενώ η παράλληλη  $\sigma'$  αυτόν συνιστώσα παραμένει η ίδια.

## Περίοδος Φεβρουαρίου 1993

### Θέμα 1

Δύο τετρανύσματα  $A=(a^\mu)$  και  $B=(b^\mu)$   $\mu=0,1,2,3$  λέγονται παράλληλα αν υπάρχει  $\lambda \neq 0$  ώστε  $a^\mu = \lambda b^\mu$  για κάθε  $\mu=0,1,2,3$

α) Δείξτε ότι δύο μη μηδενικά τετρανύσματα είναι παράλληλα εάν και μόνο αν έχουν παράλληλα χωρικά μέρη σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

β) Σε ένα ΑΣΑ  $\Sigma$  δύο φωτόνια των οποίων οι συχνότητες διαφέρουν κατά  $\Delta f$ , εκτοξεύονται από δυο σημεία του άξονα  $x$  στο επίπεδο  $xy$  και παράλληλα στον άξονα  $y$ . Έστω  $\Sigma'$  ένα άλλο ΑΣΑ, το οποίο κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα  $v$  κατά μήκος του άξονα  $x$ . Με βάση το α) εκτιμήστε την μεταβολή της χωρικής απόστασης των φωτονίων στο  $\Sigma'$ .

γ) Υπολογίστε την διαφορά των συχνοτήτων των δύο φωτονίων στο  $\Sigma'$ .

### Θέμα 2

Φωτόνιο ενέργειας  $E_\gamma$  σκεδάζεται με ηλεκτρόνιο μάζας  $m$ , που κινείται κατά την αντίθετη φορά, σε γωνία  $\theta$ .

α) Υπολογίστε την ενέργεια  $E'_\gamma$  του φωτονίου μετά την σκέδαση.

β) Πότε η ενέργεια αυτή ( $E'_\gamma$ ) είναι ανεξάρτητη της γωνίας  $\theta$ ; Πόση είναι στην περίπτωση αυτή η  $E'_\gamma$ .

### Θέμα 3

Τα σωματίδια 1 και 2 μαζών  $m_1$  και  $m_2$  κινούνται στο σύστημα εργαστηρίου με τυχαίες ορμές  $\vec{p}_1$  και

$\vec{p}_2$  αντίστοιχα. Το τετράγωνο της τετραορμής του συστήματος είναι  $S = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2\vec{p}_1 \vec{p}_2$ ,

όπου  $p_1$  και  $p_2$  οι τετραορμές των δυο σωματιδίων. Να υπολογίσετε το μέτρο της σχετικής ταχύτητας του σωματιδίου 2 στο σύστημα ηρεμίας του 1 συναρτήσει των  $S$ ,  $m_1$  και  $m_2$ .

Υπόδειξη: Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των τετραορμών των δύο σωματιδίων στο σύστημα εργαστηρίου και στο σύστημα ηρεμίας του σωματίου 1.

### Θέμα 4

Σωματίο κινείται με ταχύτητα  $\vec{v}$  στο επίπεδο  $xy$  ενός ΑΣΑ  $\Sigma$ . Η ταχύτητα του σωματίου σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον θετικό ημιάξονα  $x$  του  $\Sigma$ . Το σωματίο προσκρούει ελαστικά σε τοίχο, ο οποίος είναι κάθετος στον άξονα  $x$  του  $\Sigma$  και κινείται με ταχύτητα  $u$  η οποία έχει την κατεύθυνση του αρνητικού ημιάξονα του  $\Sigma$ .

Ζητείται η γωνία ανάκλασης  $\phi$  του σωματίου.

Υπόδειξη: Στο σύστημα ηρεμίας του τοίχου ισχύει ο νόμος της ανάκλασης. Δηλαδή η κάθετη στον τοίχο συνιστώσα της ταχύτητας αντιστρέφεται, ενώ η παράλληλη σ' αυτόν συνιστώσα παραμένει η ίδια.

## Περίοδος Ιουνίου 1993

### Θέμα 1

Δύο διαστημόπλοια Α και Β κινούνται κατά μήκος του θετικού ημιάξονα  $x$  ενός ΑΣΑ Κ με ταχύτητες  $v$  και  $u$  αντίστοιχα.

Όταν η απόσταση των δύο διαστημοπλοίων (όπως εκτιμάται από το Α) είναι ίση με  $L$ , το Α εκπέμπει ένα φωτεινό σήμα προς το Β. Το σήμα αυτό ανακλάται σε ένα κάτοπτρο επί του Β και επιστρέφει στο Α μετά από χρόνο  $T$  (μετρούμενο στο σύστημα του Α). Να υπολογιστεί η ταχύτητα  $u$ . Δίνονται  $v, L, T$

### Θέμα 2

α) Δείξτε ότι αν δύο φωτόνια κινούνται παράλληλα και ομόρροπα σε ένα ΑΣΑ τότε κινούνται παράλληλα και ομόρροπα σε κάθε άλλο ΑΣΑ.

β) Δέσμη ομοίων παράλληλων φωτονίων παρατηρείται από δύο ΑΣΑ  $\Sigma$  και  $\Sigma'$ , που το ένα κινείται ως προς το άλλο κατά τον τυποποιημένο τρόπο με παράγοντα  $\beta$ .

Έστω  $\rho$  και  $\rho'$  είναι οι πυκνότητες των φωτονίων ( αριθμός φωτονίων ανά μονάδα όγκου) και  $f$  και  $f'$  οι συχνότητες τους στα  $\Sigma$  και  $\Sigma'$  αντίστοιχα. Έστω δε ότι τα φωτόνια κινούνται κατά την διεύθυνση του άξονα

$y$ . Δείξτε ότι ισχύει η σχέση:  $\frac{\rho}{\rho'} = \frac{f}{f'}$ .

### Θέμα 3

Δύο φωτόνια ενεργειών  $E_1$  και  $E_2$  (στο σύστημα εργαστηρίου) σκεδάζονται υπό γωνία  $\varphi$  και παράγουν ζεύγος ηλεκτρονίου - ποζιτρονίου. Αν η αντίδραση πραγματοποιείται οριακά:

α) Ποια συνθήκη πληρούν οι μεταβλητές  $E_1$ ,  $E_2$  και  $\varphi$

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του ηλεκτρονίου τόσο στο σύστημα κέντρου ορμών όσο και στο σύστημα εργαστηρίου. Δίνεται η  $m_{e^-} = m_{e^+}$

### Θέμα 4

Δύο παρατηρητές Α και Β φέροντες κάτοπτρα ευρίσκονται ο μὲν Α στην αρχή Ο ενός ΑΣΑ  $Oxyz$  ο δε Β σε σημείο του θετικού ημιάξονα  $x$  κινούμενος με ταχύτητα  $v$  κατά μήκος αυτού. Ο Α εκπέμπει φωτεινό σήμα το οποίο ανακλώμενο επί του Β επιστρέφει στον Α μετά από χρόνο  $T_1$  (μετρούμενο από τον Α). Εν συνεχεία το ίδιο σήμα ανακλώμενο επί του Α επιστρέφει σ' αυτόν μετά από χρόνο  $T_2$ , (μετρούμενο από τον Α) αφού βεβαίως επανανακλασθεί στον Β. Να βρεθεί η ταχύτητα του Β κατά μέτρο και φορά.

## Περίοδος Φεβρουαρίου 1994

### Θέμα 1

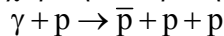
Σωματίο κινείται με ταχύτητα  $\vec{v}$  στο επίπεδο  $xy$  ενός ΑΣΑ  $\Sigma$ . Η ταχύτητα του σωματίου σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον θετικό ημιάξονα  $x$  του  $\Sigma$ . Το σωματίο προσκρούει ελαστικά σε τοίχο, ο οποίος είναι κάθετος στον άξονα  $x$  του  $\Sigma$  και κινείται με ταχύτητα  $u$  η οποία έχει την κατεύθυνση του αρνητικού ημιάξονα του  $\Sigma$ .

Ζητείται η γωνία ανάκλασης  $\phi$  του σωματίου.

Υπόδειξη: Στο σύστημα ηρεμίας του τοίχου ισχύει ο νόμος της ανάκλασης. Δηλαδή η κάθετη στον τοίχο συνιστώσα της ταχύτητας αντιστρέφεται, ενώ η παράλληλη σ' αυτόν συνιστώσα παραμένει η ίδια.

### Θέμα 2

Φωτόνιο ενέργειας  $E_1$  σκεδάζεται σε ακίνητο πρωτόνιο (στόχος) στο σύστημα εργαστηρίου και λαμβάνει χώρα η αντίδραση:



A) Να υπολογίσετε την ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να έχει το φωτόνιο για να πραγματοποιηθεί η αντίδραση (ενέργεια κατωφλίου)

B) Στο σύστημα κέντρου ορμών της αντίδρασης να υπολογίσετε:

B1) Την αντίστοιχη τιμή της ενέργειας κατωφλίου του φωτονίου

B2) Το μέτρο της αρχικής ορμής του πρωτονίου. Δίνεται η ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου και του αντιπρωτονίου  $E_{0p} = E_{0\bar{p}} = 1\text{Gev}$ .

### Θέμα 3

Μια τέλεια ελαστική σφαίρα κινείται με ταχύτητα  $u$  και συγκρούεται με μια άλλη όμοιά της, η οποία ηρεμεί στο σύστημα εργαστηρίου. Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται σε διευθύνσεις που σχηματίζουν γωνίες  $\theta$  και  $\phi$  με την διεύθυνση της ταχύτητας  $u$ . Να υπολογίσετε την ποσότητα  $\tan\theta \cdot \tan\phi$  συναρτήσει της ταχύτητας του κέντρου ορμών του συστήματος των δύο σφαιρών ως προς το εργαστήριο. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για μικρές ταχύτητες  $u$  (κλασσικό όριο)

### Θέμα 4

Μια καμπύλη  $x^\mu(\lambda)$   $\mu=0,1,2,3$  στο χωρόχρονο έχει σε ένα σύστημα συντεταγμένων  $\Sigma(t,x,y,z)$  την παραμετρική εξίσωση:

$$t = \int \rho d\lambda \quad x = \int \rho \cos\theta \cos\phi d\lambda$$

$$y = \int \rho \cos\theta \sin\phi d\lambda \quad z = \int \rho \sin\theta d\lambda$$

όπου  $\rho, \theta$  και  $\phi$  είναι συναρτήσεις της πραγματικής μεταβλητής  $\lambda$  και  $\rho > 0$ .

α) Αποτελεί η παραπάνω καμπύλη την κοσμική γραμμή ενός πραγματικού σωματίου;

β) Αν ναι να υπολογίσετε την τετραταχύτητα  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$  και την τετραεπιτάχυνση  $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\lambda}$  του σωματίου

στο  $\Sigma$ .

γ) Αν η ενέργεια του σωματίου είναι  $2\text{Mev}$  να εκφράσετε την τετραορμή του σωματίου συναρτήσεις των  $\theta$  και  $\phi$ .

## Πτυχιακές Εξετάσεις Ιουλίου 1994

### Θέμα 1

Σε ένα σώμα θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα μάζας  $dm$  όγκου  $d\Omega_0$  και πυκνότητας  $\rho_0$  ως προς το ιδιοσύστημά του. Αν το στοιχειώδες τμήμα κινείται με ταχύτητες  $\vec{U}$  και  $\vec{U}'$  ως προς τα  $\Sigma$  και  $\Sigma'$  τότε οι

πυκνότητες που μετρούνται από αυτά είναι  $\rho = \frac{dm}{d\Omega}$  και  $\rho' = \frac{dm}{d\Omega'}$  αντίστοιχα. Αν το  $\Sigma'$  κινείται ως προς το

$\Sigma$  με ταχύτητα  $u$  κατά μήκος του θετικού ημιάξονα  $x$  να υπολογίσετε την εξίσωση που συνδέει τις ποσότητες.

- α)  $dm$  και  $dm'$
- β)  $d\Omega$  και  $d\Omega'$
- γ)  $\rho$  και  $\rho_0$

Στην ερώτηση (γ) να προτιμηθεί απάντηση που χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα των ερωτήσεων α) και β) και απλούς συλλογισμούς.

### Θέμα 2

Έστω ένα πλήθος αδρανειακών συστημάτων  $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ . Το  $\Sigma_1$  κινείται ως προς το  $\Sigma_0$  με ταχύτητα  $v$  κατά μήκος του θετικού ημιάξονα  $x_0$ . Το  $\Sigma_2$  κινείται ως προς το  $\Sigma_1$  με τον ίδιο τρόπο κ.ο.κ. Ένα σωματίο ηρεμεί ως προς το σύστημα  $\Sigma_n$ .

- α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του  $v_n$  ως προς το  $\Sigma_0$ .
- β) Να υπολογίσετε την οριακή τιμή της  $v_n$  όταν τον  $n \rightarrow \infty$
- γ) Ποια η απάντηση στα ίδια ερωτήματα α και β αν υποθέσουμε ότι ισχύει η αρχή της σχετικότητας του Γαλιλαίου.

### Θέμα 3

Θεωρούμε αδρανειακό σύστημα  $Oxyz$  ως προς το οποίο ένας τοίχος, το επίπεδο του οποίου είναι κάθετο στον άξονα  $x$ , κινείται με ταχύτητα  $u$  κατά την θετική φορά του άξονα  $x$ . Σώμα βάλλεται με ταχύτητα  $v > u$  κάθετη στον τοίχο. Το σώμα συγκρούεται ελαστικά με τον τοίχο και ανακλάται επ' αυτού.

- α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα  $w$  με την οποία το σώμα ανακλάται.
- β) Να βρείτε την συνθήκη μεταξύ των  $v, u$  ώστε το σώμα να επιστρέψει στο  $O$ .
- γ) Να απαντήσετε στα ερωτήματα α) και β) υποθέτοντας ότι ισχύει η αρχή της σχετικότητας του Γαλιλαίου.

## Περίοδος Σεπτεμβρίου 1994

### Θέμα 1

Φωτόνιο ενεργείας  $E_1$  σκεδάζεται κατά Compton πάνω σε ελεύθερο ηλεκτρόνιο (που πρακτικά θεωρείται ακίνητο). Αν  $\theta$  η γωνία σκέδασης και  $m$  η μάζα του ηλεκτρονίου να υπολογίσετε.

α) Την ενεργεία  $E_3$  του φωτονίου μετά τη σκέδαση.

β) Την κινητική ενεργεία  $T_4$  του ηλεκτρονίου Compton μετά τη σκέδαση. Ποια η ελαχίστη και ποια η μέγιστη τιμή που παίρνει η  $T_4$ .

### Θέμα 2

Αντιπρωτόνιο κινητικής ενεργείας  $\frac{2}{3}$  GeV συγκρούεται με πρωτόνιο που ηρεμεί στο εργαστήριο και

παράγονται δυο φωτόνια συμφωνά με την αντίδραση:  $p + \bar{p} \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$

Τα φωτόνια κινούνται κατά μήκος της διεύθυνσης κίνησης του αντιπρωτονίου στο εργαστήριο.

α) Να υπολογίσετε την ενέργεια κάθε φωτονίου και να προσδιορίσετε την φορά κίνησης τους στο εργαστήριο.

β) Ποια η ενέργεια και η φορά κίνησης κάθε φωτονίου στο σύστημα ηρεμίας του αντιπρωτονίου; Να μην χρησιμοποιήσετε μαθηματικές σχέσεις.

### Θέμα 3

Μια φωτεινή μονοχρωματική δέσμη συχνότητας  $f_1$  προσπίπτει κάθετα σε καθρέπτη, κάθετο στην διεύθυνση της δέσμης, κινούμενο με ταχύτητα  $u$  κατά τη διεύθυνση της δέσμης. Να βρεθεί η συχνότητα  $f_2$  της ανακλώμενης δέσμης

α) Όταν οι ταχύτητες της δέσμης και του καθρέπτη είναι ομόρροπες

β) Όταν είναι αντίρροπες. (Οι συχνότητες  $f_1$ ,  $f_2$  είναι στο σύστημα εργαστηρίου.)

### Θέμα 4

Να αποδείξετε ότι αν οι χωρικές ορμές δυο φωτονίων είναι παράλληλες και ομόρροπες σε ένα αδρανειακό σύστημα τότε είναι παράλληλες και ομόρροπες σε κάθε άλλο αδρανειακό σύστημα.

## Περίοδος Φεβρουαρίου 1995

### Θέμα 1

Θεωρούμε δύο υλικά σημεία 1 και 2 μαζών  $m_1$  και  $m_2$  που κινούνται με τυχαίο τρόπο.

- α) Με μοναδικά δεδομένα τις μάζες των υλικών σημείων και την ποσότητα  $\sigma = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2$  όπου  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  οι τετραορμές τους, να υπολογίσετε το μέτρο της σχετικής ταχύτητας του σωματίου 2 ως προς το 1  
β) Αν  $m_1=m_2$  και τα σωματάρια έχουν αντίθετες ταχύτητες  $|\vec{\beta}_1| = |\vec{\beta}_2| = \beta$  να απαντήσετε στο ερώτημα α) με μοναδικό δεδομένο την παράμετρο  $\beta$ .

### Θέμα 2

Ο πίνακας μετασχηματισμού Lorentz μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων  $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ , τα οποία κινούνται κατά τον τυποποιημένο τρόπο κατά μήκος του άξονα  $x$  είναι

$$L = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.75 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

- α) Συμπληρώστε τα υπόλοιπα στοιχεία του  $L$ .  
β) Υπολογίστε την σχετική ταχύτητα του  $\Sigma_2$  ως προς το  $\Sigma_1$ .  
γ) Γράψτε τον πίνακα μετασχηματισμού Lorentz  $\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ .  
δ) Έστω τα τετρανύσματα  $A^\mu = (1, 0, 1, 2)$  ως προς το  $\Sigma_1$ . Και  $B^\mu = (1, 2, 0, 1)$  ως προς  $\Sigma_2$ . Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $A \cdot B$

### Θέμα 3

Τα σωματάρια 1, 2, 3 έχουν ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς  $\Sigma$  τετραορμές  $(E_1, \vec{p}_1)$   $(E_2, \vec{p}_2)$   $(E_3, \vec{p}_3)$  αντιστοίχως. Να υπολογίσετε:

- α) την ταχύτητα  $\vec{v}_{cp}$  του κέντρου ορμών στο σύστημα ηρεμίας του σωματίου 1.  
β) την μάζα του «σωματίου» κέντρου ορμών  
γ) την ενέργεια του σωματίου 2 στο σύστημα κέντρου ορμών  
δ) την ενέργεια του σωματίου 2 στο ιδιοσύστημα του 3

### Θέμα 4

Δύο σωματάρια μαζών  $m_1$  και  $m_2$  έχουν σε ένα αδρανειακό σύστημα παράλληλες και ομόρροπες χωρικές ορμές ( $\vec{p}_2 = k\vec{p}_1$   $k > 0$ ). Ποια σχέση πρέπει να πληρούν οι μάζες  $m_1$  και  $m_2$  ώστε οι χωρικές ορμές να είναι παράλληλες και ομόρροπες σε κάθε αδρανειακό σύστημα



## Περίοδος Ιουνίου 1995

### Θέμα 1

Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$t' = a t + b x + g y + d z \quad x' = b t + a x \quad y' = y \quad z' = z$$

- α) Προσδιορίστε τις σταθερές  $a, b, g, d$  ώστε ο μετασχηματισμός αυτός να είναι μετασχηματισμός Lorentz.  
β) Ερμηνεύστε κινηματικά τους μετασχηματισμούς που υπολογίσατε

### Θέμα 2

α) Σωματίδιο μάζας  $m$  έχει σε ένα ΑΣΑ ενέργεια  $E$  και χωρική ορμή  $\vec{p}$ . Δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις :

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}c}{E}, \quad \gamma = \frac{E}{mc^2}, \quad \vec{\beta}\gamma = \frac{\vec{p}}{mc}$$

β) Σωματίδιο έχει σε κάποιο ΑΣΑ τετραορμή  $p^\mu$  τετραταχύτητα  $u^\mu$  παράγοντα  $\gamma$ . Δείξτε ότι:

β1) Το μέτρο της χωρικής ορμής του στο  $\Sigma$  δίνεται από την σχέση  $|\vec{p}|^2 = p^\mu p_\mu + \frac{\gamma^2}{c^2} (p^\mu u_\mu)^2$

β2) Η ενέργεια του σωματιδίου στο  $\Sigma$  δίνεται από την σχέση  $E = -\gamma p^\mu u_\mu$

### Θέμα 3

Δύο φωτόνια συχνοτήτων  $f_1$  και  $f_2$  ως προς κάποιο ΑΣΑ  $\Sigma$  κινούνται κατά μήκος των αξόνων  $x$  και  $y$  του  $\Sigma$  αντιστοίχως. Υπολογίστε την ταχύτητα που έχει ως προς το  $\Sigma$  το κέντρο ορμών του συστήματος των δύο φωτονίων.

### Θέμα 4

Δέσμη φωτονίων σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον άξονα  $x$  ενός ΑΣΑ  $\Sigma$  και γωνία  $\theta'$  με τον άξονα  $x'$  ενός δεύτερου συστήματος  $\Sigma'$ , το οποίο κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο με παράγοντα  $\beta$  ως προς το  $\Sigma$ .

Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:  $\cos \theta = \frac{\beta + \cos \theta'}{1 + \beta \cos \theta'}$

## Περίοδος Σεπτεμβρίου 1995

### Θέμα 1

Θεωρήσατε τον μετασχηματισμό  $(x, t) \leftrightarrow (u, v)$  με  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct + x)$ ,  $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct - x)$

α) Υπολογίσατε το στοιχείο μήκους Lorentz  $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2$  στις συντεταγμένες  $u, v$ .

β) Έστω διάνυσμα  $A$  με  $(A_t, A_x) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

β1) Υπολογίσατε τις συνιστώσες  $A_u, A_v$

β2) Τι συμπέρασμα εξάγεται δια το Ευκλείδειο μέτρο του  $A$ ;

γ1) Να γράψετε την κυματική εξίσωση:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi(t, x) = 0 \text{ στις συντεταγμένες } (u, v).$$

γ2) Τι συμπέρασμα συνάγετε για τις λύσεις της εξίσωσης;

### Θέμα 2

Δύο διαστημόπλοια  $A$  και  $B$  κινούνται κατά μήκος του άξονα  $x$  ενός ΑΣΑ με ταχύτητες  $v$  και  $u$  αντίστοιχα. Όταν η απόστασή τους είναι  $L$  (όπως εκτιμάται από τον  $A$ ), ο  $A$  εκπέμπει φωτεινό σήμα προς τον  $B$ . Το σήμα ανακλάται στιγμιαία επί κατόπτρου ευρισκόμενου εις τον  $B$  και επιστρέφει εις τον  $A$  μετά παρέλευσιν χρόνου  $T$  όπως μετράται υπό του  $A$ . Να ευρεθεί η  $u$  συναρτήσει των  $v, L, T$ .

### Θέμα 3

Φωτόνιο κινείται κατά μήκος του θετικού  $y$  ημιάξονα ενός ΑΣΑ  $Oxy$ . Ένας παρατηρητής ο οποίος κινείται κατά μήκος του θετικού  $x$  ημιάξονα βλέπει το φωτόνιο να κινείται έχοντας ίσες κατά μέτρο ορμές  $p'_x$  και  $p'_y$ . Να ευρεθεί η ταχύτητα του παρατηρητή ως προς το  $O$ .

### Θέμα 4

Θεωρήσατε τα σωμάτια  $A$  και  $B$  τα οποία έχουν τετραορμές  $P_A, P_B$  αντιστοίχως.

Εάν από την αλληλεπίδραση τους παράγεται μία οντότητα  $\Gamma$  δείξατε ότι:

α) Εάν ένα εκ των  $A, B$  είναι σωμάτιο με μάζα, τότε το  $\Gamma$  είναι επίσης σωμάτιο με μάζα.

β) Εάν τα  $A$  και  $B$  είναι φωτόνια τότε το  $\Gamma$  μπορεί να είναι είτε σωμάτιο με μάζα είτε φωτόνιο.

γ) Τι πρέπει να ισχύει για να είναι φωτόνιο:

## Περίοδος Φεβρουαρίου 1996

### Θέμα 1

Ένα  $\pi$ -μεσόνιο κινείται εις το εργαστήριο και διασπάται εις ένα  $\mu$ -μεσόνιο και ένα νετρίνο συμφωνά με την αντίδραση:  $\pi \rightarrow \mu + \nu$ .

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ορμής  $p^*$  του νετρίνου στο σύστημα ηρεμίας του  $\pi$ -μεσονίου.

β) Ως γνωστόν στο σύστημα ηρεμίας του  $\pi$ -μεσονίου η διεύθυνση κίνησης του νετρίνου μπορεί να σχηματίζει οποιαδήποτε γωνία  $\theta^*$  με την αρχική διεύθυνση κίνησης του πιονίου στο εργαστήριο.

Εάν  $\vec{p}_{//}$  και  $\vec{p}_{\perp}$  είναι η παράλληλη και η κάθετη συνιστώσα της ορμής του νετρίνου ( στο εργαστήριο) ως

προς την διεύθυνση κίνησης του πιονίου, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση 
$$\left(\frac{p_{//} - \gamma\beta p^*}{\gamma p^*}\right)^2 + \left(\frac{p_{\perp}}{p^*}\right)^2 = 1$$

Όπου  $\beta$  η ταχύτητα κίνησης του πιονίου στο εργαστήριο και  $\gamma = \gamma(\beta)$

Δίνονται  $m_{\nu} = 0$ ,  $m_{\pi} = 140 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_{\mu} = 100 \text{ MeV}/c^2$ ,

### Θέμα 2

Φωτόνιο χαμηλής ενέργειας  $E$  σκεδάζεται μετωπικά με ηλεκτρόνιο κινούμενο κατ' αντίθετη φορά με ταχύτητα  $\beta$ , στο εργαστήριο

Μετά τη σκέδαση το φωτόνιο ανακλάται και επιστρέφει προς το σημείο εκπομπής ( σκέδαση Compton κατά  $180^\circ$ ). Να υπολογίσετε

α) την ενεργεία του φωτονίου στο σύστημα ηρεμίας του ηλεκτρονίου πριν την σκέδαση

β) Την ενεργεία του φωτονίου στο σύστημα ηρεμίας του ηλεκτρονίου μετά την σκέδαση

γ) Την ενεργεία του φωτονίου στο σύστημα του εργαστηρίου μετά την σκέδαση.

(Ως γνωστόν η σκέδαση Compton σε γωνία  $\theta$  φωτονίου ενέργειας  $E_{\gamma}$  υπακούει την εξίσωση

$$E'_{\gamma} = \frac{E_{\gamma}}{1 + \frac{E_{\gamma}}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

### Θέμα 3

Δύο ράβδοι ιδιομήκους  $L_1$  και  $L_2 = nL_1$  κινούνται παράλληλα και κατ' αντίθετη φορά. Παρατηρητής στο άκρο της πρώτης ράβδου διαπιστώνει ότι απαιτείται χρόνος  $T_1 = \mu\epsilon$  ( $K > 1$ ) προκειμένου να διέλθει η δεύτερη ράβδος από μπροστά του. Υπολογίσατε

α) την σχετική ταχύτητα των δυο ράβδων

β) Το χρονικό διάστημα  $T_2$  που μετράει παρατηρητής στο άκρο της δεύτερης ράβδου προκειμένου να διέλθει η πρώτη ράβδος από μπροστά του.

### Θέμα 4

α) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός συντεταγμένων  $((x^{\alpha}) \rightarrow (x'^{\alpha}))$  που ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \cosh \Psi - x^1 \sinh \Psi & x'^1 &= -x^0 \sinh \Psi + x^1 \cosh \Psi & \Psi > 0 \\ x'^2 &= x^2 & x'^3 &= x^3 \end{aligned}$$

είναι μετασχηματισμός Lorentz.

β) Έστω ανταλλοίωτο τετράνυσμα  $v$  με συνιστώσες  $v^{\alpha} = (\kappa, 0, 2\kappa, 0)$  στο σύστημα συντεταγμένων  $(x^{\alpha})$ . Να βρεθούν οι συνιστώσες του στο σύστημα συντεταγμένων  $(x'^{\alpha})$ .

γ) Έστω ένας συναλλοίωτος αντισυμμετρικός τανυστής  $F$  με συνιστώσες

$$F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & E & E & E \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ στο σύστημα } (x). \text{ Να βρεθούν οι συνιστώσες του στο σύστημα } (x').$$

### Θέμα 5

α) Αποδείξτε ότι η ταχύτητα  $\vec{v}$  του κέντρου ορμών δίδεται από την σχέση  $\vec{v} = \frac{\vec{p}_{ολ}}{E_{ολ}}$

β) Φωτόνιο ενέργειας  $E$  κινείται επί του άξονος  $y$  αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων  $xOy$ . Σωματίο μάζας  $m$  κινείται κατά τον θετικό  $x$  ημιάξονα. Εάν το σύστημα κέντρου ορμών των δύο σωματίων έχει ταχύτητα κατά την διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας  $xOy$  να υπολογίσετε την ταχύτητα του σωματίου.

## Περίοδος Ιουνίου 1996

### Θέμα 1

Σε ένα ΑΣΑ  $\Sigma$  το τετράνυσμα  $A^\mu$  έχει συνιστώσες  $(A^0, A^i)_\Sigma$ .

(α) Υπολογίσατε τον παράγοντα  $\beta^i$  του  $A^\mu$  στο  $\Sigma$  εάν το  $A^\mu$  είναι χρονικό.

(β) Τι συμβαίνει όταν το  $A^\mu$  είναι χωρικό ;

(γ) Εάν σωματίο έχει ως προς το  $\Sigma$  την τετραταχύτητα  $u^\mu = (2, \vec{i} + \vec{j})$  να ευρέθη η ταχύτητά του στο  $\Sigma$ .

### Θέμα 2

Σωματία 1,2 αλληλεπιδρούν και παράγονται σωματία 3,4.

(α) Υπολογίσατε την ενέργεια κατωφλίου του 1 στο ιδιοσύστημα του 2.

(β) Την κινητική ενέργεια του σωματίου 1 στο ιδιοσύστημα του 2 προκειμένου η ταχύτης του 3 να σχηματίζει γωνία  $\pi/2$  με την διεύθυνση του 1 στο ιδιοσύστημα του 2.

Οι μάζες των 1,2,3,4 θεωρούνται γνωστές

Αριθμητική εφαρμογή :  $\pi + p \rightarrow k + \Lambda$  ( μεσόνιο + πρωτόνιο  $\rightarrow$  μεσόνιο + υπερόνιο με μάζες  $0,135 - 1 - 0,494 - 1,115 \text{ GeV}/c^2$ .

### Θέμα 3

Σωματία μαζών  $m_1, m_2$  και ταχυτήτων  $v_1, v_2$  ως προς ένα ΑΣΑ αντιστοίχως, συγκρούονται και σχηματίζουν σωματίο μάζας  $m$ .

Υπολογίσατε την  $m$  και δείξτε ότι  $m \geq m_1 + m_2$ . Ερμηνεύσατε την ανισότητα και σχολιάστε την ισότητα.

### Θέμα 4

Παρατηρητές 1,2 κινούνται κατά τους θετικούς ημιάξονες  $Ox, Oy$  αδρανειακού συστήματος  $Oxy$  με ταχύτητες  $v_1 = v$  και  $v_2 = kv$  αντιστοίχως. Εάν ο 1 βλέπει τον 2 να κινείται κατά μήκος της διχοτόμου της  $x_1Oy_1$  να ευρέθη η  $v$  συναρτήσει του  $k$ . Ποία τα επιτρεπτά όρια τιμών δια το  $k$  ;

## Περίοδος Φεβρουαρίου 1997

### Θέμα 1

Θεωρήσατε την αντίδραση:  $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$

Δείξτε ότι στο ιδιοσύστημα του  $p$ , η ενέργεια κατωφλίου του φωτονίου είναι:  $\frac{m^2 + 2mn}{2n}$

όπου  $m_p = m_n = n$  και  $m_{\pi^+} = n$

### Θέμα 2

Παρατηρητές 1,2 κινούνται κατά τους θετικούς ημιάξονες  $Ox$ ,  $Oy$  αδρανειακού συστήματος  $Oxy$  με ταχύτητες  $v_1 = v$  και  $v_2 = kv$  αντιστοίχως. Εάν ο 1 βλέπει τον 2 να κινείται κατά μήκος της διχοτόμου της  $x_1Oy_1$  να ευρέθη η  $v$  συναρτήσει του  $k$ . Ποία τα επιτρεπτά όρια τιμών δια το  $k$  ;

### Θέμα 3.

Σε ένα ΑΣΑ  $\Sigma$  ένα σχετικιστικό υλικό σημείο διαγράφει ελλειπτική τροχιά με παραμετρική εξίσωση  $x = a \cos \omega t$  και  $y = b \sin \omega t$ . Έστω  $\Sigma'$  ένα άλλο ΑΣΑ, κινούμενο κατά τον τυποποιημένο τρόπο κατά την διεύθυνση του άξονα  $x$  του  $\Sigma$  με παράγοντα ταχύτητας  $\beta$ .

α) Υπολογίστε στο  $\Sigma'$  την τετραταχύτητα και την τετραεπιτάχυνση του σωματίου.

β) Ποια η σχέση του ιδιόχρονου του σωματιδίου και του χρόνου  $t$  στο  $\Sigma$ .

### Θέμα 4

α) Θεωρούμε ένα χρονικού τύπου τετράνυσμα  $u$  το οποίο σε ένα ΑΣΑ έχει συνιστώσες  $u = (\lambda, \vec{\alpha})$ .

Να βρεθεί η ταχύτητα  $\vec{v}$  ενός άλλου ΑΣΑ  $\Sigma'$  ως προς το οποίο το  $u$  δεν έχει χωρικές συνιστώσες,

β) Θεωρούμε ένα σύστημα σωματιδίων με ενέργειες  $E_1, E_2, \dots, E_n$  και χωρικές ορμές  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$

Να βρεθεί η ταχύτητα του συστήματος κέντρου ορμών.

### Θέμα 5

Θεωρήστε το τετράνυσμα  $\Omega^\mu$  το οποίο σε ένα ΑΣΑ  $\Sigma$  έχει συνιστώσες  $\Omega^\mu = (\Phi, c \vec{A})$  όπου  $\Phi$  και  $\vec{A}$  είναι δυο γενικά πεδία.

α) Ορίσατε τα διανύσματα  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  με τις σχέσεις:

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi + c \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  και  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  και δείξτε ότι οι συνιστώσες του αντισυμμετρικού ταυυστή

$F_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha,\beta} - \Omega_{\beta,\alpha}$  (όπου  $\partial_\alpha$  σημαίνει παραγώγιση ως προς την αντίστοιχη συντεταγμένη) περιγράφονται με τα στοιχεία του πίνακα

$$F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & -cB_y & -cB_x & 0 \end{bmatrix}$$

β) Έστω  $\Sigma'$  ένα άλλο ΑΣΑ το οποίο κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο με παράγοντα  $\beta$ .

Υπολογίσατε τις συνιστώσες  $F'_{\alpha\beta}$  του ταυυστή  $F$  στο  $\Sigma'$

## Περίοδος Σεπτεμβρίου 1997

### Θέμα 1

α) Ορίσατε την τετραορμή  $p$  ενός σωματιδίου μάζας  $m$  και αποδείξατε τη σχέση

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

β) Φωτόνιο συχνότητας  $f$  απορροφάται από ηλεκτρόνιο μάζας  $m$  το οποίο ηρεμεί. Εάν το ηλεκτρόνιο επανεκπέμπει το φωτόνιο σε γωνία  $\theta$  ως προς την αρχική, διεύθυνση του φωτονίου δείξατε ότι η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου  $f'$  δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f} + \frac{h}{mc^2} (1 - \cos \theta)$$

### Θέμα 2

Σε ένα ΑΣΑ  $\Sigma$  το τετράνυσμα  $A^\mu$  έχει συνιστώσες:  $A^\mu = \begin{bmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{bmatrix}_\Sigma$

(α) Υπολογίσατε τον παράγοντα  $\beta$  του  $A^\mu$  στο  $\Sigma$  εάν το  $A^\mu$  είναι χρονικό.

(β) Τι συμβαίνει όταν το  $A^\mu$  είναι χωρικό;

(γ) Σωματίο κινείται ως προς ΑΣΑ  $\Sigma$  έτσι ώστε η τετραορμή του να είναι  $p^\mu = \begin{bmatrix} 3 \\ \vec{i} - \vec{j} \end{bmatrix}$

Υπολογίσατε τη μάζα, την ενέργεια και την ταχύτητα  $\vec{v}$  του σωματιδίου στο  $\Sigma$  ( $c = 1$ ).

### Θέμα 3

Σωματίδιο Α μάζας  $M$  διασπάται ενώ βρίσκεται σε ηρεμία στο εργαστήριο σε τρία όμοια σωματίδια Β μάζας  $m$ .

α) Δείξατε ότι οι τροχιές των παραγόμενων σωματιδίων κείνται σε επίπεδο.

β) Εάν οι τροχιές των τριών σωματιδίων σχηματίζουν ίσες γωνίες μεταξύ τους υπολογίσατε στο εργαστήριο την ενέργεια του κάθε σωματιδίου.

γ) Εάν ο χρόνος ζωής των θυγατρικών σωματιδίων είναι  $\tau_0$  υπολογίσατε την απόσταση που διανύει κάθε σωματίδιο στο εργαστήριο.

δ) Θεωρήσατε ένα από τα σωματίδια και υπολογίσατε τον παράγοντα  $\beta$  ενός ΑΣΑ ως προς το εργαστήριο

στο οποίο το σωματίδιο έχει χρόνο ζωής  $\frac{\tau_0}{2}$ . Υπολογίσατε σε αυτό το ΑΣΑ τους χρόνους ζωής και των υπολοίπων σωματιδίων.

### Θέμα 4

Υπολογίσατε την ενέργεια καταφλίου για την αντίδραση  $k^- p \rightarrow p p p \bar{p}$

### Θέμα 5

Δύο ΑΣΑ  $\Sigma$  και  $\Sigma'$  κινούνται κατά τον τυποποιημένο τρόπο κατά μήκος του άξονα  $x$ ,  $x'$  με γρηγοράδα  $\psi$ .

α) Γράψετε το μετασχηματισμό Lorentz που συνδέει τα  $\Sigma$  και  $\Sigma'$ .

β) Θεωρήσατε το ανταλλοίωτο τετράνυσμα  $A^\mu = (2, 0, 2, 1)^T$  στο  $\Sigma$  και υπολογίσατε το στο  $\Sigma'$ .

γ) Έστω ο συναλλοίωτος αντισυμμετρικός ταυσιτής  $B_{\mu\nu}$  του οποίου δύο μη μηδενικές συνιστώσες στο  $\Sigma$  είναι οι  $B_{02} = 2E$  και  $B_{03} = 2E$ . Υπολογίσατε τις υπόλοιπες συνιστώσες του ταυσιτή στο  $\Sigma$  και όλες τις συνιστώσες του στο  $\Sigma'$ .

## Περίοδος Φεβρουαρίου 1998

### Θέμα 1

Σωματία 1,2 αλληλεπιδρούν και παράγονται σωματία 3,4.

α) Υπολογίσατε την ενέργεια κατωφλίου του 1 στο ιδιοσύστημα του 2.

β) Την κινητική ενέργεια του σωματίου 1 στο ιδιοσύστημα του 2 προκειμένου η ταχύτητά του 3 να σχηματίζει γωνία  $\pi/2$  με την διεύθυνση του 1 στο ιδιοσύστημα του 2.

Δίδονται οι μάζες των 1, 2, 3, 4 καθώς και η ενέργεια  $E_3$  του 3 στο ιδιοσύστημα του 2.

### Θέμα 2

Θεωρήσατε τον μετασχηματισμό  $(x, t) \leftrightarrow (u, v)$  με  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct + x)$ ,  $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct - x)$

α) Υπολογίσατε το στοιχείο μήκους Lorentz  $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2$  στις συντεταγμένες  $u, v$ .

β) Έστω διάνυσμα  $A$  με  $(A_t, A_x) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ .

β1) Υπολογίσατε τις συνιστώσες  $A_u, A_v$

β2) Τι συμπέρασμα εξάγεται δια το Ευκλείδειο μέτρο του  $A$ ;

γ1) Να γράψετε την κυματική εξίσωση:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi(t, x) = 0 \text{ στις συντεταγμένες } (u, v).$$

γ2) Τι συμπέρασμα συνάγετε για τις λύσεις της εξίσωσης;

### Θέμα 3

Ο πίνακας μετασχηματισμού Lorentz μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων  $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ , τα οποία κινούνται κατά τον τυποποιημένο τρόπο κατά μήκος του άξονα  $x$ , είναι

$$L = \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

α) Συμπληρώσατε τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα  $L$ .

β) Υπολογίσατε τη σχετική ταχύτητα του  $\Sigma_2$  ως προς το  $\Sigma_1$ .

γ) Γράψτε τον πίνακα μετασχηματισμού Lorentz από  $\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$

δ) Έστω το ανταλλοίωτο τετράνυσμα  $A^\mu = (1, 0, 1, 2)$  ως προς  $\Sigma_1$  και το  $B^\mu = (1, 2, 0, 1)$  ως προς το  $\Sigma_2$

Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο των  $A$  και  $B$

### Θέμα 4

Ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) με βάση  $B\Gamma=2a'$  και ύψος  $u'$  στο σύστημα ηρεμίας του  $\Sigma'$ , ολισθαίνει με την πλευρά  $B\Gamma$  και με ταχύτητα  $v$  κατά μήκος του άξονα  $x$  στο επίπεδο  $Oxy$  ενός αδρανειακού συστήματος  $\Sigma$ .

α) Βρείτε τις γωνίες του τριγώνου όπως τις βλέπει ο παρατηρητής  $\Sigma$  και εξετάστε αν το τρίγωνο παραμένει ισοσκελές.

β) Χ Ένα φωτόνιο βάλλεται κατά μήκος της  $BA$  στο  $\Sigma'$ . Να ευρέθη η γωνία που σχηματίζει με την  $B\Gamma$  στο  $\Sigma$ .



## Περίοδος Σεπτεμβρίου 1998

### Θέμα 1

Θεωρήσατε την αντίδραση:  $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$

Δείξτε ότι στο ιδιοσύστημα του  $p$ , η ενέργεια κατωφλίου του φωτονίου είναι:  $\frac{m^2 + 2mn}{2n}$

όπου  $m_p = m_n = n$  και  $m_{\pi^+} = n$

### Θέμα 2

Έστω πίνακας  $\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$  θετικώς ορισμένος, δηλαδή  $\Gamma_{ij}u^i u^j > 0 \quad \forall u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Δείξτε ότι υπάρχει πίνακας προωθήσεως  $B$  τέτοιος ώστε  $B^T \Gamma B = \Delta$ , όπου  $\Delta$  διαγώνιος πίνακας.

(Υπόδειξη: δοκιμάστε συνδυασμούς τιμών  $x, y = 1, -1$  για να βγάλετε αναγκαίες σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του  $\Gamma$ .)

### Θέμα 3

Αδρανειακός παρατηρητής  $O$  παρατηρεί ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  και μαγνητικό πεδίο  $\vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{bmatrix}$

Έτερος αδρανειακός παρατηρητής  $O'$  έχων τους άξονες του παραλλήλους προς αυτούς του  $O$  παρατηρεί

αντιστοίχως  $\vec{E}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  και  $\vec{B}' = \begin{bmatrix} 0 \\ B' \\ 0 \end{bmatrix}$

Να ευρεθεί η ταχύτης του  $O'$  καθώς και το  $B'$ .

(Υπόδειξη: Ο νόμος μετασχηματισμού του αναλλοίωτου ηλεκτρομαγνητικού τανυστή μπορεί να πάρει την μορφή:  $F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu F^{\mu\nu} \Leftrightarrow F' = \Lambda(u)F\Lambda^T(u) \Leftrightarrow \Lambda(-u)F' = F\Lambda(u)$ )

### Θέμα 4

α) Δείξτε ότι το μιγαδικό τρι-διάνυσμα  $\vec{K} = \vec{E} + ic\vec{B}$  μετασχηματίζεται κάτω από τους τυποποιημένους μετασχηματισμούς Lorentz κατά τη διεύθυνση του άξονα- $x$  με ταχύτητα  $v$  με στροφή κατά φανταστική γωνία  $i\phi = i \cosh^{-1} \gamma$ .

β) Συνάγετε ότι τα μόνα αναλλοίωτα του H/M πεδίου κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz που σχηματίζονται από τα  $E, B$  είναι τα  $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2$  και  $\vec{E} \cdot \vec{B}$

### Θέμα 5

Στερεά ράβδος είναι παράλληλη προς τον άξονα  $x'$  του συστήματος  $K'$ . Κινείται με σταθερή επιτάχυνση  $a'$  παράλληλη προς τον άξονα  $y'$ . Το  $K'$  κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο κατά την διεύθυνση του  $x$  άξονα με ταχύτητα  $v$  ως προς το  $K$ .

Ποια η εξίσωση κίνησης της ράβδου στο σύστημα  $K$ . Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

## Περίοδος Φεβρουαρίου 1999

### Θέμα 1.

α) Υπολογίσατε τη διαφορά δυναμικού που απαιτείται προκειμένου σωματίο φορτίου  $q$  και μάζας  $m$ , επιταχυνόμενο σε μία διάσταση, να αυξήσει τη μάζα του κατά  $a$ .

β) Υπολογίσατε την ταχύτητα του σωματιδίου υποθέτοντας ότι εκκινεί από την ηρεμία.

Σχολιάστε τα αποτελέσματα σας για διάφορες τιμές του  $a$ .

### Θέμα 2.

Έστω  $\vec{p}$ ,  $E$  η 3-ορμή και η ενέργεια σωματιδίου μάζας  $m$ . Δείξτε τις σχέσεις

$$d\vec{p} = \vec{A} dm + B d\vec{v} \qquad dE = \Gamma dm + \vec{A} d\vec{v}$$

Σχολιάστε τις μεταβολές  $d\vec{p}$ ,  $dE$  συναρτήσει των  $dm$ ,  $d\vec{v}$ .

β) Έστω ότι στο σωματίδιο ασκείται δύναμη  $\vec{F}$ . Δείξτε ότι το έργο  $dW$  που παράγει η δύναμη  $\vec{F}$  στο σωματίδιο δίνεται από τη σχέση  $dW = d(mc^2\gamma)$

Επίσης υπολογίσατε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου κάτω από την επίδραση της  $\vec{F}$

### Θέμα 3

α) Δείξτε ότι εάν δύο φωτόνια διαδίδονται παράλληλα σε ένα ΑΣΑ τότε διαδίδονται παράλληλα σε κάθε άλλο ΑΣΑ

β) Σε ένα ΑΣΑ  $\Sigma$  δύο δέσμες φωτονίων διαδίδονται κατά μήκος των αξόνων  $x, y$ . Υπολογίσατε τη γωνία μεταξύ των δεσμών φωτονίων σε ένα ΑΣΑ το οποίο κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο ως προς το πρώτο με ταχύτητα  $u$ . Σχολιάσατε το αποτέλεσμα.

### Θέμα 4

Φωτόνιο κινείται κατά μήκος του θετικού  $y$  ημιάξονα ενός ΑΣΑ  $Oxy$ . Ένας παρατηρητής  $O$ , ο οποίος κινείται κατά μήκος του θετικού  $x$  ημιάξονα βλέπει το φωτόνιο να κινείται έχοντας ίσες κατά μέτρο ορμές  $p'_x$  και  $p'_y$ . Να ευρεθεί η ταχύτητα του παρατηρητή ως προς το  $O$ .

### Θέμα 5ον.

Θεωρήσατε τα σωματίδια  $A$  και  $B$  τα οποία έχουν τετραορμές  $P_A, P_B$  αντιστοίχως.

Εάν από την αλληλεπίδραση τους παράγεται μία οντότητα  $\Gamma$  δείξτε ότι :

α) Εάν ένα εκ των  $A, B$  είναι σωματίο με μάζα, τότε το  $\Gamma$  είναι επίσης σωματίο με μάζα.

β) Όταν και τα δύο είναι φωτόνια, το  $\Gamma$  εκτός από την περίπτωση που είναι σωματίο με μάζα μπορεί να είναι φωτόνιο;

## Περίοδος Ιουνίου 1999

### Θέμα 1

Σωματίο μάζας ηρεμίας  $M$ , ακίνητο εις το αδρανειακό σύστημα  $\Sigma$  διασπάται εις τρία φωτόνια.

- Δείξατε ότι οι τροχιές των φωτονίων κείνται επί επιπέδου
- Εάν οι παραπάνω τροχιές σχηματίζουν ίσες γωνίες, να βρείτε τις ενέργειες των φωτονίων
- Εάν παρατηρητής  $O'$  που πλησιάζει το σωματίο κατά μήκος της τροχιάς ενός φωτονίου ευρίσκει την ενέργεια τούτου  $M$ , να βρείτε την ταχύτητα  $v$  του  $O'$  ως προς τον  $O$ , τις ενέργειες των άλλων δύο φωτονίων καθώς και την σχηματιζόμενη από αυτές γωνία (εις τον  $O'$ )
- Εάν παρατηρητής  $O''$  κινείται επί της τροχιάς του ίδιου φωτονίου με ταχύτητα επίσης  $v$  αλλά απομακρυνόμενος του σωματίου, να βρείτε την ενέργεια του φωτονίου τούτου καθώς και τις ενέργειες των άλλων δύο και την υπ' αυτών σχηματιζόμενη γωνία (ως προς τον  $O''$ )
- Πόση αναμένετε να είναι η συνολική ενέργεια των φωτονίων ως προς τον  $O'$  και τον  $O''$ .

### Θέμα 2

Θεωρήσατε τον μετασχηματισμό  $(t, x) \leftrightarrow (u, v)$  με  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct + x)$ ,  $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct - x)$

- Υπολογίσατε το στοιχείο μήκους Lorentz  $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2$  στις συντεταγμένες  $u, v$ .
- Εστω διάνυσμα  $A$  με  $(A_t, A_x) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ .
- Υπολογίσατε τις συνιστώσες  $A_u, A_v$
- Τι συμπέρασμα εξάγεται δια το Ευκλείδειο μέτρο του  $A$ ;
- Να γράψετε την κυματική εξίσωση:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi(t, x) = 0 \text{ στις συντεταγμένες } (u, v).$$

- Τι συμπέρασμα συνάγετε για τις λύσεις της εξίσωσης;

### Θέμα 3

Σχετικιστικό υλικό σημείο  $P$  κινείται έτσι ώστε η κοσμική γραμμή του σε ένα ΑΣΑ  $\Sigma$  να περιγράφεται με τις εξισώσεις  $x^2 - c^2 t^2 = a^2$ ,  $y = z = 0$ . Δείξατε ότι:

- Η παραμετρική μορφή της κοσμικής γραμμής μπορεί να γραφεί  $ct = a \sinh \varphi$ ,  $x = a \cosh \varphi$ ,  $y = z = 0$ . Τι είναι η παράμετρος  $\varphi$  και πως συνδέεται με τον ιδιόχρονο του  $P$ ;
- Υπολογίσατε την τετραταχύτητα του  $P$  στο  $\Sigma$
- Υπολογίσατε την τετραεπιτάχυνση του  $P$  στο  $\Sigma$  και δείξατε πως συνδέεται με το τετράνυσμα θέσης. Τι συνάγετε για το "συναλλοίωτο" αυτής της κίνησης;
- Εάν  $m$  είναι η μάζα του  $P$  υπολογίσατε την τετραδύναμη  $F^\mu$  που δέχεται το  $P$  (στο  $\Sigma$ ) και δείξατε ότι δεν μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια του σωματιδίου  $P$  κατά την κίνηση του.

### Θέμα 4

Κατά τη μελέτη της αντίδρασης  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  δίνεται ότι στο εργαστήριο το σωματίδιο 1 έχει κινητική ενέργεια  $T_1$ , το σωματίδιο 2 ηρεμεί και το σωματίδιο 3 παράγεται σε γωνία  $90^\circ$  ως προς τη διεύθυνση κίνησης του 1. Θεωρώντας ότι οι μάζες των σωματιδίων είναι γνωστές υπολογίσατε:

## Περίοδος Σεπτεμβρίου 1999

### Θέμα 1

Δύο προβολείς λέιζερ διαφορετικού χρώματος (δηλ. διαφορετικής συχνότητας  $f_1, f_2$ ) ευρισκόμενοι σε δύο σημεία του χώρου εστιάζουν το φως τους σε κοινό σημείο από το οποίο διέρχεται αδρανειακός παρατηρητής που βλέπει το χρώμα των δύο δεσμών ίδιο.

α) Αν οι κατευθύνσεις διάδοσης των δεσμών σχηματίζουν αντίστοιχα γωνίες  $\theta_1, \theta_2$  με την κατεύθυνση κίνησης του παρατηρητή στο αδρανειακό σύστημα που οι προβολείς είναι ακίνητοι, να ευρέθι το μέτρο της ταχύτητας του παρατηρητή.

β) Υπάρχει περίπτωση να είναι αδύνατον ο παρατηρητής να δει τις δέσμες με ίδιο χρώμα ;

(Υπόδειξη: Υποθέστε ότι ο παρατηρητής κινείται στη διχοτόμο της γωνίας που σχηματίζουν οι δέσμες)

γ) Ένα αυτοκίνητο κινείται ομαλά κατά μήκος ευθυγράμμου δρόμου που διέρχεται μέσα από οικισμό. Όλα τα σπίτια είναι βαμμένα μπλε (συχνότητα  $0,5 \times 10^{15}$  Hz) στην πλευρά που βλέπει μπροστά του ο οδηγός και κόκκινα (συχνότητα  $0,75 \times 10^{15}$  Hz) στην πλευρά που βλέπει αν στρέψει πίσω του. Να ευρέθι η ταχύτης του οδηγού αν αυτός δεν βλέπει καμία διαφορά στο χρώμα των δύο όψεων των σπιτιών.

(Υποθέστε για ευκολία ότι οι δύο πλευρές ευρίσκονται ακριβώς μπροστά και πίσω από τον οδηγό)

### Θέμα 2

Σωματίο κινείται με ταχύτητα  $u$  στο επίπεδο  $x, y$  αδρανειακού συστήματος  $K$  και η διεύθυνση της ταχύτητας του σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον θετικό ημιάξονα  $x$ . Το σωματίο προσκρούει ελαστικά σε τοίχο που κινείται με ταχύτητα  $v$  παράλληλη με τον αρνητικό ημιάξονα  $x$  του  $K$ . Υπολογίσατε την γωνία ανακλάσεως  $\phi$  του σωματίου.

### Θέμα 3

Φωτόνιο συχνότητας  $f_1$  σκεδάζεται σε ελεύθερο σωματίο μάζας  $m$  που ηρεμεί στο σύστημα εργαστηρίου.

A)

A1) Αν η γωνία σκεδάσεως στο σύστημα εργαστηρίου είναι  $\theta$ , δείξατε ότι η νέα του συχνότητα  $f_2$  δίδεται

$$\text{από τη σχέση } \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} = \frac{h}{mc^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

A2) Υπολογίσατε την κινητική ενέργεια του σωματιδίου μετά την σκέδαση.

B) Εάν το φωτόνιο σκεδαστεί κατευθείαν προς τα πίσω υπολογίσατε την ταχύτητα του σωματίου συναρτήσει της  $f_1$ .

### Θέμα 4

Ένα  $\pi$  μεσόνιο διασπάται σε ηρεμία κατά την αντίδραση  $\pi \rightarrow \mu + \nu$ .

Δείξατε ότι η κινητική ενέργεια του εκπεμπόμενου  $\mu$ -μεσονίου είναι  $T = \frac{(m_\pi - m_\mu)c^2}{2m_\pi}$

### Θέμα 5

Σε ένα σχετικιστικό αδρανειακό σύστημα  $\Sigma$  ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα έχει συχνότητα  $f$  και διαδίδεται κατά μήκος διεύθυνσης που σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον άξονα  $Ox$ . Στο  $\Sigma$  το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο σε κάθε σημείο  $(ct, x, y, z)$  είναι:

$$E = (-AR \sin \theta, AR \cos \theta, 0) \text{ και } B = (0, 0, \frac{AR}{c}) \text{ με } R = \sin[2\pi f(t - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c})]$$

Θεωρήστε σύστημα  $\Sigma'$  το οποίο κινείται ως προς το  $\Sigma$  κατά τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα  $v = (c \cos \theta, 0, 0)$ . Δείξτε ότι :

α) το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στο σημείο  $(ct', x', y', z')$  του  $\Sigma'$  δίνονται από τις σχέσεις

$$E' = (-AR' \sin \theta, 0, 0) \text{ , } B' = (0, 0, \frac{AR'}{c} \sin \theta) \text{ με } R' = \sin[2\pi f \sin \theta (t' - \frac{y'}{c})]$$

β) η διεύθυνση διάδοσης του κύματος στο  $\Sigma'$  είναι κατά μήκος το άξονα  $Oy'$

γ) η συχνότητα του κύματος στο  $\Sigma'$  είναι ίση με  $v \sin \theta$ .

## Περίοδος Φεβρουαρίου 2000

### Θέμα 1

Δύο φωτόνια ενέργειας  $E_1$  και  $E_2 = kE_1$  ( $k < 1$ ) διαδίδονται σε αντίθετες διευθύνσεις κατά μήκος του άξονα  $x$  ενός ΑΣΑ  $\Sigma$ .

- α) Υπολογίσατε τον παράγοντα  $\beta$  ενός άλλου ΑΣΑ  $\Sigma'$  το οποίο κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο ως προς το  $\Sigma$  στο οποίο τα φωτόνια έχουν την ίδια συχνότητα. Ποια η κοινή ενέργεια των φωτονίων στο  $\Sigma$ .  
β) Παρατηρητής απομακρύνεται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του άξονα  $x$  από μια πηγή η οποία εκπέμπει κυανό φως συχνότητας  $f = 7,5 \times 10^{13}$  Hz και πλησιάζει στον άξονα  $x$  μια άλλη σταθερή πηγή η οποία εκπέμπει ερυθρό φως συχνότητας  $\nu = 5 \times 10^{13}$  Hz. Υπολογίσατε για ποία ταχύτητα ο παρατηρητής εκτιμά ότι οι δύο πηγές εκπέμπουν φως ίδιου χρώματος και να βρεθεί η συχνότητα του κοινού χρώματος.

2. Σχετικιστικό υλικό (ΣΥΣ) σημείο κινείται (στον πραγματικό τρισδιάστατο χώρο!) έτσι ώστε στο χωρόχρονο η κοσμική του γραμμή περιγράφεται από τις εξισώσεις :  $x^2 - c^2 t^2 = \alpha^2$ ,  $y = z = 0$ .

Δείξτε ότι :

(α) Η παραμετρική, μορφή της κοσμικής γραμμής μπορεί να γραφεί :

$$ct = \alpha \sinh \phi$$

$$x = \alpha \cosh \phi$$

$$y = z = 0$$

Τι είναι η παράμετρος  $\phi$  και πως συνδέεται με τον ιδιόχρονο του ΣΥΣ;

(β) Υπολογίσατε την τετραταχύτητα και την τετραεπιτάχυνση και εξετάσατε πως συνδέεται με το τετράνυσμα θέσης. Τι συνάγεται από το αποτέλεσμα για την «κίνηση» αυτή;

(γ) Εάν η μάζα του ΣΥΣ είναι  $m$  δείξτε ότι η απαιτούμενη τετραδύναμη ( $F^\mu = m a^\mu$ ) προκειμένου να

πραγματοποιηθεί η κίνηση αυτή είναι  $F^\mu = \frac{m}{\alpha^2} x^\mu$

Μεταβάλλεται η ενέργεια του ΣΥΣ κατά την κίνηση του;

### Θέμα 3

Καθρέφτης κινείται κάθετα στον άξονα  $x$  ενός ΑΣΑ  $\Sigma$  με ταχύτητα  $u$ . Φωτεινή δέσμη η οποία εκπέμπεται από σημειακή φωτεινή πηγή τοποθετημένη στην αρχή του  $\Sigma$  προσπίπτει στον καθρέφτη με γωνία  $\theta$  και ανακλάται με γωνία  $\phi$ .

Δείξτε ότι η γωνία ανάκλασης  $\phi$  συνδέεται με τη γωνία πρόσπτωσης  $\theta$  με τη σχέση:

$$\cos \phi = \frac{(u^2 + c^2) \cos \theta - 2cu}{u^2 + c^2 - 2cu \cos \theta}$$

### Θέμα 4

Κατά τη μελέτη της αντίδρασης  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  στο εργαστήριο βρέθηκε ότι το σωματίδιο 1 έχει κινητική ενέργεια  $T_1$ , το 2 ηρεμεί ενώ το 3 παράγεται

## Περίοδος Ιουνίου 2001

### Θέμα 1

Τα ΑΣΑ Σ, Σ' κινούνται κατά μήκος του κοινού τους άξονα  $x, x'$  με ταχύτητα  $u$ , το δεύτερο ως προς το πρώτο, ενώ το ΑΣΑ Σ'' κινείται ως προς το Σ' με ταχύτητα  $u$  κατά μήκος του κοινού τους άξονα  $y', y''$ . Σωματίδιο κινείται στο Σ κατά μήκος του άξονα  $x$  με ταχύτητα  $V$ .

- Υπολογίστε την τροχιά του σωματιδίου στο Σ'',
- Υπολογίστε κλασικά (Γαλιλαϊκά) και σχετικιστικά τη γωνία που σχηματίζει η τροχιά του σωματιδίου με τον άξονα  $x''$  στο Σ''
- Εξετάστε τη δυνατότητα οι δύο γωνίες στο ερώτημα (β) να είναι ίσες..

### Θέμα 2

Στο ΑΣΑ Σ φωτόνιο συχνότητας  $f$  κινείται υπό γωνία  $\phi$  ως προς ένα λείο κάτοπτρο και ανακλάται σε αυτό ελαστικά. Υποθέτοντας ότι η κίνηση του φωτονίου είναι στο επίπεδο  $xz$  του Σ και ότι το κάτοπτρο κινείται με ταχύτητα  $u$  κατά μήκος του άξονα  $x$  διατηρώντας το επίπεδο του πάντα κάθετο στον άξονα αυτό, υπολογίστε τη συχνότητα του ανακλώμενου φωτονίου στο Σ καθώς και στο ιδιόσυστημα του κατόπτρου. Εξετάστε την περίπτωση της κάθετης πρόσπτωσης και σχολιάστε το αποτέλεσμα.

### Θέμα 3

Στο εργαστήριο ποζιτρόνιο μάζας  $m$  και ενέργειας  $E$  προσπίπτει σε ακίνητο ηλεκτρόνιο (μάζας  $m$ ) οπότε παράγονται δύο φωτόνια μετά την εξαύλωση των δύο σωματιδίων.

- Ποια η ελάχιστη γωνία μεταξύ των δύο παραγόμενων φωτονίων στο εργαστήριο;
- Ποια η μέγιστη συχνότητα ενός εκ των δύο φωτονίων; Πώς κινούνται τα φωτόνια στην περίπτωση αυτή;

### Θέμα 4

Σε ένα ΑΣΑ Σ το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο  $\vec{E}, \vec{B}$  βρίσκονται στο επίπεδο  $yz$  και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία  $\phi$ . θεωρούμε ένα άλλο ΑΣΑ Σ' το οποίο κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο (κατά μήκος του άξονα  $x$ ) ως προς το Σ με ταχύτητα  $u$ .

- Δείξτε ότι τα πεδία  $\vec{E}', \vec{B}'$  που παρατηρούνται στο Σ' μπορεί να είναι παράλληλα και βρείτε την αναγκαία συνθήκη για αυτό.
- Δείξτε ότι το Σ' δεν είναι μοναδικό και προσδιορίστε την ταχύτητα των συστημάτων που ικανοποιούν τη συνθήκη της παραλληλίας των  $E', B'$  στο Σ'.

### Θέμα 5

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που δημιουργεί στο ιδιόσυστημα του ένας ευθύγραμμος ομοιόμορφα φορτισμένος μονωτής απείρου μήκους αποτελείται μόνο από ηλεκτρικό πεδίο το οποίο

έχει ακτινική διεύθυνση και μέτρο  $E_{\text{ακτ}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ , όπου  $\lambda$  η γραμμική πυκνότητα φορτίου και  $r$  η απόσταση

από τον αγωγό.

Θεωρούμε δύο παράλληλους μονωτές με ίσες κατά μέτρο και αντίθετου πρόσημου πυκνότητες φορτίου, οι οποίοι βρίσκονται πολύ κοντά ο ένας στον άλλο και ολισθαίνουν κατά μήκος της κοινής τους διεύθυνσης με ταχύτητες  $u_1, u_2$  ως προς ένα ΑΣΑ Σ. Υπολογίσατε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στο Σ, υποθέτοντας ότι  $u_1, u_2 \ll c$ .

Αναλύστε το αποτέλεσμα με βάση τις γνώσεις σας για το πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού.

Στις ασκήσεις μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις σχέσεις μετασχηματισμού των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων:

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} & \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{u} \times \vec{B}) \\ \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{u} \times c\vec{E})\end{aligned}$$

## Περίοδος Σεπτεμβρίου 2001

### Θέμα 1

Στο χωρόχρονο ( $s=ct, x, y, z$ ) θεωρήστε το γραμμικό μετασχηματισμό:

$$x' = a s + b x \quad y' = y \quad z' = z \quad s' = d s + e x$$

α) Παράγετε το μετασχηματισμό προώθησης απαιτώντας το συναλλοίωτο της κυματικής εξίσωσης

$$\square^2 \Phi = 0 \quad \text{με} \quad \square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

β) Στο ΑΣΑ ( $s, x, y, z$ ) δίνεται το διανυσματικό πεδίο  $B^\mu = (2s, 3x, -y, sxy)$ . Υπολογίστε την απόκλιση του

πεδίου  $B'^\mu := \frac{\partial B^\mu}{\partial x'^\mu}$  στο ΑΣΑ ( $s', x', y', z'$ ) όταν το δεύτερο κινείται ως προς το πρώτο κατά τον

τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα  $u = 2/3 c$ .

### Θέμα 2

Το ΑΣΑ  $\Sigma'$  κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο κατά μήκος του άξονα  $x$  ενός ΑΣΑ  $\Sigma$  με ταχύτητα  $u$ .

Σωματίδιο κινείται στο  $\Sigma$  στο επίπεδο  $xy$  σε κυκλική τροχιά ακτίνας  $r$  και κέντρο την αρχή των αξόνων του  $\Sigma$ .

α. Υπολογίστε την ταχύτητα του σωματιδίου στο  $\Sigma'$ .

β. Υπολογίστε την τροχιά του σωματιδίου στο  $\Sigma'$ . Είναι περιφέρεια; Είναι περιοδική;

### Θέμα 3

α. Δείξτε ότι το άθροισμα δύο χρονικών ή μηδενικών τετρανυσμάτων είναι ένα χρονικό τετράνυσμα εκτός από την περίπτωση που και τα δύο τετρανύσματα είναι μηδενικά και παράλληλα οπότε και το άθροισμα είναι μηδενικό τετράνυσμα και παράλληλο προς τα άλλα δύο. Τι σημαίνει το αποτέλεσμα για τις σχετικιστικές αντιδράσεις;

β. Δείξτε ότι εάν μηδενίζεται μια συνιστώσα ενός τετρανύσματος σε όλα τα ΑΣΑ τότε το τετράνυσμα μηδενίζεται. Θεωρήστε μια αντίδραση στοιχειωδών σωματιδίων και δείξτε ότι η διατήρηση της ενέργειας κατά την αντίδραση συνεπάγεται και διατήρηση της 3-ορμής και αντίστροφα.

### Θέμα 4

Υπολογίστε την ενέργεια των σκεδαζομένων ηλεκτρονίων κατά την ελαστική σκέδαση ηλεκτρονίου-πρωτονίου στο ιδιοσύστημα του πρωτονίου συναρτήσει της ενέργειας του προσπίπτοντος σωματιδίου και της γωνίας σκέδασης θεωρώντας ότι τα προσπίπτοντα και τα σκεδαζόμενα ηλεκτρόνια έχουν πολύ υψηλές ενέργειες. Οι μάζες  $m, M$  του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου θεωρούνται γνωστές και  $m \ll M$ .

### Θέμα 5

Σωματίδιο μάζας  $m$  και αρχικής ενέργειας  $E$  στο εργαστήριο συγκρούεται με όμοιο σωματίδιο που βρίσκεται σε ηρεμία. Αποδείξτε ότι εάν το  $E$  είναι πολύ μεγαλύτερο από το  $mc^2$  η μεγαλύτερη διαθέσιμη ενέργεια στο σύστημα κέντρου ορμής είναι  $c\sqrt{2Em}$

## Περίοδος Φεβρουαρίου 2002

Να απαντήσετε στα 4 από τα 5 θέματα  
Το  $c$  ισούται με τη μονάδα.

### Θέμα 1

(α) Γράψτε τη σχέση που εκφράζει την ολική ενέργεια ενός σωματιδίου συναρτήσει της χωρικής ορμής του και της μάζας του. Από πού προκύπτει η σχέση αυτή;

(β) Εξηγήστε γιατί η μάζα ενός σωματιδίου είναι αναλλοίωτη και συνεπώς ανεξάρτητη της ταχύτητας.

(γ) Τι εννοούμε λέγοντας ότι το φωτόνιο έχει μάζα μηδέν;

(δ) Φωτόνιο συχνότητας  $f$  απορροφάται από ηλεκτρόνιο μάζας  $m$  το οποίο ηρεμεί στο εργαστήριο, θεωρήστε ότι το φωτόνιο επανεκπέμπεται από το ηλεκτρόνιο υπό γωνία  $\theta$  ως προς τη διεύθυνση πρόσπτωσης του αρχικού φωτονίου και δείξτε ότι η συχνότητα  $f'$  του εκπεμπόμενου φωτονίου στο

εργαστήριο, δίνεται από τη σχέση:  $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f} + \frac{h}{m}(1 - \cos \theta)$

όπου  $h$  είναι η σταθερά του Planck. Διερευνήστε για διάφορες γωνίες  $\theta$ .

### Θέμα 2

Στο ΑΣΑ  $\Sigma$  υπάρχει μόνο το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E} = (E, 0, 0)$ . Γράψτε τις συνιστώσες του ταυνοστή του Η/Μ πεδίου στο  $\Sigma$ .

(α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο ΑΣΑ  $\Sigma'$ , το οποίο κινείται ως προς το  $\Sigma$  κατά τον τυποποιημένο τρόπο κατά μήκος του άξονα  $x$  με ταχύτητα  $v$ .

(β) Επαναλάβετε τον υπολογισμό όταν το  $\Sigma'$  κινείται ως προς το  $\Sigma$  κατά τον τυποποιημένο τρόπο κατά μήκος του άξονα  $y$  με ταχύτητα  $v$ .

### Θέμα 3

Δίνεται το διανυσματικό πεδίο  $A^\mu$  το οποίο στο ΑΣΑ  $\Sigma$  έχει συντεταγμένες:

$$A^\mu = \begin{bmatrix} -3t + x \\ -x + t \\ y \\ 3z \end{bmatrix}_\Sigma$$

Υπολογίστε την απόκλιση  $A^\mu_{;\mu}$  του  $A^\mu$  στο ΑΣΑ  $\Sigma'$ , το οποίο κινείται ως προς το  $\Sigma$  με ταχύτητα  $\vec{u} = k\hat{x}$  με  $|k| < 1$ . Μπορεί το  $A^\mu$  να είναι τετράνυσμα ρεύματος ενός ηλεκτρικού φορτίου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

### Θέμα 4

Σχετικιστικό υλικό σημείο (ΣΥΣ), κινείται έτσι ώστε η κοσμική του γραμμή, να περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$x^2 - t^2 = b^2 \quad y=0 \quad z=0$$

Δείξτε ότι: (α) Η παραμετρική μορφή της κοσμικής γραμμής μπορεί να γραφεί :

$$t = b \sinh(\phi) \quad x = b \cosh(\phi) \quad y=0 \quad z=0$$

Τι είναι η παράμετρος  $\phi$  και πώς συνδέεται με τον ιδιόχρονο του ΣΥΣ;

(β) Υπολογίστε την τετραταχύτητα και την τετραεπιτάχυνση του ΣΥΣ. Τι συνάγεται από το αποτέλεσμα για την κίνηση;

(γ) Εάν η μάζα του ΣΥΣ είναι  $m$  δείξτε ότι η απαιτούμενη τετραδύναμη  $F^\mu = ma^\mu$  προκειμένου να

πραγματοποιηθεί η κίνηση είναι  $F^\mu = \frac{m x^\mu}{b^2}$ . Μεταβάλλεται η ενέργεια του ΣΥΣ κατά την κίνηση του;



### Θέμα 5

Στο ΑΣΑ  $\Sigma$  φωτόνιο συχνότητας  $f$  κινείται υπό γωνία  $\varphi$  ως προς ένα λείο επίπεδο κάτοπτρο όπου και ανακλάται ελαστικά. Η κίνηση του φωτονίου γίνεται στο επίπεδο  $xy$  του  $\Sigma$  και το κάτοπτρο κινείται με ταχύτητα  $u$  κατά τον άξονα  $x$ , έτσι ώστε το επίπεδο του να είναι κάθετο σε αυτόν. Υπολογίστε τη συχνότητα του ανακλώμενου φωτονίου στο  $\Sigma$ , καθώς και στο ιδιοσύστημα του κατόπτρου. Εξετάστε την περίπτωση της κάθετης πρόσπτωσης και σχολιάστε το αποτέλεσμα.

## Περίοδος

### Θέμα 1

Έστω ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο το οποίο στο ΑΣΑ  $\Sigma$  περιγράφεται από τα πεδία  $E$  και  $B$ . Ορίζουμε τον αντάλλοιωτο τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου με την σχέση:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & cB_3 & -cB_2 \\ -E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1 \\ -E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0 \end{bmatrix}$$

α) Υπολογίσατε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε ένα ΑΣΑ  $\Sigma'$  το οποίο κινείται ως προς το  $\Sigma$  με ταχύτητα  $\vec{v} = v\hat{x}$ .

β) Δείξατε ότι οι σχέσεις μετασχηματισμού μεταξύ των πεδίων μπορούν να γραφούν:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp}) & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}_{\perp}) \end{aligned}$$

### Θέμα 2

Σε ένα ΑΣΑ  $\Sigma$  υπάρχει το ηλεκτρικό πεδίο  $E=(E,0,0)$ . Να γράψετε τον τανυστή του H/M πεδίου.

α) Υπολογίσατε το ηλεκτρικό πεδίο σε ΑΣΑ  $\Sigma'$  το οποίο κινείται ως προς το  $\Sigma$  κατά τον τυποποιημένο τρόπο κατά μήκος του άξονα  $x$  με ταχύτητα  $v$ .

β) Όμοια εάν το  $\Sigma''$  κινείται ως προς το  $\Sigma$  κατά τον τυποποιημένο τρόπο κατά μήκος του άξονα  $y$  με ταχύτητα  $v$ .

γ) Εάν παρατηρητής στο  $\tilde{\Sigma}$  έχει συντεταγμένες  $\tilde{t} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(\frac{x}{c} + t)$ ,  $\tilde{x} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(x - ct)$ ,  $\tilde{y} = y$ ,  $\tilde{z} = z$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  να βρεθεί το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που μετρά.

### Θέμα 3

ι) Δείξατε ότι ο μετασχηματισμός προώθησης Lorentz μπορεί να παραχθεί εάν θεωρήσετε το γραμμικό μετασχηματισμό ( $L=ct$ )

$$x' = \alpha_1 x + \alpha_2 L$$

$$L' = \alpha_3 x + \alpha_4 L$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

και ορίσετε τους συντελεστές  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  έτσι ώστε ο τελεστής του D'Alembert:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial L^2} \text{ να είναι αναλλοίωτος.}$$