ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
(ver. 2009.1)

ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ (Α' και Β' Λυκείου)

1. ΤΡΙΩΝΥΜΟ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

- Αν Δ>0, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν Δ=0, τότε η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή: $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$
- Αν Δ<0, τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Ισχύουν οι εξής τύποι:

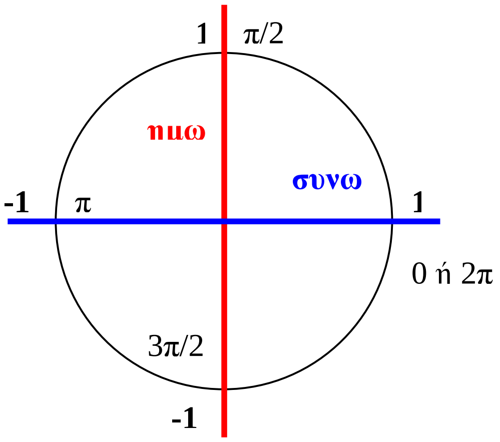
$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Εστω το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

- ❑ Αν Δ>0, τότε το τριώνυμο είναι : εκτός των ριζών ομόσημο του α
  ανάμεσα στις ρίζες ετερόσημο του α
- ❑ Αν Δ=0, τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του α (εκτός από τα σημεία που μηδενίζεται)
- ❑ Αν Δ<0, τότε το τριώνυμο είναι παντού ομόσημο του α.

2. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ



Τριγωνομετρικός κύκλος

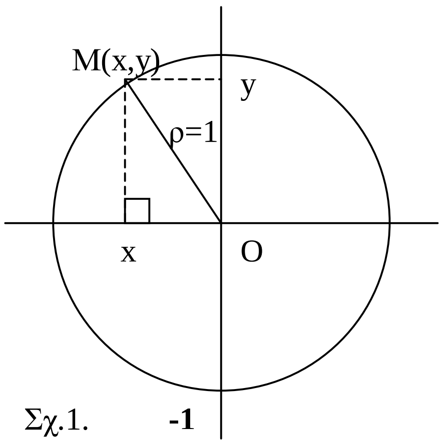
Ισχύουν:

$\eta\mu(\kappa\cdot 360^\circ+\omega)=\eta\mu\omega,\qquad \varepsilon\phi(\kappa\cdot 360^\circ+\omega)=\varepsilon\phi\omega,$

$\sigma\upsilon\nu(\kappa\cdot 360^\circ+\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega,\qquad \sigma\phi(\kappa\cdot 360^\circ+\omega)=\sigma\phi\omega$

$-1\le \eta\mu\omega\le 1$

$-1\le \sigma\upsilon\nu\omega\le 1$



Σχ.1.

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ</u>

1) $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

<u>Απόδειξη</u>

Αν M(x,y) είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε x=συνω και y=ημω

Επομένως

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = x^2 + y^2 = \rho^2 = 1^2 = 1$$

2) $\varepsilon\phi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \quad \sigma\phi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

<u>Απόδειξη</u>

Από το ίδιο σχήμα (1), έχουμε

$$\varepsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad \text{(εφόσον } x = \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0\text{)}$$

$$\sigma\phi\omega == \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \quad \text{(εφόσον } y = \eta\mu\omega \neq 0\text{)}$$

3) $\varepsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$

<u>Απόδειξη</u>

Από την προηγούμενη σχέση έχουμε:

$$\varepsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1$$

Ισχύουν επίσης:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\phi^2\omega} \quad \text{και} \quad \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\phi^2\omega}{1+\varepsilon\phi^2\omega}$$

Τύπος μετατροπής (ακτίνια-μοίρες): $\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{\mu}{180}$

<u>Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών:</u>

Μοίρες	Ακτίνια	ημω	συνω	εφω	σφω
0	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30	π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45	π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60	π/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90	π/2	1	0	Δεν ορίζεται	0

<u>Μνημονικός κανόνας για τον παραπάνω πίνακα.</u>
Συμπληρώνουμε την στήλη του ημιτόνου ως εξής: $\sqrt{0}/2,\ \sqrt{1}/2,\ \sqrt{2}/2,\ \sqrt{3}/2,\ \sqrt{4}/2$, οπότε προκύπτουν οι τιμές που αναγράφονται.
Αντιστρέφουμε τη στήλη του ημιτόνου και την τοποθετούμε στο συνημίτονο.
Διαιρούμε το ημίτονο δια του συνημιτόνου και παίρνουμε τη στήλη της εφαπτομένης.
Αντιστρέφουμε τη στήλη της εφαπτομένης και παίρνουμε τη στήλη της συνεφαπτομένης.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

$\eta\mu(-x)=-\eta\mu x$ $\eta\mu(\pi-x)=\eta\mu x$ $\eta\mu(\pi+x)=-\eta\mu x$

$\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x$ $\sigma\upsilon\nu(\pi-x)=-\sigma\upsilon\nu x$ $\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=-\sigma\upsilon\nu x$

$\varepsilon\varphi(-x)=-\varepsilon\varphi x$ $\varepsilon\varphi(\pi-x)=-\varepsilon\varphi x$ $\varepsilon\varphi(\pi+x)=\varepsilon\varphi x$

$\sigma\varphi(-x)=-\sigma\varphi x$ $\sigma\varphi(\pi-x)=-\sigma\varphi x$ $\sigma\varphi(\pi+x)=\sigma\varphi x$

$$\eta\mu(\frac{\pi}{2}-x)=\sigma\upsilon\nu x$$
$$\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-x)=\eta\mu x$$
$$\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}-x)=\sigma\varphi x$$
$$\sigma\varphi(\frac{\pi}{2}-x)=\varepsilon\varphi x$$

Μνημονικός κανόνας:
α) Ελέγχουμε το πρόσημο του αποτελέσματος ανάλογα με το τεταρτημόριο του αρχικού τόξου. Π.χ. το (π-x) βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο, αφού από το π αφαιρούμε τόξο.
β) Αν το αρχικό τόξο έχει μέσα στην παρένθεση $\frac{\pi}{2}$ ή $\frac{3\pi}{2}$ (90^o ή 270^o αντίστοιχα) τότε ο τριγωνομετρικός αριθμός αλλάζει. Π.χ. το $\eta\mu(\frac{\pi}{2}-x)$ θα γίνει **συνx**.

$$\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta,\ \kappa \in Z$$
$$\acute{\eta}\ \ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta,\ \kappa \in Z$$
$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \theta,\ \kappa \in Z$$
$$\varepsilon\phi x = \varepsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta,\ \kappa \in Z$$
$$\sigma\phi x = \sigma\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta,\ \kappa \in Z$$

3. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός

Η συνάρτηση $f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$, με πεδίο ορισμού A=R ονομάζεται εκθετική συνάρτηση.
Για κάθε x ισχύει $f(x) = a^x > 0$. Άρα σύνολο τιμών είναι το $(0, +\infty)$.

Οι ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης είναι οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων πραγματικών αριθμών:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$
$$a^x / a^y = a^{x-y}$$
$$\left(a^x\right)^y = a^{xy} \qquad \alpha, \beta > 0, \quad x, y \in R$$
$$\left(a \cdot \beta\right)^x = a^x \cdot \beta^x$$
$$\left(\frac{a}{\beta}\right)^x = \frac{a^x}{\beta^x}$$

Άσκηση

1. Με τη βοήθεια προγράμματος υπολογιστή, να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2^x$, β) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Παρατηρήστε για τις δύο βάσεις ότι 2>1 και $\frac{1}{2} < 1$. Τι μπορείτε να υποθέσετε;

4. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η έννοια του λογαρίθμου
Για $x > 0$, και $a > 0, a \neq 1$, ορίζουμε:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Ιδιότητες
Για $a, \beta > 0,\ a, \beta \neq 1,\ x, y > 0$, ισχύουν:

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^k = k \log_a x$$

$$\log_\beta x = \frac{\log_a x}{\log_a \beta}$$ (τύπος αλλαγής βάσης)

Δεκαδικός λογάριθμος

$$\log x \equiv \log_{10} x$$

Φυσικός ή Νεπέριος λογάριθμος

$$\ln x \equiv \log_e x$$

Ορισμός
Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $a > 0, a \neq 1$ και x>0 ονομάζεται λογαριθμική συνάρτηση.
Έχει πεδίο ορισμού το Α=$(0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το **R**. Είναι η **αντίστροφη** συνάρτηση της εκθετικής.

Ασκήσεις
1. Με τη βοήθεια προγράμματος υπολογιστή, να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:
α) $f(x) = \log_2 x$, β) $g(x) = \log_{1/2} x$
Παρατηρήστε για τις δύο βάσεις ότι 2>1 και $\frac{1}{2} < 1$. Τι μπορείτε να υποθέσετε;

2. Με τη βοήθεια προγράμματος υπολογιστή, να κάνετε **στο ίδιο σχήμα** τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$f(x) = 2^x \quad και \quad g(x) = \log_2 x$

Στη συνέχεια να σχεδιάσετε την διαγώνιο του 1ου και του 3ου τεταρτημορίου. Τι παρατηρείτε;

3. Με τη βοήθεια προγράμματος υπολογιστή, να κάνετε **στο ίδιο σχήμα** τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad και \quad g(x) = \log_{1/2} x$

Στη συνέχεια να σχεδιάσετε την διαγώνιο του 1ου και του 3ου τεταρτημορίου. Τι παρατηρείτε;

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ)

1. ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ

Όταν μας δίδεται μια άσκηση που περιλαμβάνει συναρτήσεις, πρώτα απ' όλα υπολογίζουμε το πεδίο ορισμού τους, ακόμα και αν δεν το ζητάει η άσκηση.
Για να προσδιορίσουμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης παίρνουμε τους εξής περιορισμούς:

α) Παρονομαστές $\neq$ 0

π.χ. $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$, $\quad x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$. Οπότε Α=$R-\{3\}$.

β) Υπόριζη ποσότητα $\geq$ 0

π.χ. $f(x)=\sqrt{x-1},\quad x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$. Οπότε Α=[1, $+\infty$).

γ) Όρισμα λογαρίθμου > 0

π.χ. $f(x)=\ln(x+2),\quad x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$. Οπότε Α=(-2, $+\infty$).

δ) Αν υπάρχει εφx, τότε $x\neq \kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}, \kappa\in$ **Z**
Αν υπάρχει σφx, τότε $x\neq \kappa\pi,\ \kappa\in$ **Z**

π.χ. $f(x)=\varepsilon\varphi x+4,\quad x\neq \kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}, \kappa\in Z$. Οπότε Α=$\{x\in R/\ x\neq \kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}, \kappa\in Z\}$.

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}$

β) $g(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$

γ) $h(x)=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x^2-9}$

δ) $k(x)=\ln(x+4)-\dfrac{1}{x-2}$

ε) $p(x)=2\varepsilon\varphi x+\ln(x-1)$

2. Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων της παραπάνω άσκησης. Για το σκοπό αυτό να χρησιμοποιήσετε οποιοδήποτε σχεδιαστικό πρόγραμμα ή φύλλο εργασίας σε ηλεκτρονικό υπολογιστή (π.χ. Excel για Windows, ή OpenOffice για Linux).

3. Αν $f(x)=x^2-5x+6$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$. Στη συνέχεια να βρείτε σε ποια σημεία η γραφική της παράσταση τέμνει τους άξονες και να το επαληθεύσετε γραφικά (με τη βοήθεια PC).

4. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $g(x)=(x-2)(x+1)$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=\sqrt{(x-2)(x+1)}$;

2. ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμοί και ιδιότητες (Βλέπε σχολικό βιβλίο)

Μεθοδολογία

Έστω ότι μας ζητείται να προσδιορίσουμε το όριο μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0.

α) Αν το σημείο x_0 **ανήκει** στο πεδίο ορισμού, τότε κάνουμε απλή αντικατάσταση και υπολογίζουμε την τιμή της f.

β) Αν το σημείο x_0 **δεν ανήκει** στο πεδίο ορισμού, τότε δοκιμάζουμε μια από τις παρακάτω μεθόδους:

I) Αν έχουμε κλάσμα, παραγοντοποιούμε παρονομαστή και αριθμητή και κάνουμε απλοποιήσεις.

II) Αν έχουμε ρίζες, πολ/σιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση. Συζυγής παράσταση είναι η κατάλληλη παράσταση που συμπληρώνει τη γνωστή ταυτότητα

$$(α+β)(α-β)=α^2-β^2$$

ώστε να προκύψει η διαφορά τετραγώνων και να απλοποιηθούν οι ρίζες.

Π.χ. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

Πεδίο ορισμού: x>0 και $\sqrt{x}-\sqrt{2}\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\neq\sqrt{2}\Leftrightarrow x\neq 2$. Οπότε:

$A=(0,+\infty)-\{2\}=(0,2)\cup(2,+\infty)$. Συνεπώς το 2 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού.

Η συζυγής παράσταση της $\sqrt{x}-\sqrt{2}$ είναι η $\sqrt{x}+\sqrt{2}$. Άρα

$$\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\frac{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\frac{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x})^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{x-2}=\sqrt{x}+\sqrt{2}$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

$\alpha)\ \lim_{x\to 1}(x^2+3)$

$\beta)\ \lim_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}$

2. Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

$\alpha)\ \lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

$\beta)\ \lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$

$\gamma)\ \lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{x-3}$

$\delta)\ \lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$

3. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμοί και ιδιότητες (Βλέπε σχολικό βιβλίο)

Παράγωγος βασικών συναρτήσεων

1. $(c)'=0$
2. $(x)'=1$
3. $(x^{\rho})'=\rho x^{\rho-1}$
4. $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$
5. $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$
6. $(e^x)'=e^x$
7. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

Κανόνες παραγώγισης

1. $(c\cdot f)'=c\cdot f'$, όπου c: σταθερός αριθμός.
2. $(f\pm g)'=f'\pm g'$
3. $(f\cdot g)'=f'g+fg'$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Ασκήσεις

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων για τις ασκήσεις 1-8

1. $f(x) = 5\sqrt{x} - 9,\ \ g(x) = (x^3+2)^2,\ \ \left(\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^2,\ \ h(x) = \dfrac{5x^2+4x-3}{x}$

2. $f(x) = 20 - \dfrac{1}{3}x^4 + 10x,\ \ g(x) = \dfrac{x^4-2x^2+1}{x}$
3. $f(x) = (x^2+1)(x^3-2),\ \ g(x) = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$
4. $f(x) = \dfrac{x+\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x},\ \ g(x) = \dfrac{2\eta\mu x}{x}$
5. $f(x) = e^{3x},\ \ g(x) = e^{2x^2+1},\ \ h(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
6. $f(x) = \ln(x^2+1),\ \ g(x) = \dfrac{\ln x}{e^x}$
7. $f(x) = \ln^2 x,\ \ g(x) = x^2\eta\mu x$
8. $f(x) = \eta\mu(x^2+1)\sigma\upsilon\nu x,\ \ g(x) = x^2 \ln x$