ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
(ver. 2010.1)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Έννοια του διανύσματος
1.2 Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων
1.3 Πολλ/σιασμός αριθμού με διάνυσμα

ΘΕΩΡΙΑ: Σχολικό βιβλίο (σελ. 11-26)

ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ:
1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$
2. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (διανυσματικές ακτίνες, τέλος – αρχή)
3. Αν Μ=μέσον του ΑΒ και Ο τυχαίο σημείο, τότε $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ ή $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

4. Αν $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, τότε:

$$\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta},\ \lambda\in R$$

και μάλιστα αν $\lambda>0$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

αν $\lambda<0$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

Μεθοδολογία

1. Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ ή $\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}=\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}$.
2. Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$.
3. Για να αποδείξουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει μια σχέση της μορφής $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$.
4. Για να αποδείξουμε μια σχέση μεταξύ διανυσμάτων, συνήθως επιλέγουμε ένα από τα σημεία που αναφέρονται και το χρησιμοποιούμε ως σημείο αναφοράς για να αναλύσουμε ως προς αυτό όλα τα υπόλοιπα σύμφωνα με τον βασικό τύπο 2 που προαναφέρθηκε (διανυσματικές ακτίνες).

Ασκήσεις

1. Έστω $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ δυο μη μηδενικά και μη παράλληλα διανύσματα.

α) Αν $\kappa\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι $\kappa = 0$ και $\lambda = 0$.

β) Αν $\kappa_1\vec{\alpha} + \lambda_1\vec{\beta} = \kappa_2\vec{\alpha} + \lambda_2\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι $\kappa_1 = \kappa_2$ και $\lambda_1 = \lambda_2$.

2. Θεωρούμε τα σημεία Ο, Α και Β, τα οποία δεν είναι συνευθειακά. Σε κάθε $\lambda \in R$ αντιστοιχίζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}$, έτσι ώστε να ισχύει

$$\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \lambda\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in R$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ δεν είναι παράλληλα.

3. Αν ισχύει η ισότητα $9\overrightarrow{\mathrm{KA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{KB}} - 7\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

<u>1.4 Συντεταγμένες στο επίπεδο</u>

ΘΕΩΡΙΑ: Σχολικό βιβλίο (σελ. 29-39)

Ασκήσεις

1. Δίνονται τα σημεία Α(0,4), Β(5,-3) και Γ(-1,-2). Να βρείτε τις συντεταγμένες του Δ, αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$.

2. Δίνονται τα σημεία Α(3,-1), Β(2,-1) και Γ(2,-1). Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού (Μ) του Α ως προς Β.

3. Δίνονται οι κορυφές Α(1,4), Β(3,-9) και Γ(-5,2) του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

4. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (x^2 - 7x + 12,\ x^2 - 16),\ x \in R$. Για ποια τιμή του x είναι:

i) $\vec{a} = \vec{0}$ ii) $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{a} // x'x$

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (x^2 - 2x,\ 3x - x^2)$ και $\vec{\beta} = (-1{,}2)$. Να βρείτε το $x \in R$ ώστε:

i) $\vec{a} = \vec{\beta}$ ii) $\vec{a} = -\vec{\beta}$

6. Αν Α(-3,5) και Β(1,7) είναι οι διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλογράμμου και Μ(1,1) το σημείο τομής των διαγωνίων του, να βρείτε τις άλλες δύο κορυφές του παραλληλογράμμου.

7. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α(2α, 4α), Β(2α, 6α) και Γ(2α+$\sqrt{3}$α, 5α) είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

8. Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{a} = (x,\ y)$ για το οποίο ισχύει:

$$|\vec{a}|^{2009}(6x,\, 6y+5) = (6+5y,\, -5x)$$
(Διαγωνισμός «Θαλής» 2002-2003, τροποποιημένη).

1.5 Εσωτερικό γινόμενο

ΘΕΩΡΙΑ: Σχολικό βιβλίο (σελ. 41-46)

Ασκήσεις

1. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (4, 3)$. Να βρείτε το $\lambda \in R$, ώστε τα διανύσματα $\lambda\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

2. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι:

 α) $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = (\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) = (\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}}) = \dfrac{2\pi}{3}$

 β) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = -\dfrac{3}{2}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} - \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = \dfrac{1}{2}$

3. Αν $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = \dfrac{1}{2}$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι $\dfrac{\pi}{3}$, να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 1)$. Να αναλυθεί το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.

5. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και τα διανύσματα $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να αποδείξετε ότι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Βιβλιογραφία

1. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Διαγωνισμός «Θαλής».
2. Τραγανίτης Α., 1998, «Μαθηματικά 1, Β' Λυκείου», εκδ. Σαββάλας.