ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΑΠΑΙ**ΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ**

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

- Αν Δ>0, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες: $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν Δ=0, τότε η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή: $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$
- Αν Δ<0, τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Ισχύουν οι εξής τύποι:

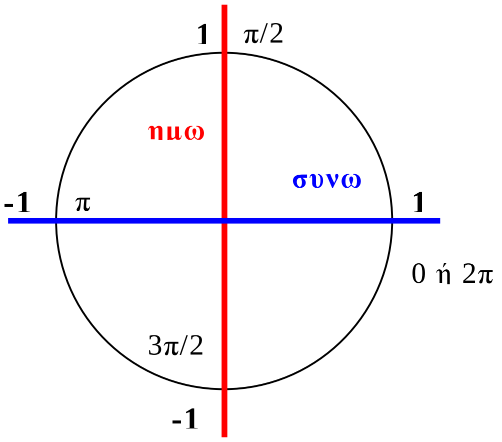
$x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}, \quad x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Εστω το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

- Αν Δ>0, τότε το τριώνυμο είναι : εκτός των ριζών ομόσημο του α
  ανάμεσα στις ρίζες ετερόσημο του α
- Αν Δ=0, τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του α (εκτός από τα σημεία που μηδενίζεται)
- Αν Δ<0, τότε το τριώνυμο είναι παντού ομόσημο του α.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ



Τριγωνομετρικός κύκλος

Ισχύουν:

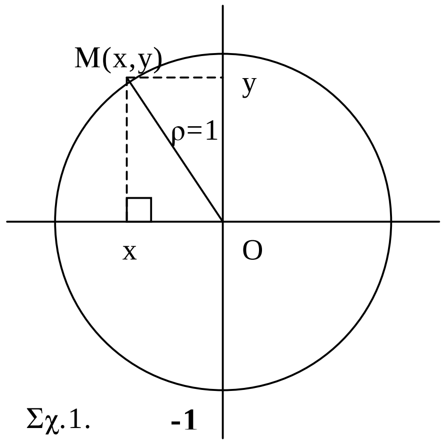
$\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega,$ $\quad$ $\varepsilon\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \varepsilon\phi\omega,$

$\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega,$ $\quad$ $\sigma\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega$

$-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$

$-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ



Σχ.1.

1) $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

Απόδειξη

Αν M(x,y) είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε

x=συνω $\quad$ και $\quad$ y=ημω

Επομένως

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = x^2 + y^2 = \rho^2 = 1^2 = 1$$

2) $\varepsilon\phi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \quad \sigma\phi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

<u>Απόδειξη</u>

Από το ίδιο σχήμα (1), έχουμε

$\varepsilon\phi\omega = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ (εφόσον $x = \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$)

$\sigma\phi\omega == \dfrac{x}{y} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ (εφόσον $y = \eta\mu\omega \neq 0$)

3) $\varepsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$

<u>Απόδειξη</u>

Από την προηγούμενη σχέση έχουμε:

$\varepsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1$

Ισχύουν επίσης:

$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \dfrac{1}{1+\varepsilon\phi^2\omega}$ και $\eta\mu^2\omega = \dfrac{\varepsilon\phi^2\omega}{1+\varepsilon\phi^2\omega}$

Τύπος μετατροπής (ακτίνια-μοίρες): $\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{\mu}{180}$

<u>Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών:</u>

Μοίρες	Ακτίνια	ημω	συνω	εφω	σφω
0	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30	π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45	π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60	π/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90	π/2	1	0	Δεν ορίζεται	0

<u>Μνημονικός κανόνας για τον παραπάνω πίνακα.</u>
Συμπληρώνουμε την στήλη του ημιτόνου ως εξής: $\sqrt{0}/2,\ \sqrt{1}/2,\ \sqrt{2}/2,\ \sqrt{3}/2,\ \sqrt{4}/2$, οπότε προκύπτουν οι τιμές που αναγράφονται.
Αντιστρέφουμε τη στήλη του ημιτόνου και την τοποθετούμε στο συνημίτονο.
Διαιρούμε το ημίτονο δια του συνημιτόνου και παίρνουμε τη στήλη της εφαπτομένης.
Αντιστρέφουμε τη στήλη της εφαπτομένης και παίρνουμε τη στήλη της συνεφαπτομένης.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

$$\etaμ(-x)=-\etaμx \qquad \etaμ(\pi-x)=\etaμx \qquad \etaμ(\pi+x)=-\etaμx$$
$$συν(-x)=συνx \qquad συν(\pi-x)=-συνx \qquad συν(\pi+x)=-συνx$$
$$εφ(-x)=-εφx \qquad εφ(\pi-x)=-εφx \qquad εφ(\pi+x)=εφx$$
$$σφ(-x)=-σφx \qquad σφ(\pi-x)=-σφx \qquad σφ(\pi+x)=σφx$$

$$ημ(\frac{\pi}{2}-x)=συνx$$
$$συν(\frac{\pi}{2}-x)=ημx$$
$$εφ(\frac{\pi}{2}-x)=σφx$$
$$σφ(\frac{\pi}{2}-x)=εφx$$

Μνημονικός κανόνας:
α) Ελέγχουμε το πρόσημο του αποτελέσματος ανάλογα με το τεταρτημόριο του αρχικού τόξου. Π.χ. το (π-x) βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο, αφού από το π αφαιρούμε τόξο.
β) Αν το αρχικό τόξο έχει μέσα στην παρένθεση $\frac{\pi}{2}$ ή $\frac{3\pi}{2}$ (90^o ή 270^o αντίστοιχα) τότε ο τριγωνομετρικός αριθμός αλλάζει. Π.χ. το $ημ(\frac{\pi}{2}-x)$ θα γίνει **συνx**.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$ημx = ημθ \Leftrightarrow x = 2κ\pi + θ$$
$$x = 2κ\pi + \pi - θ,\ κ \in Z$$
$$συνx = συνθ \Leftrightarrow x = 2κ\pi \pm θ,\ κ \in Z$$
$$εφx = εφθ \Leftrightarrow x = κ\pi + θ,\ κ \in Z$$
$$σφx = σφθ \Leftrightarrow x = κ\pi + θ,\ κ \in Z$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΓΩΝΙΩΝ

$$\text{συν}(\alpha-\beta)=\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta$$
$$\text{συν}(\alpha+\beta)=\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta$$
$$\text{ημ}(\alpha-\beta)=\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha$$
$$\text{ημ}(\alpha+\beta)=\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha$$

$$\text{εφ}(\alpha+\beta)=\frac{\text{εφ}\alpha+\text{εφ}\beta}{1-\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta} \qquad \text{σφ}(\alpha+\beta)=\frac{\text{σφ}\alpha\,\text{σφ}\beta-1}{\text{σφ}\beta+\text{σφ}\alpha}$$

$$\text{εφ}(\alpha-\beta)=\frac{\text{εφ}\alpha-\text{εφ}\beta}{1+\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta} \qquad \text{σφ}(\alpha-\beta)=\frac{\text{σφ}\alpha\,\text{σφ}\beta+1}{\text{σφ}\beta-\text{σφ}\alpha}$$

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ 2α

$$\text{ημ}2\alpha=2\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\alpha$$
$$\text{συν}2\alpha=\text{συν}^2\alpha-\text{ημ}^2\alpha$$
$$=2\text{συν}^2\alpha-1$$
$$=1-2\text{ημ}^2\alpha$$
$$\text{εφ}2\alpha=\frac{2\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha}$$

$$\text{ημ}^2\alpha=\frac{1-\text{συν}2\alpha}{2} \qquad \text{συν}^2\alpha=\frac{1+\text{συν}2\alpha}{2}$$
$$\text{εφ}^2\alpha=\frac{1-\text{συν}2\alpha}{1+\text{συν}2\alpha}$$

Παρατήρηση: Ισχύουν επίσης:

$$\text{ημ}\alpha=2\text{ημ}\frac{\alpha}{2}\text{συν}\frac{\alpha}{2}$$
$$\text{συν}\alpha=\text{συν}^2\frac{\alpha}{2}-\text{ημ}^2\frac{\alpha}{2}$$
$$=2\text{συν}^2\frac{\alpha}{2}-1$$
$$=1-2\text{ημ}^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\text{εφ}\alpha=\frac{2\text{εφ}\frac{\alpha}{2}}{1-\text{εφ}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{ημ}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\text{συν}\alpha}{2} \qquad \text{συν}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\text{συν}\alpha}{2}$$
$$\text{εφ}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\text{συν}\alpha}{1+\text{συν}\alpha}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

$$2\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta=\text{ημ}(\alpha+\beta)+\text{ημ}(\alpha-\beta)$$
$$2\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta=\text{συν}(\alpha-\beta)+\text{συν}(\alpha+\beta)$$
$$2\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta=\text{συν}(\alpha-\beta)-\text{συν}(\alpha+\beta)$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$
$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu\frac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$$
$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$
$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = -2\eta\mu\frac{A-B}{2}\eta\mu\frac{A+B}{2}$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Νόμος ημιτόνων: $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$

Νόμος συνημιτόνων:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$
$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu \Gamma$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί των α+β, α-β

Α΄ Ομάδα

1) Αν $\eta\mu\alpha = \frac{4}{5}$ με $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ και $\eta\mu\beta = -\frac{5}{13}$ με $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α+β.

2) Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu(45-x)\sigma\upsilon\nu(45-y) - \eta\mu(45-x)\eta\mu(45-y) = \eta\mu(x+y)$.

3) Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right) + 2\eta\mu x = 0$.

4) Να λύσετε τις εξισώσεις στο διάστημα [0,2π)

i) $\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\eta\mu x$ ii) $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

Β΄ Ομάδα

1) Αν συνx+συνy=α και ημx+ημy=β, να υπολογισθεί το συν(x-y)

2) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\varepsilon\varphi^2 2x - \varepsilon\varphi^2 x}{1 - \varepsilon\varphi^2 2x \cdot \varepsilon\varphi^2 x} = \varepsilon\varphi 3x \cdot \varepsilon\varphi x$

3) Αν α+β=π/4, να αποδείξετε ότι: (1+εφα)(1+εφβ)=2.

4) Να αποδείξετε ότι: εφα+εφ2α-εφ3α+εφαεφ2αεφ3α=0.

5) α) Αν α+β+γ=π, να αποδείξετε ότι: $συν^2α+συν^2β+συν^2γ+2συνασυνβσυνγ=1$

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $συν^2Α+συν^2Β+συν^2Γ=1$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

6) Να λύσετε την εξίσωση: $εφ\left(\frac{π}{4}-x\right)-εφ\left(\frac{π}{4}+x\right)=-2\sqrt{3}$ στο διάστημα $[0,2π)$.

7) Να αποδείξετε ότι η παράσταση: $y=συν^2x+συν^2(x+α)-2συνασυνxσυν(x+α)$ είναι ανεξάρτητη από το x.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί του 2α

1) Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ημ2α}{1+συν2α}=εφα$, β) $\frac{ημ2α}{1-συν2α}\cdot\frac{1-συνα}{συνα}=εφ\frac{α}{2}$

2) Να αποδείξετε ότι: $εφ\left(\frac{π}{4}-x\right)=\frac{συν2x}{1+ημ2x}$

3) Να αποδείξετε ότι: $ημ^4\frac{π}{8}+ημ^4\frac{3π}{8}=\frac{3}{4}$

4) Αν $συνα=\frac{x}{y+ω}$, $συνβ=\frac{y}{ω+x}$ και $συνγ=\frac{ω}{x+y}$, να αποδείξετε ότι: $εφ^2\frac{α}{2}+εφ^2\frac{β}{2}+εφ^2\frac{γ}{2}=1$.

5) Να αποδείξετε ότι:

α) $(συνx-συνy)^2+(ημx-ημy)^2=4ημ^2\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

β) $σφ2α=\frac{σφ^2α-1}{2σφα}$ $\left(α\neq\frac{κπ}{2}\right)$

6) Αν $εφ^2β=1+2εφ^2α$, να δείξετε ότι: $συν2α=1+2συν2β$.

7) Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $συν2x+2ημ^2\frac{x}{2}=0$ β) $1+συνx=6ημ^2\frac{x}{2}$

8) Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $συν2x+2ημx=1$ β) $συνx=3συν\frac{x}{2}-2$ γ) $1+ημx+συνx+ημ2x+συν2x=0$.

9) Αν $x\in\left(0,\frac{π}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι: $1+εφx<εφ\left(\frac{π}{2}+\frac{x}{2}\right)$.

10) Να αποδείξετε ότι: i) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\varepsilon\varphi 2x$ ii) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$.

11) Να αποδείξετε ότι: i) $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\eta\mu 2x$ ii) $1-2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\eta\mu x$.

12) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu\frac{x}{2}+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu x}=\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$.

13) Να αποδείξετε ότι:

i) $(\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y)^2+(\eta\mu x+\eta\mu y)^2=4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x-y}{2}\right)$

ii) $(\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y)^2+(\eta\mu x-\eta\mu y)^2=4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Βιβλιογραφία

1. Μεϊντάνης Ι., 1983, «Μαθηματικά της Β' Λυκείου», εκδ. Παπαδημητρόπουλου.

2. Μπαραλός Γ., «Άλγεβρα Β' Λυκείου», εκδ. Παπαδημητρόπουλου