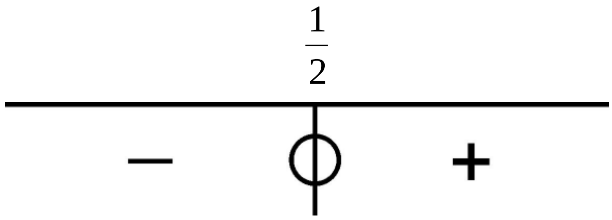
ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Η επίλυση μιας ανίσωσης, π.χ. $f(x) > 0$, ισοδυναμεί με την εύρεση του προσήμου του $f(x)$. Κατόπιν, επιλέγουμε το διάστημα όπου το πρόσημο του $f(x)$ ικανοποιεί την ανίσωση (στο συγκεκριμένο παράδειγμα το +) και έχουμε λύσει την ανίσωση. Για το λόγο αυτό, στην συνέχεια θα μελετήσουμε το πρόσημο των πιο κοινών πολυωνυμικών παραστάσεων.

Πρόσημο της παράστασης $ax + \beta$

- Ομόσημο του $\boldsymbol{\alpha}$ δεξιά από τη ρίζα (και ετερόσημο αριστερά)

Π.χ. Να βρεθεί το πρόσημο της $f(x) = 2x - 1$



Άρα,

$2x - 1 > 0$ όταν $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

$2x - 1 = 0$, όταν $x = \frac{1}{2}$

$2x - 1 < 0$, όταν $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

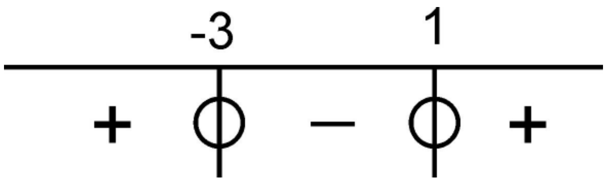
Πρόσημο του τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$

- Δύο πραγματικές ρίζες: Ομόσημο του $\boldsymbol{\alpha}$ εκτός των ριζών (και ετερόσημο ανάμεσα στις ρίζες)
- Μία πραγματική ρίζα διπλή: Ομόσημο του $\boldsymbol{\alpha}$ εκτός των ριζών
- Καμία πραγματική ρίζα: Παντού ομόσημο του $\boldsymbol{\alpha}$

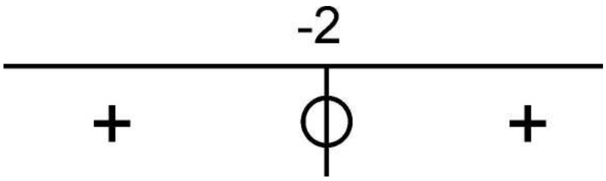
Π.χ.

1. Να βρεθεί το πρόσημο του $f(x) = x^2 + 2x - 3$

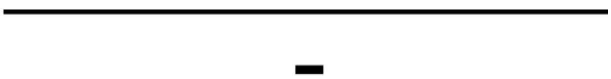
Μπορούμε εύκολα να βρούμε (με διακρίνουσα) ότι οι ρίζες του είναι $x = 1$ και $x = -3$. Οπότε εκτός των ριζών είναι ομόσημο του $a = 1$ και ανάμεσα ετερόσημο:



2. Να βρεθεί το πρόσημο του $f(x)=x^2+4x+4$
Έχουμε:
$f(x)=x^2+4x+4=(x+2)^2$
Οπότε το $f(x)$ έχει μία διπλή ρίζα $x=-2$.
Άρα:



3. Να βρεθεί το πρόσημο του $f(x)=-2x^2-1$
Έχουμε:
$-2x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{1}{2}$, αδύνατη.
Άρα το $f(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε είναι παντού ομόσημο του $a=-2$:



<u>Μεθοδολογία επίλυσης ανισώσεων</u>

Μέθοδος Α: Πίνακας με πολλές γραμμές

Ας υποθέσουμε ότι πρέπει να επιλύσουμε την ανίσωση

$$(x-1)(x^2+1)(2x^2+3x-5)\geq 0$$

Βρίσκουμε τις ρίζες κάθε μιας από τις παραστάσεις από τις οποίες αποτελείται η ανίσωση.
$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$, αδύνατη
$2x^2+3x-5=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x=1 \; ή \; x=-\frac{5}{2}$
Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα. Τα πρόσημα τα βρίσκουμε σύμφωνα με τους τρόπους που προαναφέρθηκαν. Για να βρούμε

το πρόσημο της τελευταίας γραμμής, P(x), πολλαπλασιάζουμε κατακόρυφα τα αντίστοιχα πρόσημα.

	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$	-		-	0	+	
x^2+1	+		+		+	
$2x^2+3x-5$	+	0	-	0	+	
P(x)	-	0	+	0	+	

Επειδή η ανίσωση είναι $(x-1)(x^2+1)(2x^2+3x-5)\geq 0$, ζητάμε τα **+**, αλλά και τις τιμές που μηδενίζουν την παράσταση (αφού η ανίσωση έχει το σύμβολο του μεγαλύτερου ή ίσου). Άρα η λύση είναι:

$x\in\left[-\frac{5}{2},1\right]\cup[1,+\infty)$

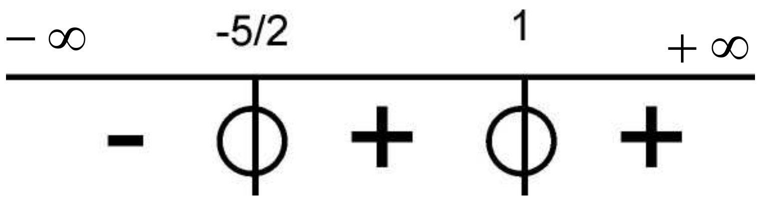
ή ισοδύναμα

$x\in\left[-\frac{5}{2},+\infty\right)$

Παρατηρήσεις
1. Προσέχουμε την σειρά των ριζών που βάζουμε στην πρώτη γραμμή: από τις μικρότερες προς τις μεγαλύτερες.
2. Στα $-\infty$ και $+\infty$ βάζουμε πάντοτε ανοικτό διάστημα.
3. Τα πρόσημα μπορούμε να τα βρούμε και με δοκιμές: αντικαθιστούμε σε κάθε παράσταση μια τιμή του x που να ανήκει στο διάστημα που μελετούμε και βρίσκουμε το πρόσημο του αποτελέσματος.
4. Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και σε περιπτώσεις που έχουμε παραστάσεις που δεν είναι πολυωνυμικές.

Μέθοδος Β: Ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε και πάλι να λύσουμε την ανίσωση του προηγούμενου παραδείγματος $(x-1)(x^2+1)(2x^2+3x-5)\geq 0$. Βρίσκουμε τις ρίζες κάθε μιας από τις επιμέρους παρενθέσεις όπως και προηγουμένως: x=1, x=1, x=-5/2.
Προσοχή: Η ρίζα x=1 εμφανίζεται **δύο φορές**.
Κατασκευάζουμε την παρακάτω ευθεία των πραγματικών αριθμών.



Στην ευθεία αυτή τοποθετούμε **όλες** τις ρίζες **από μία φορά**. Το πρόσημο το βρίσκουμε ως εξής:

1. Στο διάστημα που βρίσκεται στο άκρο δεξιά, τοποθετούμε το πρόσημο που έχει ο συντελεστής του «ολικού» μεγιστοβάθμιου όρου που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των μεγιστοβάθμιων όρων των επιμέρους παρενθέσεων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση $(+1)(+1)(+2)=+2$.

2. Κινούμενοι από δεξιά προς τα αριστερά, όταν «περνάμε» πάνω από ρίζα που εμφανίζεται περιττό πλήθος φορών, αλλάζουμε πρόσημο. Ενώ, όταν «περνάμε» πάνω από ρίζα που εμφανίζεται άρτιο πλήθος φορών διατηρούμε το ίδιο πρόσημο. Έτσι, στο παράδειγμά μας ξεκινάμε με + από δεξιά, διατηρούμε το + στο διάστημα (-5/2, 1) αφού η ρίζα x=1 εμφανίζεται δύο φορές, και βάζουμε – στο αριστερό διάστημα αφού η ρίζα x=-5/2 εμφανίζεται μία φορά.

Η λύση είναι και πάλι $x \in \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

Παρατήρηση:

1. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται μόνο σε πολυωνυμικές παραστάσεις.

2. Όταν στην ανίσωση υπάρχει όρος της μορφής $(f(x))^{\kappa}$***, τότε θεωρούμε ότι οι ρίζες της*** $f(x)$ ***εμφανίζονται κ φορές.***