

Functional limit theorems for the Polya and q -Polya urns

Δημήτρης Χελιώτης

ΕΚΠΑ

Από κοινού δουλειά με τη Δρ. Δήμητρα Κουλουμπού
25 Φεβρουαρίου 2022

Το βασικό υπόδειγμα

$(X_i)_{i \geq 1}$: i.i.d με $E(X_1) = 0, \text{Var}(X_1) = 1$.

$$S_k := X_1 + \cdots + X_k$$

Νόμος μεγάλων αριθμών: Με πιθανότητα 1, για $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow 0$$

Κεντρικό οριακό θεώρημα:

$$\sqrt{n} \frac{S_n}{n} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

Θεώρημα Donsker. Συναρτησιακό ΚΟΘ:

$$\left(\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \right)_{t \geq 0} \Rightarrow (W_t)_{t \geq 0} \leftarrow \text{κίνηση Brown}$$

Μεγάλες αποκλίσεις:

Για την (S_n/n) . Θεώρημα Cramer.

Συναρτησιακές μεγάλες αποκλίσεις:

Για την $(S_{[nt]}/n)_{t \in [0,1]}$, $n \geq 1$. Θεώρημα Mogulskii.

Η κάλπη Pólya

Κάλπη με λευκά και μαύρα σφαιρίδια

Βήμα 1: Επιλέγουμε στην τύχη ένα σφαιρίδιο.

Βήμα 2: Το επιστρέφουμε στην κάλπη μαζί με ένα του ίδιου χρώματος.

Η κάλπη Pólya

Κάλπη με λευκά και μαύρα σφαιρίδια

Βήμα 1: Επιλέγουμε στην τύχη ένα σφαιρίδιο.

Βήμα 2: Το επιστρέφουμε στην κάλπη μαζί με ένα του ίδιου χρώματος.

Οριακή συμπεριφορά

r : αρχικός αριθμός λευκών σφαιριδίων

s : αρχικός αριθμός μαύρων σφαιριδίων

A_n : αριθμός λευκών σφαιριδίων n βήματα μετά

B_n : αριθμός μαύρων σφαιριδίων n βήματα μετά

Η κάλπη Pólya

Κάλπη με λευκά και μαύρα σφαιρίδια

Βήμα 1: Επιλέγουμε στην τύχη ένα σφαιρίδιο.

Βήμα 2: Το επιστρέφουμε στην κάλπη μαζί με ένα του ίδιου χρώματος.

Οριακή συμπεριφορά

r : αρχικός αριθμός λευκών σφαιριδίων

s : αρχικός αριθμός μαύρων σφαιριδίων

A_n : αριθμός λευκών σφαιριδίων n βήματα μετά

B_n : αριθμός μαύρων σφαιριδίων n βήματα μετά

$$\frac{A_n}{A_n + B_n} \rightarrow L \sim \text{Beta}(r, s)$$

για $n \rightarrow \infty$ με πιθανότητα 1.

Ένα εύκολο συναρτησιακό οριακό θεώρημα:

Έστω $Y_i := \mathbf{1}_{\text{επιλέγουμε λευκό στην } i \text{ εξαγωγή}}$

$$\{(Y_i)_{i \geq 1} | L\} = i.i.d. \text{ Bernoulli}(L)$$

$$A_n = r + Y_1 + \cdots + Y_n$$

Ισχύει

$$\sqrt{n} \left(\frac{A_{[nt]}}{nt} - L \right) \Rightarrow (W_{\lambda/t})_{t \geq 0}, \lambda := L'(1 - L')$$

Άλλου τύπου συναρτησιακά οριακά θεωρήματα

Για κάθε $m \in \mathbb{N}^+$ άλλη κάλπη

$A_0^{(m)}$: αρχικός αριθμός λευκών σφαιριδίων

$B_0^{(m)}$: αρχικός αριθμός μαύρων σφαιριδίων

$A_n^{(m)}$: αριθμός λευκών σφαιριδίων n βήματα μετά

$B_n^{(m)}$: αριθμός μαύρων σφαιριδίων n βήματα μετά

Μελέτη του μονοπατιού $(A_n^{(m)})_{n \geq 1}$ για $m \rightarrow \infty$

Υπόθεση: $\frac{B_0^{(m)}}{m} \rightarrow b \in (0, \infty)$

Άλλου τύπου συναρτησιακά οριακά θεωρήματα

Για κάθε $m \in \mathbb{N}^+$ άλλη κάλπη

$A_0^{(m)}$: αρχικός αριθμός λευκών σφαιριδίων

$B_0^{(m)}$: αρχικός αριθμός μαύρων σφαιριδίων

$A_n^{(m)}$: αριθμός λευκών σφαιριδίων n βήματα μετά

$B_n^{(m)}$: αριθμός μαύρων σφαιριδίων n βήματα μετά

Μελέτη του μονοπατιού $(A_n^{(m)})_{n \geq 1}$ για $m \rightarrow \infty$

Υπόθεση: $\frac{B_0^{(m)}}{m} \rightarrow b \in (0, \infty)$

Σενάρια για το $A_0^{(m)}$:

(α) $A_0^{(m)} = a_0$ ανεξάρτητο του m

(β) $g_m := A_0^{(m)} \rightarrow \infty, \frac{g_m}{m} \rightarrow 0$

(γ) $\frac{A_0^{(m)}}{m} \rightarrow a > 0$

Θεώρημα 1: Αν $A_0^{(m)} = a_0 \in \mathbb{N}^+$ και $B_0^{(m)}/m \rightarrow b \in (0, \infty)$, τότε

$$A_{[mt]}^{(m)} - A_0^{(m)} \Rightarrow Z_t, t \geq 0$$

Z : ανέλιξη γεννήσεως με ρυθμό $\lambda_{t,j} := (j + a_0)/(t + b)$ για $(t, j) \in [0, \infty) \times \mathbb{N}$.

Ρυθμός: $\mathbf{P}(Z_{t+h} = j + 1 | Z_t = j) = \lambda_{t,j}h + o(h)$

Θεώρημα 1: Αν $A_0^{(m)} = a_0 \in \mathbb{N}^+$ και $B_0^{(m)}/m \rightarrow b \in (0, \infty)$, τότε

$$A_{[mt]}^{(m)} - A_0^{(m)} \Rightarrow Z_t, t \geq 0$$

Z : ανέλιξη γεννήσεως με ρυθμό $\lambda_{t,j} := (j + a_0)/(t + b)$ για $(t, j) \in [0, \infty) \times \mathbb{N}$.

Ρυθμός: $\mathbf{P}(Z_{t+h} = j + 1 | Z_t = j) = \lambda_{t,j}h + o(h)$

Θεώρημα 2: Αν $A_0^{(m)} = g_m \rightarrow \infty, g_m = o(m)$ και $B_0^{(m)}/m \rightarrow b \in (0, \infty)$ τότε

$$A_{[mt/g_m]}^{(m)} - A_0^{(m)} \Rightarrow Z_t, t \geq 0$$

Z : ανέλιξη γεννήσεως με ρυθμό $\lambda_{t,j} := 1/b$ για $(t, j) \in [0, \infty) \times \mathbb{N}$. Δηλ. Poisson.

Στρατηγική της απόδειξης στα Θεωρ. 1 και 2:

Βήμα 1: Σύγκλιση των κατανομών πεπερασμένης διάστασης

Βήμα 2: Σφιχτότητα στον χώρο $D_{\mathbb{R}}[0, \infty)$

$$Z_t^{(m)} := A_{[mt]}^{(m)} - A_0^{(m)} \xrightarrow{?} Z_t$$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Z_{t_1}^{(m)} = k_1, Z_{t_2}^{(m)} = k_2, \dots, Z_{t_r}^{(m)} = k_r) \\ = \mathbf{P}(Z_{t_1} = k_1, Z_{t_2} = k_2, \dots, Z_{t_r} = k_r) \end{aligned}$$

Λόγω Markov, αρκεί $Z_0^{(m)} \Rightarrow Z_0$ και

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Z_{t_2}^{(m)} = k_2 | Z_{t_1}^{(m)} = k_1) = \mathbf{P}(Z_{t_2} = k_2 | Z_{t_1} = k_1)$$

Π.χ., στο Θεώρημα 1. Έστω $n = [mt_2] - [mt_1]$.

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(A_{[mt_2]}^{(m)} = k_2 + a_0 | A_{[mt_1]}^{(m)} = k_1 + a_0) \\ &= \binom{n}{x} \frac{\sigma(\sigma+1) \cdots (\sigma+(x-1)) \tau(\tau+1) \cdots (\tau+(n-x-1))}{(\sigma+\tau)(\sigma+\tau+1) \cdots (\sigma+\tau+(n-1))} \\ &= \frac{(n)_x}{x!} \frac{\sigma^{(x)} \tau^{(n-x)}}{(\sigma+\tau)^{(n)}} = \frac{(n)_x}{x!} \sigma^{(x)} \frac{\Gamma(\tau+n-x)}{\Gamma(\tau)} \frac{\Gamma(\sigma+\tau)}{\Gamma(\sigma+\tau+n)} \end{aligned}$$

$\sigma := a_0 + k_1,$ λευκά τον χρόνο $[mt_1]$

$\tau := [mt_1] - k_1 + B_0^{(m)}$ μαύρα τον χρόνο $[mt_1]$

$x := k_2 - k_1$ λευκές εξαγωγές από $[mt_1] + 1$ ως $[mt_2]$

Π.χ., στο Θεώρημα 1. Έστω $n = [mt_2] - [mt_1]$.

$$\begin{aligned} P(A_{[mt_2]}^{(m)} = k_2 + a_0 | A_{[mt_1]}^{(m)} = k_1 + a_0) \\ = \binom{n}{x} \frac{\sigma(\sigma+1) \cdots (\sigma+(x-1)) \tau(\tau+1) \cdots (\tau+(n-x-1))}{(\sigma+\tau)(\sigma+\tau+1) \cdots (\sigma+\tau+(n-1))} \\ = \frac{(n)_x}{x!} \frac{\sigma^{(x)} \tau^{(n-x)}}{(\sigma+\tau)^{(n)}} = \frac{(n)_x}{x!} \sigma^{(x)} \frac{\Gamma(\tau+n-x)}{\Gamma(\tau)} \frac{\Gamma(\sigma+\tau)}{\Gamma(\sigma+\tau+n)} \end{aligned}$$

$\sigma := a_0 + k_1$, λευκά τον χρόνο $[mt_1]$

$\tau := [mt_1] - k_1 + B_0^{(m)}$ μαύρα τον χρόνο $[mt_1]$

$x := k_2 - k_1$ λευκές εξαγωγές από $[mt_1] + 1$ ως $[mt_2]$

Όριο για $m \rightarrow \infty$

$$\binom{x+\sigma-1}{x} \left(\frac{t_2-t_1}{t_2+b_0} \right)^x \left(1 - \frac{t_2-t_1}{t_2+b_0} \right)^\sigma$$

Αρνητική διωνυμική: Αριθμός αποτυχιών ως την σ επιτυχία.

Θεώρημα 3: Αν $A_0^{(m)}/m \rightarrow a$ και $B_0^{(m)}/m \rightarrow b$, $a + b > 0$, τότε

$$A_{[mt]}^{(m)}/m \xrightarrow{\mathbf{P}} X_t, t \geq 0$$

$$X_t := a + t \frac{a}{a+b}.$$

Θεώρημα 3: Αν $A_0^{(m)}/m \rightarrow a$ και $B_0^{(m)}/m \rightarrow b$, $a + b > 0$, τότε

$$A_{[mt]}^{(m)}/m \xrightarrow{\mathbf{P}} X_t, t \geq 0$$

$$X_t := a + t \frac{a}{a+b}.$$

Χοντρικά, τον χρόνο mt έχουμε περίπου $am + mt \frac{a}{a+b}$ λευκά σφαιρίδια.

Επόμενο: Η απόκλιση από το όριο

$$C_t^{(m)} := \sqrt{m} \left(\frac{A_{[mt]}^{(m)}}{m} - X_t \right)$$

Επόμενο: Η απόκλιση από το όριο

$$C_t^{(m)} := \sqrt{m} \left(\frac{A_{[mt]}^{(m)}}{m} - X_t \right)$$

Θεώρημα 4: Αν $A_0^{(m)} = [am + \theta_1 \sqrt{m}]$ και $B_0^{(m)} = [bm + \theta_2 \sqrt{m}]$,
 $a + b > 0$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ τότε

$$C_t^{(m)} \Rightarrow Y_t, t \geq 0$$

$$Y_t = \theta_1 + \frac{b\theta_1 - a\theta_2}{(a+b)^2} t + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} (a+b+t) \int_0^t \frac{1}{a+b+s} dW_s$$

W : τυπική κίνηση Brown

Στρατηγική της απόδειξης στα Θεωρ. 3 και 4:

$(Z_n^{(m)})_{n \geq 1}$ αλυσίδα Markov στο $\mathbb{R}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$

$(Z_t)_{t \in [0, \infty)}$ διάχυση

Θέλουμε

$$(Z_{[mt]}^{(m)})_{t \geq 0} \Rightarrow (Z_t)_{t \geq 0}$$

για $m \rightarrow \infty$

Μονάδα χρόνου το $1/m$. Συγκρίνουμε προσαυξήσεις.

$$\Delta Z_n^{(m)} := Z_{n+1}^{(m)} - Z_n^{(m)}$$

Έστω ότι για $m \rightarrow \infty$

$Z_0^{(m)} \rightarrow x_0$ σχεδόν βέβαια

$$\mathbf{E}(\Delta Z_n^{(m)} | Z_n^{(m)} = x) \sim \frac{1}{m} \mu(x, t)$$

$$\mathbf{E}((\Delta Z_n^{(m)})^2 | Z_n^{(m)} = x) \sim \frac{1}{m} a(x, t)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, με $t = n \times (1/m)$.

Έστω ότι για $m \rightarrow \infty$

$$Z_0^{(m)} \rightarrow x_0 \text{ σχεδόν βέβαια}$$

$$\mathbf{E}(\Delta Z_n^{(m)} | Z_n^{(m)} = x) \sim \frac{1}{m} \mu(x, t)$$

$$\mathbf{E}((\Delta Z_n^{(m)})^2 | Z_n^{(m)} = x) \sim \frac{1}{m} a(x, t)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, με $t = n \times (1/m)$.

Τότε η ανέλιξη $\left(Z_{[mt]}^{(m)} \right)_{t \geq 0}$ συγκλίνει στη λύση της ΣΔΕ

$$dZ_t = \mu(Z_t, t) dt + \sqrt{a(Z_t, t)} dW_t$$

$$Z_0 = x_0$$

Κάλπη q -Pólya

Έστω $q \in (0, 1)$

Για $x \in \mathbb{R}$

$$[x]_q := \frac{q^x - 1}{q - 1}$$

το q -ανάλογο του x . $[x]_q \rightarrow x$ για $q \rightarrow 1$.

Κάλπη q -Pólya

Έστω $q \in (0, 1)$

Για $x \in \mathbb{R}$

$$[x]_q := \frac{q^x - 1}{q - 1}$$

το q -ανάλογο του x . $[x]_q \rightarrow x$ για $q \rightarrow 1$.

Κάλπη με r λευκά και s μαύρα σφαιρίδια. Επιλέγουμε στην τύχη χρώμα με τον εξής κανόνα

$$P_q(\text{λευκό}) = \frac{[r]_q}{[r+s]_q} = \frac{1 - q^r}{1 - q^{r+s}}$$

$$P_q(\text{μαύρο}) = q^r \frac{[s]_q}{[r+s]_q}$$

Έπειτα, προσθέτουμε στην κάλπη ένα σφαιρίδιο αυτού του χρώματος.

Πείραμα που πραγματοποιεί τον κανόνα.

Βάζουμε τα σφαιρίδια σε σειρά $1, 2, \dots, r + s$, πρώτα τα λευκά, μετά τα μαύρα. Τα επισκεπτόμαστε με τη σειρά και κάθε σφαιρίδιο επιλέγεται με πιθανότητα $1 - q$. Κάποια στιγμή θα επιλεγεί ένα σφαιρίδιο.

$$\begin{aligned} P(\text{επιλ. λευκό}) &= \overbrace{(1 - q^r)}^{\text{πρώτο πέρασμα}} + \overbrace{q^{r+s}(1 - q^r)}^{\text{δεύτερο πέρασμα}} + q^{2(r+s)}(1 - q^r) + \dots \\ &= (1 - q^r) \sum_{j=0}^{\infty} (q^{r+s})^j = \frac{1 - q^r}{1 - q^{r+s}} \end{aligned}$$

Θεώρημα Έστω $q \in (0, 1)$

$X_n = \# \text{εξαγωγών μαύρων σφαιριδίων στις πρώτες } n \text{ εξαγωγές}$

Με πιθανότητα 1 η X_n είναι τελικά σταθερή.

Η $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \begin{bmatrix} r + x - 1 \\ x \end{bmatrix}_q q^{sx} \prod_{j=1}^r (1 - q^s q^{j-1})$$

για κάθε $x \in \mathbb{N}$. Αρνητική q -διωνυμική δευτέρου είδους με παραμέτρους r, q^s, q .

Θεώρημα Έστω $q \in (0, 1)$

$X_n = \# \text{εξαγωγών μαύρων σφαιριδίων στις πρώτες } n \text{ εξαγωγές}$

Με πιθανότητα 1 η X_n είναι τελικά σταθερή.

Η $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \begin{bmatrix} r + x - 1 \\ x \end{bmatrix}_q q^{sx} \prod_{j=1}^r (1 - q^s q^{j-1})$$

για κάθε $x \in \mathbb{N}$. Αρνητική q -διωνυμική δευτέρου είδους με παραμέτρους r, q^s, q .

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[x]_q [x-1]_q \cdots [x-k+1]_q}{[1]_q [2]_q \cdots [k]_q}$$

Απλό επιχείρημα για το $\mathbf{P}(X < \infty) = 1$

Υποθέτουμε $r \geq 1, s = \infty$

B_n = αριθμός λευκών μετά n εξαγωγές

$$B_n \geq Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

Y_i : i.i.d. Bernoulli($1 - q$)

E_n : μαύρο στη n -οστή εξαγωγή

$$\mathbf{P}(E_{n+1}) = \mathbf{E}(\mathbf{P}(E_{n+1}|B_n)) = \mathbf{E}(q^{B_n}) \leq (\mathbf{E}(q^{Y_1}))^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(E_n) < \infty$$

Ευχαριστώ!