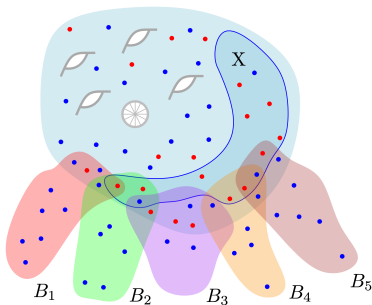


Μετρώντας Τέλεια Ταιριάσματα σε Γραφήματα

Δημήτριος Μ. Θηλυκός



Παραμένουσα & ορίζουσα

Έστω $A = (a_{i,j})$ 0-1 $n \times n$ πίνακας

$$\text{παρ}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \quad \text{και} \quad \text{όρ}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \right)$$

Παραμένουσα & ορίζουσα

Έστω $A = (a_{i,j})$ 0-1 $n \times n$ πίνακας

$$\text{παρ}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \quad \text{και} \quad \text{όρ}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \right)$$

Το πρόβλημα της παραμένουσας του György Pólya (1913):

μπορούμε να **αλλάξουμε** τα πρόσημα κάποιων τιμών του A έτσι ώστε $\text{παρ}(A) = \text{όρ}(A_{\text{new}})$;

Παραμένουσα & ορίζουσα

Έστω $A = (a_{i,j})$ 0-1 $n \times n$ πίνακας

$$\text{παρ}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \quad \text{και} \quad \text{όρ}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \right)$$

Το πρόβλημα της παραμένουσας του György Pólya (1913):

μπορούμε να **αλλάξουμε** τα πρόσημα κάποιων τιμών του A έτσι ώστε $\text{παρ}(A) = \text{όρ}(A_{\text{new}})$;

Γιατί η παραμένουσα; ο αριθμός των τέλειων ταιριασμάτων ενός διμμερούς γραφήματος B είναι ίσος με $\text{παρ}(A_B)$, όπου A_B είναι ο διπροσπίπτον πίνακας του B .

Παραμένουσα & ορίζουσα

Έστω $A = (a_{i,j})$ 0-1 $n \times n$ πίνακας

$$\text{παρ}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \quad \text{και} \quad \text{όρ}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \right)$$

Το πρόβλημα της παραμένουσας του György Pólya (1913):

μπορούμε να **αλλάξουμε** τα πρόσημα κάποιων τιμών του A έτσι ώστε $\text{παρ}(A) = \text{όρ}(A_{\text{new}})$;

Γιατί η παραμένουσα; ο αριθμός των τέλειων ταιριασμάτων ενός διμμερούς γραφήματος B είναι ίσος με $\text{παρ}(A_B)$, όπου A_B είναι ο διπροσπίπτον πίνακας του B .

Το πρόβλημα #ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ:

Δεδομένου γραφήματος G , ποιά είναι το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του;

Παραμένουσα & ορίζουσα

Έστω $A = (a_{i,j})$ 0-1 $n \times n$ πίνακας

$$\text{παρ}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \quad \text{και} \quad \text{όρ}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \right)$$

Το πρόβλημα της παραμένουσας του György Pólya (1913):

μπορούμε να **αλλάξουμε** τα πρόσημα κάποιων τιμών του A έτσι ώστε $\text{παρ}(A) = \text{όρ}(A_{\text{new}})$;

Γιατί η παραμένουσα; ο αριθμός των τέλειων ταιριασμάτων ενός διμμερούς γραφήματος B είναι ίσος με $\text{παρ}(A_B)$, όπου A_B είναι ο διπροσπίπτον πίνακας του B .

Το πρόβλημα #ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ:

Δεδομένου γραφήματος G , ποιό είναι το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του;

[Kasteleyn 1961,1963]+[Temperley & Fisher 1963]: η μέθοδος FKT: το πρόβλημα #ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο στα επίπεδα γραφήματα

Παραμένουσα & ορίζουσα

Έστω $A = (a_{i,j})$ 0-1 $n \times n$ πίνακας

$$\text{παρ}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \quad \text{και} \quad \text{όρ}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \right)$$

Το πρόβλημα της παραμένουσας του György Pólya (1913):

μπορούμε να αλλάξουμε τα πρόσημα κάποιων τιμών του A έτσι ώστε $\text{παρ}(A) = \text{όρ}(A_{\text{new}})$;

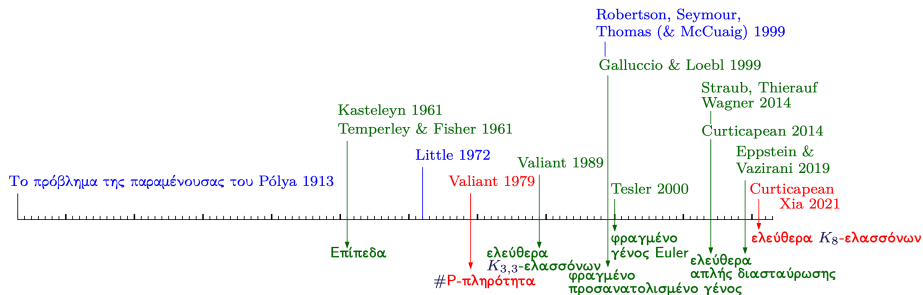
Γιατί η παραμένουσα; ο αριθμός των τέλειων ταιριασμάτων ενός διμμερούς γραφήματος B είναι ίσος με $\text{παρ}(A_B)$, όπου A_B είναι ο διπροσπίπτον πίνακας του B .

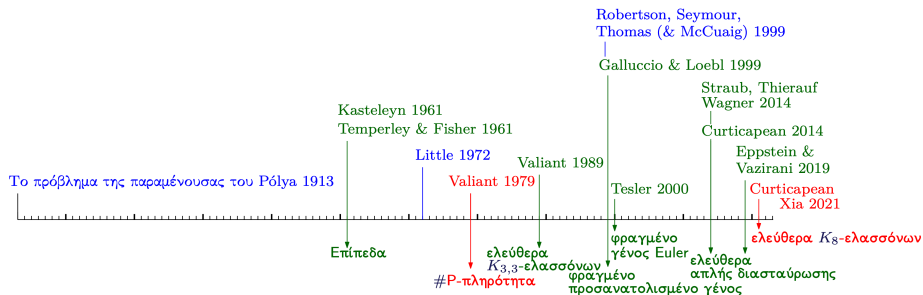
Το πρόβλημα #ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ:

Δεδομένου γραφήματος G , ποιό είναι το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του;

[Kasteleyn 1961,1963]+[Temperley & Fisher 1963]: η μέθοδος FKT: το πρόβλημα #ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο στα επίπεδα γραφήματα

- ▷ Το το πρόβλημα των «dimmer» στην Θεωρητική Φυσική (κρυσταλικά πλέγματα)
- ▷ Θεωρία Φαφριανών (Pfaffian) Προσανατολισμών
- ▷ Ορισμός #P-πληρότητας του Valiant (1979)

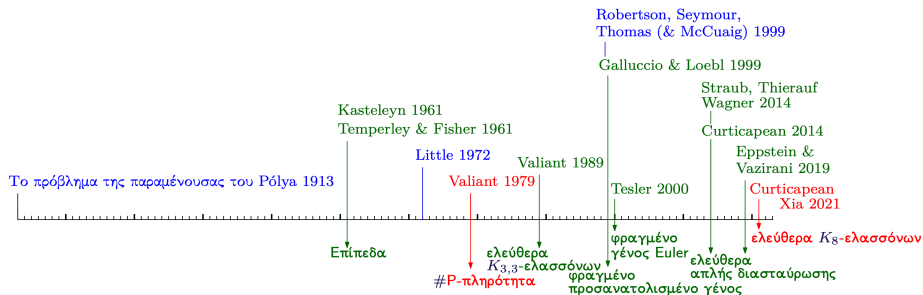




Γραφήματα απλής διασταύρωσης: εμβαπτίζονται στο επίπεδο με το πολύ μια διασταύρωση.

Εναλλακτικά: γραφήματα που είναι ελάσσονα του $\Gamma_k =$



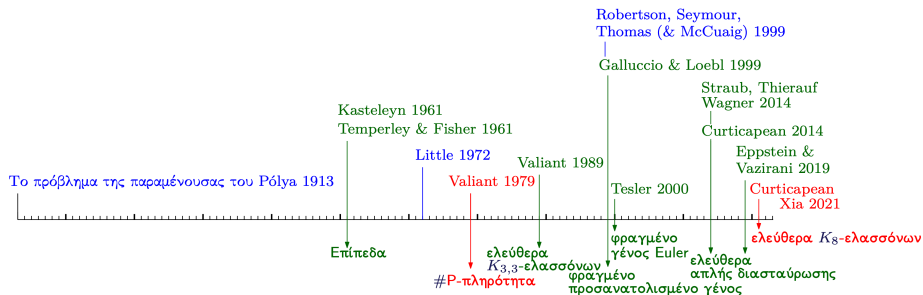


Γραφήματα απλής διασταύρωσης: εμβαπτίζονται στο επίπεδο με το πολύ μια διασταύρωση.

Εναλλακτικά: γραφήματα που είναι ελάσσονα του $\Gamma_k =$



#ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ($\mathcal{F}$): #ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ σε γραφήματα ελεύθερα $\mathcal{F}$ -ελασσόνων



Γραφήματα απλής διασταύρωσης: εμβαπτίζονται στο επίπεδο με το πολύ μια διασταύρωση.

Εναλλακτικά: γραφήματα που είναι ελάσσονα του $\Gamma_k =$

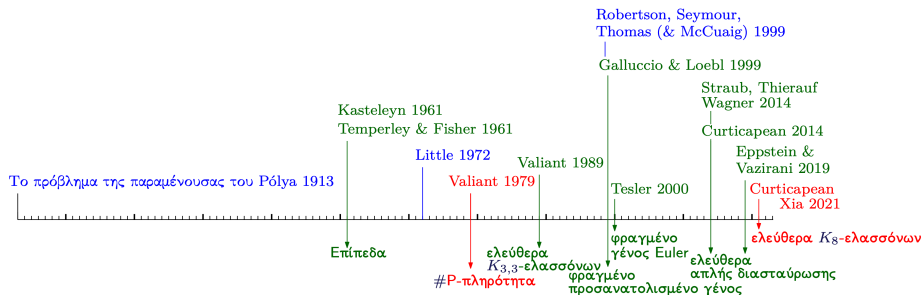


$\# \text{ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ}(\mathcal{F})$: $\# \text{ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ}$ σε γραφήματα ελεύθερα $\mathcal{F}$ -ελασσόνων

[Kasteleyn]: $\# \text{ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ}(\{K_5, K_{3,3}\}) \in \text{P}$.

[Valiant]: $\# \text{ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ}(\{K_5\}) \in \text{P}$.

[Eppstein, Vazirani], [Curticapean], [Straub, Thierauf, Wagner]: $(\{\# \text{ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ}(\{\Gamma_k\})\}) \in \text{P}$.



Γραφήματα απλής διασταύρωσης: εμβαπτίζονται στο επίπεδο με το πολύ μια διασταύρωση.

Εναλλακτικά: γραφήματα που είναι ελάσσονα του $\Gamma_k =$



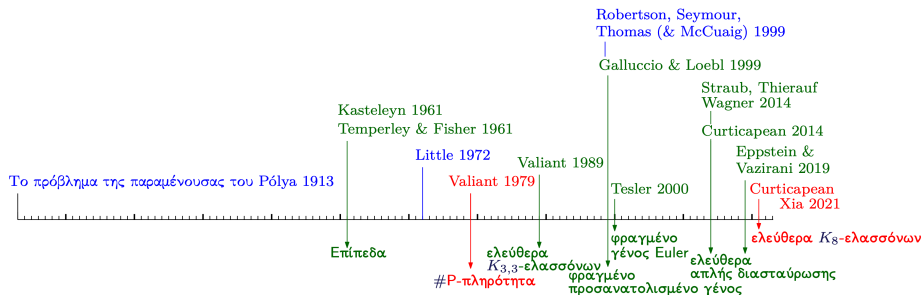
#ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ($\mathcal{F}$): #ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ σε γραφήματα ελεύθερα $\mathcal{F}$ -ελασσόνων

[Kasteleyn]: #ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ($\{K_5, K_{3,3}\}$) $\in$ P.

[Valiant]: #ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ($\{K_5\}$) $\in$ P.

[Epstein, Vazirani], [Curticapean], [Straub, Thierauf, Wagner]: ($\{\#ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\{\Gamma_k\})\} \in$ P.

[Curticapean & Xia]: #ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ ($\{K_8\}$) είναι #P-πλήρες.



Γραφήματα απλής διασταύρωσης: εμβαπτίζονται στο επίπεδο με το πολύ μια διασταύρωση.

Εναλλακτικά: γραφήματα που είναι ελάσσονα του $\Gamma_k =$



#ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ($\mathcal{F}$): #ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ σε γραφήματα ελεύθερα $\mathcal{F}$ -ελασσόνων

[Kasteleyn]: $\#ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\{K_5, K_{3,3}\}) \in P$.

[Valiant]: $\#ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\{K_5\}) \in P$.

[Epstein, Vazirani], [Curticapean], [Straub, Thierauf, Wagner]: $(\{\#ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\{\Gamma_k\})\}) \in P$.

[Curticapean & Xia]: $\#ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\{K_8\})$ είναι $\#P$ -πλήρες.

Ερώτημα: τί συμβαίνει «ενδιάμεσα»;

Ερωτήσεις και απαντήσεις

Ερώτημα: Ποιά είναι η πολυπλοκότητα μέτρησης του $\# \text{ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ}(\{K_6\})$;
Ποιά είναι η πολυπλοκότητα μέτρησης του $\# \text{ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ}(\{K_7\})$;

Ερωτήσεις και απαντήσεις

Ερώτημα: Ποιά είναι η πολυπλοκότητα μέτρησης του $\#TEΛΕΙΟ\ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\{K_6\})$;
Ποιά είναι η πολυπλοκότητα μέτρησης του $\#TEΛΕΙΟ\ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\{K_7\})$;

Πιο γενικά:

Ερώτημα: για ποιά $\mathcal{F}$ το $\#TEΛΕΙΟ\ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\mathcal{F})$ είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο και
για ποιά $\mathcal{F}$ το $\#TEΛΕΙΟ\ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\mathcal{F})$ είναι $\#P$ -πλήρες;

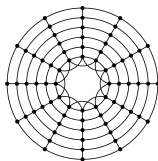
Ερωτήσεις και απαντήσεις

Ερώτημα: Ποιά είναι η πολυπλοκότητα μέτρησης του $\#TEΛΕΙΟ\ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\{K_6\})$;
Ποιά είναι η πολυπλοκότητα μέτρησης του $\#TEΛΕΙΟ\ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\{K_7\})$;

Πιο γενικά:

Ερώτημα: για ποιά $\mathcal{F}$ το $\#TEΛΕΙΟ\ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\mathcal{F})$ είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο και για ποιά $\mathcal{F}$ το $\#TEΛΕΙΟ\ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\mathcal{F})$ είναι $\#P$ -πλήρες;

Έστω $\mathcal{H}$ η κλάση με όλα τα ελάσσονα της **σχάρας ρηχής δίνης** H_k (για $k \in \mathbb{N}$):



Εδώ $k = 6$:

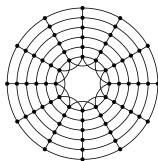
Ερωτήσεις και απαντήσεις

Ερώτημα: Ποιά είναι η πολυπλοκότητα μέτρησης του $\# \text{ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ}(\{K_6\})$;
Ποιά είναι η πολυπλοκότητα μέτρησης του $\# \text{ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ}(\{K_7\})$;

Πιο γενικά:

Ερώτημα: για ποιά $\mathcal{F}$ το $\# \text{ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ}(\mathcal{F})$ είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο και
για ποιά $\mathcal{F}$ το $\# \text{ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ}(\mathcal{F})$ είναι $\#P$ -πλήρες;

Έστω $\mathcal{H}$ η κλάση με όλα τα ελάσσονα της **σχάρας ρηχής δίνης** H_k (για $k \in \mathbb{N}$):



Εδώ $k = 6$:

Το αποτέλεσμά μας (Θηλυκός & Wiederrecht 2023):

Έστω $\mathcal{F}$ κάποιο σύνολο γραφημάτων

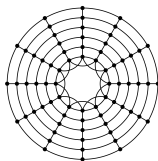
Ερωτήσεις και απαντήσεις

Ερώτημα: Ποιά είναι η πολυπλοκότητα μέτρησης του $\#TEΛΕΙΟ\ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\{K_6\})$;
Ποιά είναι η πολυπλοκότητα μέτρησης του $\#TEΛΕΙΟ\ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\{K_7\})$;

Πιο γενικά:

Ερώτημα: για ποιά $\mathcal{F}$ το $\#TEΛΕΙΟ\ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\mathcal{F})$ είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο και για ποιά $\mathcal{F}$ το $\#TEΛΕΙΟ\ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\mathcal{F})$ είναι $\#P$ -πλήρες;

Έστω $\mathcal{H}$ η κλάση με όλα τα ελάσσονα της **σχάρας ρηχής δίνης** H_k (για $k \in \mathbb{N}$):



Εδώ $k = 6$:

Το αποτέλεσμα μας (Θηλυκός & Wiederrecht 2023):

Έστω $\mathcal{F}$ κάποιο σύνολο γραφημάτων

Αν το $\mathcal{F}$ περιέχει κάποιο γράφημα στην $\mathcal{H}$:

τότε το $\#TEΛΕΙΟ\ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\mathcal{F})$ είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο
διαφορετικά το $\#TEΛΕΙΟ\ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ(\mathcal{F})$ είναι $\#P$ -πλήρες.

Ο αριθμός Hadwiger του G : $\text{hw}(G) = \max\{k \mid K_k \text{ είναι έλασσον του } G\}$

Ο αριθμός Hadwiger του G : $\text{hw}(G) = \max\{k \mid K_k \text{ είναι έλασσον του } G\}$

$\text{p}_{\text{vga}}(G) = \text{μέγιστο } k \text{ για το οποίο το } G \text{ περιέχει το } \Gamma_k^{\text{vga}} =$



Ο αριθμός Hadwiger του G : $\text{hw}(G) = \max\{k \mid K_k \text{ είναι έλασσον του } G\}$

$\text{p}_{\text{vga}}(G) = \text{μέγιστο } k \text{ για το οποίο το } G \text{ περιέχει το } \Gamma_k^{\text{vga}} =$



Παρατήρηση: Γ_k^{vga} είναι «έλασσον ισοδύναμο» του K_k

Ο αριθμός Hadwiger του G : $\text{hw}(G) = \max\{k \mid K_k \text{ είναι έλασσον του } G\}$

$\text{p}_{\text{vga}}(G) = \text{μέγιστο } k \text{ για το οποίο το } G \text{ περιέχει το } \Gamma_k^{\text{vga}} =$



Παρατήρηση: Γ_k^{vga} είναι «έλασσον ισοδύναμο» του K_k

Άρα: $\text{p}_{\text{vga}}(G)$ είναι «ασυμπτωτικά ισοδύναμο» του hw

Ο αριθμός Hadwiger του G : $\text{hw}(G) = \max\{k \mid K_k \text{ είναι έλασσον του } G\}$

$\text{p}_{\text{vga}}(G) = \text{μέγιστο } k \text{ για το οποίο το } G \text{ περιέχει το } \Gamma_k^{\text{vga}} =$



Παρατήρηση: Γ_k^{vga} είναι «έλασσον ισοδύναμο» του K_k

Άρα: $\text{p}_{\text{vga}}(G)$ είναι «ασυμπτωτικά ισοδύναμο» του hw

► το συμβολίζουμε με $\text{p}_{\text{vga}} \approx \text{hw}$

Μια **δεντροαποσύνθεση** του $G: (T, \beta)$ όπου

T είναι ένα δέντρο και

$\beta: V(T) \rightarrow 2^{V(G)}$ (οι **τσάντες**) όπου

- ❶ $\bigcup_{t \in V(T)} \beta(t) = V(G)$,
- ❷ για κάθε $e \in E(G)$ υπάρχει $t \in V(T)$ όπου $e \subseteq \beta(t)$, και
- ❸ για κάθε $v \in V(G)$ το σύνολο $\{t \in V(T) \mid v \in \beta(t)\}$ ενάγει ένα υπογράφημα του T .

Μια **δεντροαποσύνθεση** του G : (T, β) όπου

T είναι ένα δέντρο και

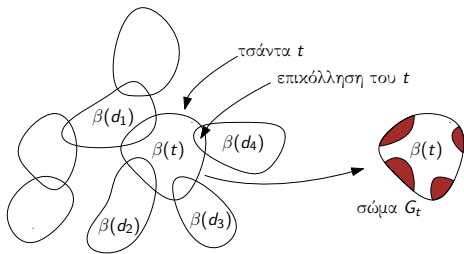
$\beta: V(T) \rightarrow 2^{V(G)}$ (οι **τσάντες**) όπου

- 1 $\bigcup_{t \in V(T)} \beta(t) = V(G)$,
- 2 για κάθε $e \in E(G)$ υπάρχει $t \in V(T)$ όπου $e \subseteq \beta(t)$, και
- 3 για κάθε $v \in V(G)$ το σύνολο $\{t \in V(T) \mid v \in \beta(t)\}$ ενάγει ένα υπογράφημα του T .

Για $t \in V(T)$,

μια **επικόλληση του** t είναι κάθε σύνολο $\{\beta(t) \cap \beta(d) \mid d \text{ γειτονική κορυφή του } t\}$.

το **σώμα** G_t προκύπτει από το $G[\beta(t)]$ συνδέοντας ως κλίκα κάθε επικόλληση του t .



$\text{pva}(\mathbf{G})$ είναι το μικρότερο k για το οποίο το $\mathbf{G}$ έχει δεντροαποσύνθεσης (T, β) , όπου

για κάθε σώμα $\mathbf{G}_t$ of $\mathcal{D}$

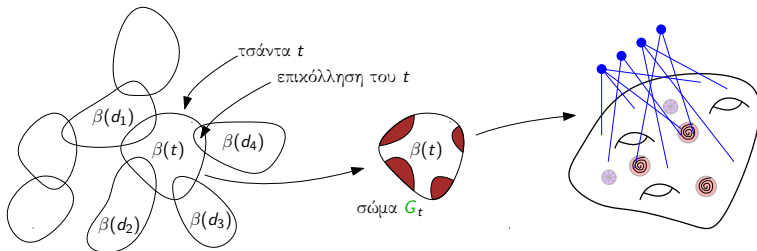
αν $|\mathbf{G}_t| > k$, τότε:

υπάρχει

ένα «απόγειο» σύνολο κορυφών $A \subseteq V(\mathbf{G}_t)$,

μια επιφάνεια Σ , και

μια Σ -εμβάπτιση δ του $\mathbf{G}_t - A$ όπου:



$\text{pva}(\mathbf{G})$ είναι το μικρότερο k για το οποίο το $\mathbf{G}$ έχει δεντροαποσύνθεσης (T, β) , όπου

για κάθε σώμα $\mathbf{G}_t$ of $\mathcal{D}$

αν $|\mathbf{G}_t| > k$, τότε:

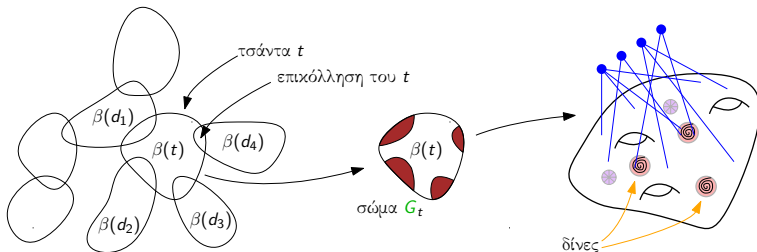
υπάρχει

ένα «απόγειο» σύνολο κορυφών $A \subseteq V(\mathbf{G}_t)$,

μια επιφάνεια Σ , και

μια Σ -εμβάπτιση δ του $\mathbf{G}_t - A$ όπου:

(v) δ έχει $\leq k$ δίνες, βάρθους $\leq k$,



$\text{pva}(\mathbf{G})$ είναι το μικρότερο k για το οποίο το $\mathbf{G}$ έχει δεντροαποσύνθεσης (T, β) , όπου

για κάθε σώμα $\mathbf{G}_t$ of $\mathcal{D}$

αν $|\mathbf{G}_t| > k$, τότε:

υπάρχει

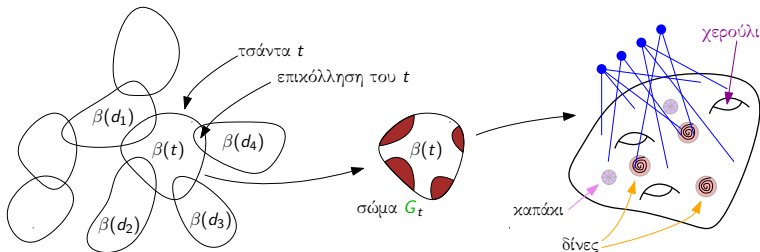
ένα «απόγειο» σύνολο κορυφών $A \subseteq V(\mathbf{G}_t)$,

μια επιφάνεια Σ , και

μια Σ -εμβάπτιση δ του $\mathbf{G}_t - A$ όπου:

(v) δ έχει $\leq k$ δίνες, βάρους $\leq k$,

(g) Σ έχει γένος Euler $\leq k$, και



$\text{pva}(\mathbf{G})$ είναι το μικρότερο k για το οποίο το $\mathbf{G}$ έχει δέντροαποσύνθεσης (T, β) , όπου

για κάθε σώμα $\mathbf{G}_t$ of $\mathcal{D}$

αν $|\mathbf{G}_t| > k$, τότε:

υπάρχει

ένα «απόγειο» σύνολο κορυφών $A \subseteq V(\mathbf{G}_t)$,

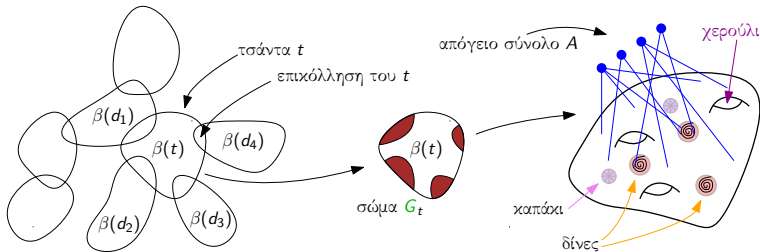
μια επιφάνεια Σ , και

μια Σ -εμβάπτιση δ του $\mathbf{G}_t - A$ όπου:

(v) δ έχει $\leq k$ δίνες, βάρους $\leq k$,

(g) Σ έχει γένος Euler $\leq k$, και

(a) $|A| \leq k$.



$\text{pvg}_a(\mathbf{G})$ είναι το μικρότερο k για το οποίο το $\mathbf{G}$ έχει δεντροαποσύνθεσης (T, β) , όπου

για κάθε σώμα $\mathbf{G}_t$ of $\mathcal{D}$

αν $|\mathbf{G}_t| > k$, τότε:

υπάρχει

ένα «απόγειο» σύνολο κορυφών $A \subseteq V(\mathbf{G}_t)$,

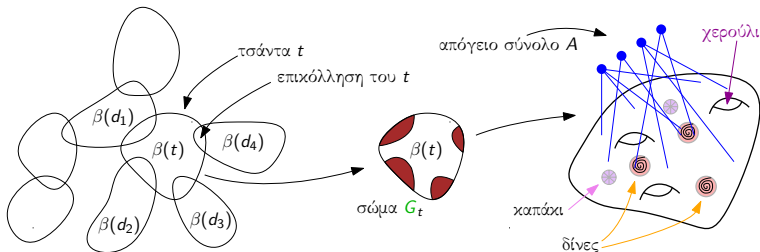
μια επιφάνεια Σ , και

μια Σ -εμβάπτιση δ του $\mathbf{G}_t - A$ όπου:

(v) δ έχει $\leq k$ δίνες, βάρθους $\leq k$,

(g) Σ έχει γένος Euler $\leq k$, και

(a) $|A| \leq k$.



▷ Δομικό Θεώρημα Ελασσόνων Γραφημάτων (Robertson & Seymour): $\text{hw} \approx \text{p}_{\text{vga}}$

$\text{Pvga}(G)$ είναι το ελάχιστο k για το οποίο το G έχει μια δεντροαποσύνθεση (T, β) , όπου

για κάθε σώμα G_t of $\mathcal{D}$

αν $|G_t| > k$, τότε:

υπάρχει

ένα «απόγειο» σύνολο κορυφών $A \subseteq V(G_t)$,

μια επιφάνεια Σ , και

μια Σ -εμβάπτιση δ του $G_t - A$ όπου:

(v) δ έχει $\leq k$ δίνες, βάρθους $\leq k$,

(g) Σ έχει γένος Euler $\leq k$, και

(a) $|A| \leq k$.

$\text{Pvga}(G)$ είναι το ελάχιστο k για το οποίο το G έχει μια δεντροαποσύνθεση (T, β) , όπου

για κάθε σώμα G_t of $\mathcal{D}$

αν $|G_t| > k$, τότε:

υπάρχει

ένα «απόγειο» σύνολο κορυφών $A \subseteq V(G_t)$,

μια επιφάνεια Σ , και

μια Σ -εμβάπτιση δ του $G_t - A$ όπου:

(v) δ έχει $\leq k$ δίνες, βάθους $\leq k$,

(g) Σ έχει γένος Euler $\leq k$, και

(a) $|A| \leq k$.

Θεωρώντας διαφορετικές επιλογές των (v), (g), και (a) ορίζουμε την την vga -ιεραρχία παραμέτρων:

$p_{vga}(G)$ είναι το ελάχιστο k για το οποίο το G έχει μια δεντροαποσύνθεση (T, β) , όπου

για κάθε σώμα G_t of $\mathcal{D}$

αν $|G_t| > k$, τότε:

υπάρχει

ένα «απόγειο» σύνολο κορυφών $A \subseteq V(G_t)$,

μια επιφάνεια Σ , και

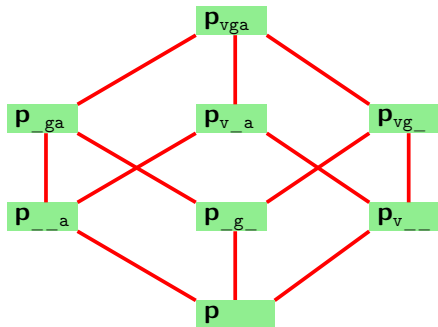
μια Σ -εμβάπτιση δ του $G_t - A$ όπου:

(v) δ έχει $\leq k$ δίνες, βάθους $\leq k$,

(g) Σ έχει γένος Euler $\leq k$, και

(a) $|A| \leq k$.

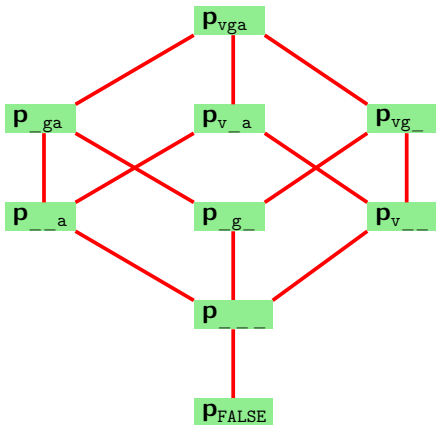
Θεωρώντας διαφορετικές επιλογές των (v), (g), και (a) ορίζουμε την την vga-ιεραρχία παραμέτρων:



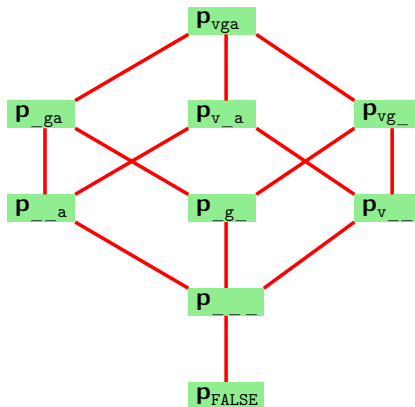
$p_{vga}(G)$ είναι το ελάχιστο k για το οποίο το G έχει μια δεντροαποσύνθεση (T, β) , όπου
για κάθε σώμα G_t of $\mathcal{D}$
αν $|G_t| > k$, τότε: FALSE

Θεωρώντας διαφορετικές επιλογές
των (v) , (g) , και (a) ορίζουμε
την την vga-ιεραρχία παραμέτρων:

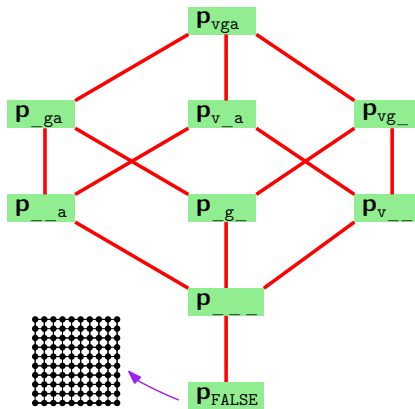
Παρατήρηση: $p_{FALSE} \approx tw$



Καθολικές παρεμποδίσεις για την vga-ιεραρχία

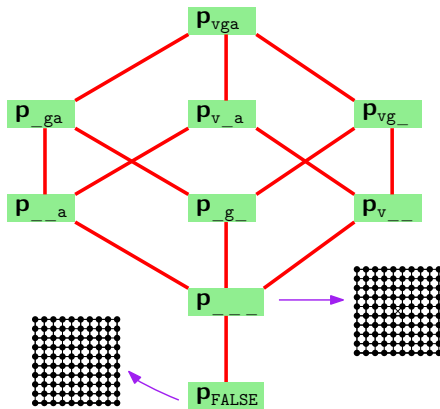


Καθολικές παρεμποδίσεις για την vga-ιεραρχία



P_{FALSE} : [Robertson & Seymour. Graph Minors V. Excluding a planar Graph, JCTsb 1986]

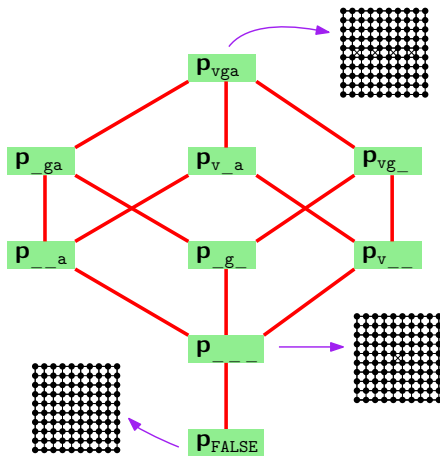
Καθολικές παρεμποδίσεις για την vga-ιεραρχία



p_{FALSE} : [Robertson & Seymour. Graph Minors V. Excluding a planar Graph, JCTSB 1986]

p_{---} : [Robertson & Seymour. Excluding a graph with one crossing, In Graph structure theory, 1993]

Καθολικές παρεμποδίσεις για την vga-ιεραρχία

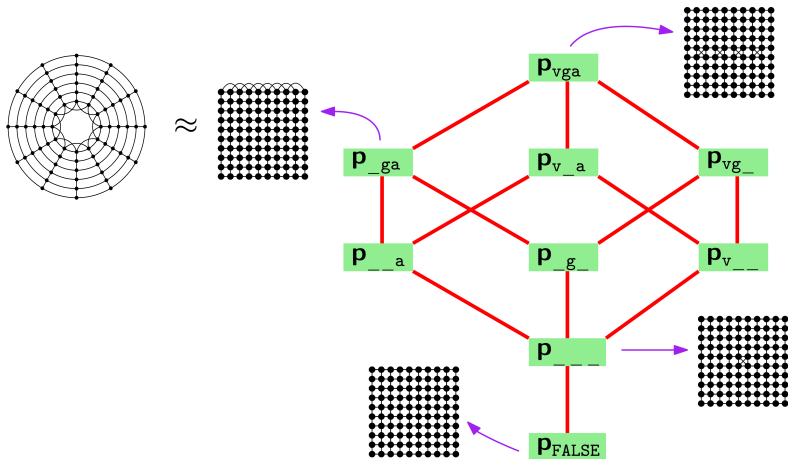


p_{FALSE} : [Robertson & Seymour. Graph Minors V. Excluding a planar Graph, JCTSB 1986]

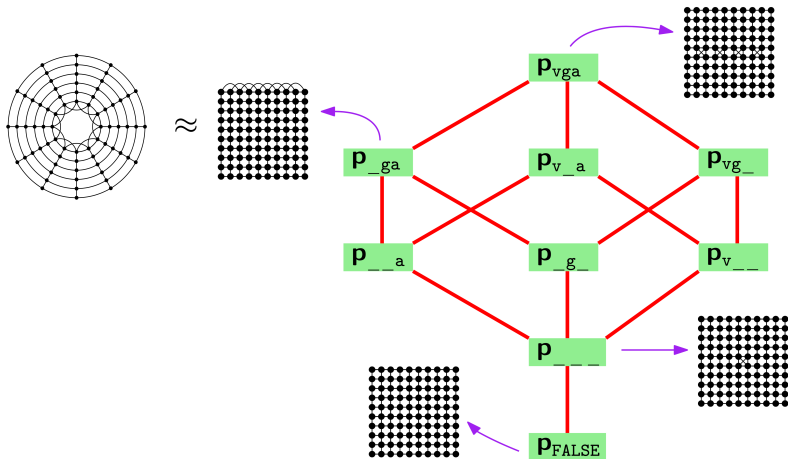
$p_{_}$: [Robertson & Seymour. Excluding a graph with one crossing, In Graph structure theory, 1993]

p_{vga} : [Robertson & Seymour. Graph Minors. XVI. Excluding a non-planar graph, JCTSB 2003]

Κεντρικό συνδυαστικό αποτέλεσμα:

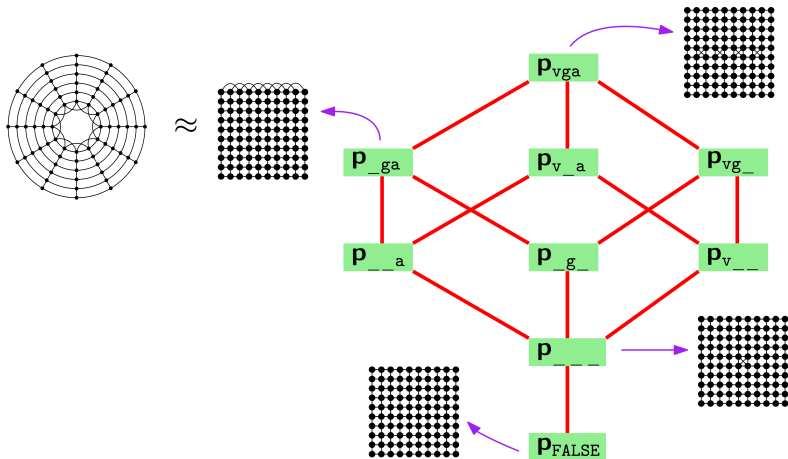


Κεντρικό συνδυαστικό αποτέλεσμα:



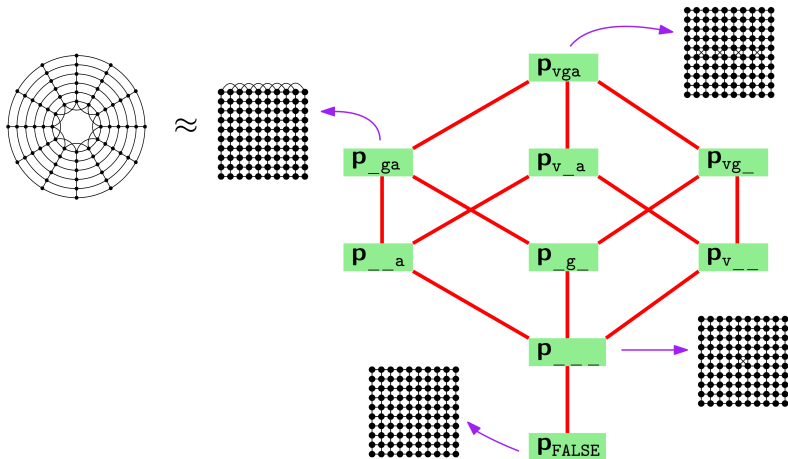
Απόδειξη:

Κεντρικό συνδυαστικό αποτέλεσμα:



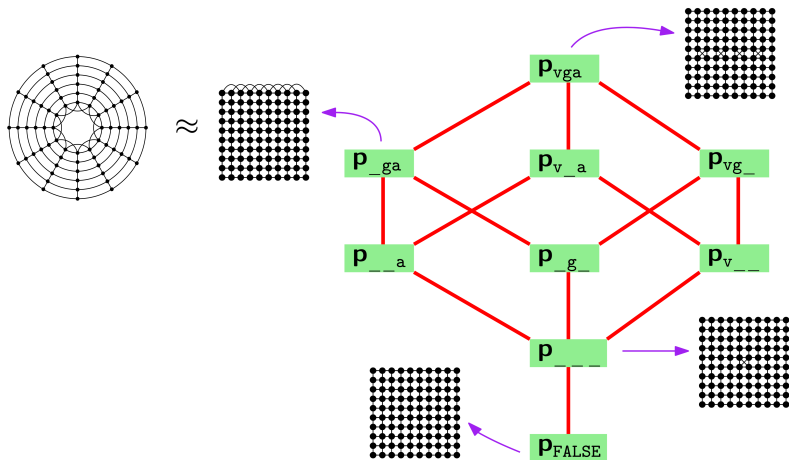
Απόδειξη: $\Delta\Sigma$

Κεντρικό συνδυαστικό αποτέλεσμα:



Απόδειξη: $\Delta\Sigma =$ Παραλείπεται...

Κεντρικό συνδυαστικό αποτέλεσμα:



Απόδειξη: $\Delta\Sigma =$ Παραλείπεται... (δεν υπάρχει χρόνος για αυτό σε μια ομιλία!)

Κάτω φράγμα

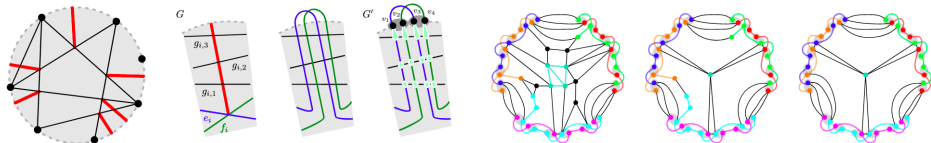
Μερικές ωραίες εικόνες από την

[Radu Curticapean, Mingji Xia: Parameterizing the Permanent: Hardness for K_8 -minor-free graphs. CoRR abs/2108.12879 (2021)], SOSA 2022: pp. 297-307.

Κάτω φράγμα

Μερικές ωραίες εικόνες από την

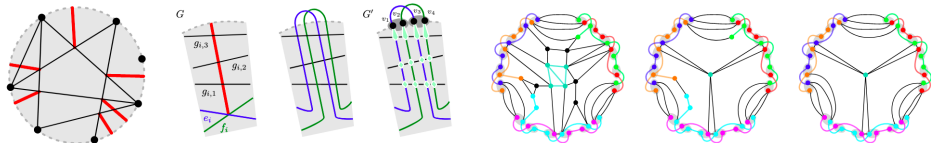
[Radu Curticapean, Mingji Xia: Parameterizing the Permanent: Hardness for K_8 -minor-free graphs. CoRR abs/2108.12879 (2021)], SOSA 2022: pp. 297-307.



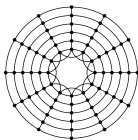
Κάτω φράγμα

Μερικές ωραίες εικόνες από την

[Radu Curticapean, Mingji Xia: Parameterizing the Permanent: Hardness for K_8 -minor-free graphs. CoRR abs/2108.12879 (2021)], SOSA 2022: pp. 297-307.



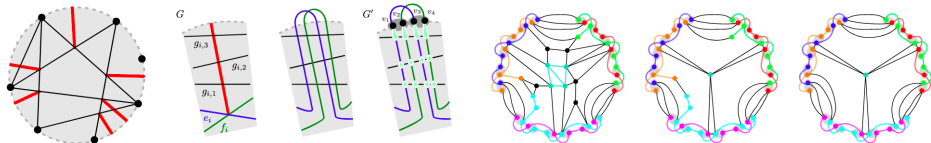
Αν η $\mathbf{p}_{\text{ga}}$ είναι μη-φραγμένη στην κλάση $\mathcal{G}$, τότε αυτή περιέχει οσοδήποτε μεγάλα ελάσσονα ρηχών δινών



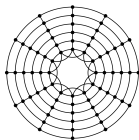
Κάτω φράγμα

Μερικές ωραίες εικόνες από την

[Radu Curticapean, Mingji Xia: Parameterizing the Permanent: Hardness for K_8 -minor-free graphs. CoRR abs/2108.12879 (2021)], SOSA 2022: pp. 297-307.



Αν η $\mathbf{p}_{\text{ga}}$ είναι μη-φραγμένη στην κλάση $\mathcal{G}$, τότε αυτή περιέχει οσοδήποτε μεγάλα ελάχιστοα ρηχών δινών

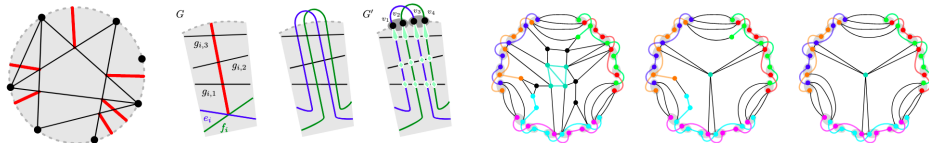


όπου μπορούμε να «στριμώξουμε» τα σκαριφήματα της αναγωγής των [Curticapean και Xia]

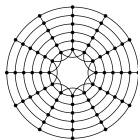
Κάτω φράγμα

Μερικές ωραίες εικόνες από την

[Radu Curticapean, Mingji Xia: Parameterizing the Permanent: Hardness for K_8 -minor-free graphs. CoRR abs/2108.12879 (2021)], SOSA 2022: pp. 297-307.



Αν η $\mathbf{p}_{\text{ga}}$ είναι μη-φραγμένη στην κλάση $\mathcal{G}$, τότε αυτή περιέχει οσοδήποτε μεγάλα ελάσσονα ρηχών δινών

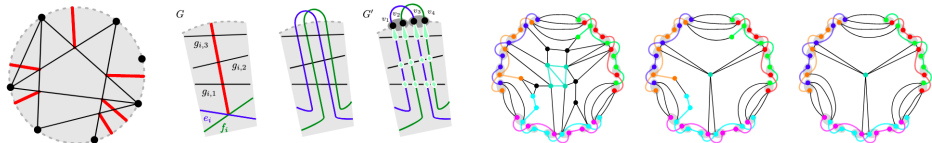


όπου μπορούμε να «στριμώξουμε» τα σκαριφήματα της αναγωγής των [Curticapean και Xia] και να ανάγουμε το γενικό $\# \text{ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ}$ στο $\# \text{ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ}(\mathcal{G})$

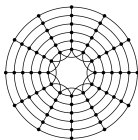
Κάτω φράγμα

Μερικές ωραίες εικόνες από την

[Radu Curticapean, Mingji Xia: Parameterizing the Permanent: Hardness for K_8 -minor-free graphs. CoRR abs/2108.12879 (2021)], SOSA 2022: pp. 297-307.



Αν η $\mathbf{p}_{ga}$ είναι μη-φραγμένη στην κλάση $\mathcal{G}$, τότε αυτή περιέχει οσοδήποτε μεγάλα ελάσσονα ρηχών δινών



όπου μπορούμε να «στριμώξουμε» τα σκαριφήματα της αναγωγής των [Curticapean και Xia]

και να ανάγουμε το γενικό $\#TEΛEIO TAIPIAΣMA$ στο $\#TEΛEIO TAIPIAΣMA(\mathcal{G})$

άρα για $\mathcal{G}$ όπου $\mathbf{p}_{ga}$ είναι μη-φραγμένη, το $\#TEΛEIO TAIPIAΣMA(\mathcal{G})$ είναι $\#P$ -πλήρες.

Άνω φράγμα

Έστω τώρα ότι το $\mathbf{p}_{ga}$ είναι φραγμένο στην κλάση $\mathcal{G}$.

Άνω φράγμα

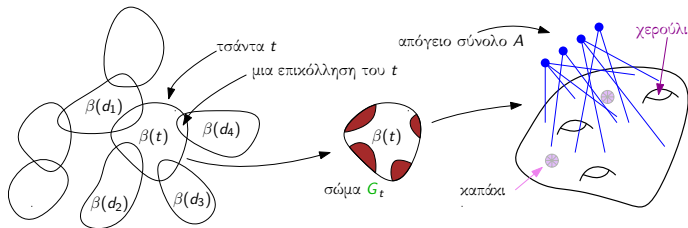
Έστω τώρα ότι το $\mathbf{p}_{\text{ga}}$ είναι φραγμένο στην κλάση $\mathcal{G}$.

Αν $\mathbf{p}_{\text{ga}}(\mathbf{G}) \leq k$, τότε το G έχει μια **άδινη** δενροαποσύνθεση!

Άνω φράγμα

Έστω τώρα ότι το $\mathbf{p}_{\text{ga}}$ είναι φραγμένο στην κλάση $\mathcal{G}$.

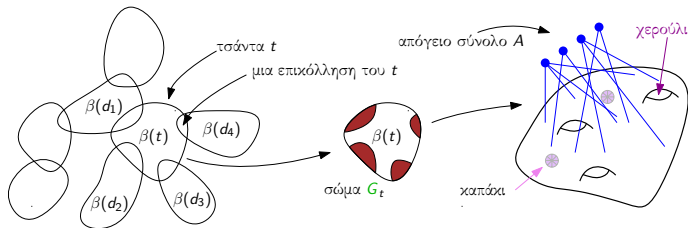
Αν $\mathbf{p}_{\text{ga}}(\mathbf{G}) \leq k$, τότε το G έχει μια **άδινη** δενροαποσύνθεση!



Άνω φράγμα

Έστω τώρα ότι το $\mathbf{p}_{\text{ga}}$ είναι φραγμένο στην κλάση $\mathcal{G}$.

Αν $\mathbf{p}_{\text{ga}}(\mathcal{G}) \leq k$, τότε το G έχει μια **άδινη** δεντροαποσύνθεση!

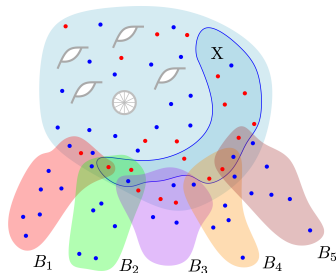
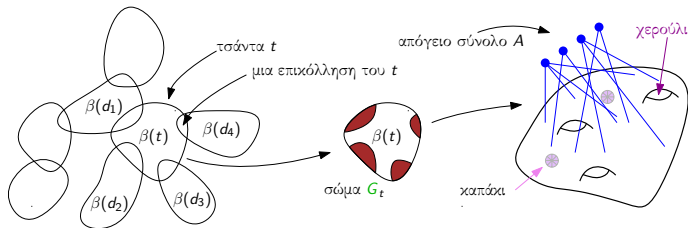


Χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις πολυωνύμων και τους αλγόριθμους των [Kasteleyn], [Temperley & Fisher], [Galluccio & Loeb], [Tesler], and [Vazirani] σχεδιάζουμε **αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού** για το #ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ που «τρέχει» σε τέτοιες δεντροαποσυνθέσεις, σε χρόνο $n^{k^{O(1)}}$

Άνω φράγμα

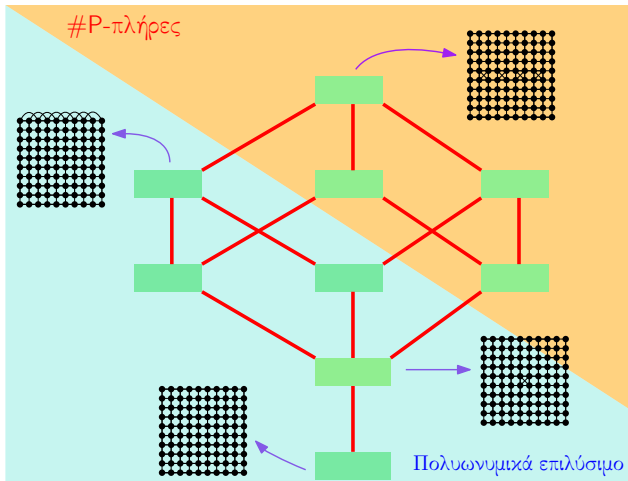
Έστω τώρα ότι το $\mathbf{p}_{\text{ga}}$ είναι φραγμένο στην κλάση $\mathcal{G}$.

Αν $\mathbf{p}_{\text{ga}}(\mathcal{G}) \leq k$, τότε το G έχει μια **άδινη δεντροαποσύνθεση!**

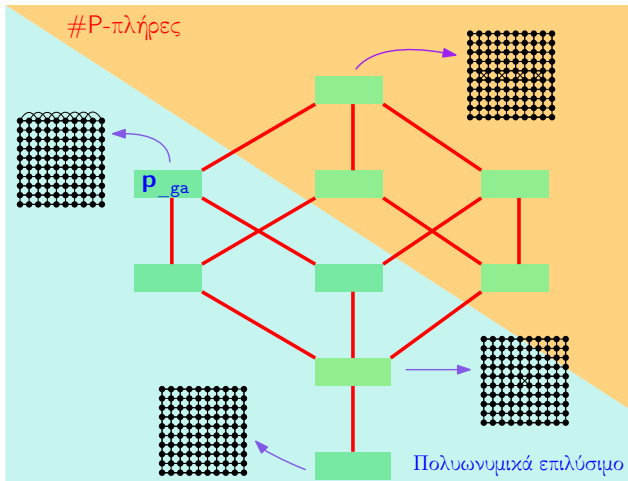


Χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις πολυωνύμων και τους αλγόριθμους των [Kasteleyn], [Temperley & Fisher], [Galluccio & Loeb], [Tesler], and [Vazirani] σχεδιάζουμε **αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού** για το #ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ που «τρέχει» σε τέτοιες δεντροαποσυνθέσεις, σε χρόνο $n^{O(1)}$

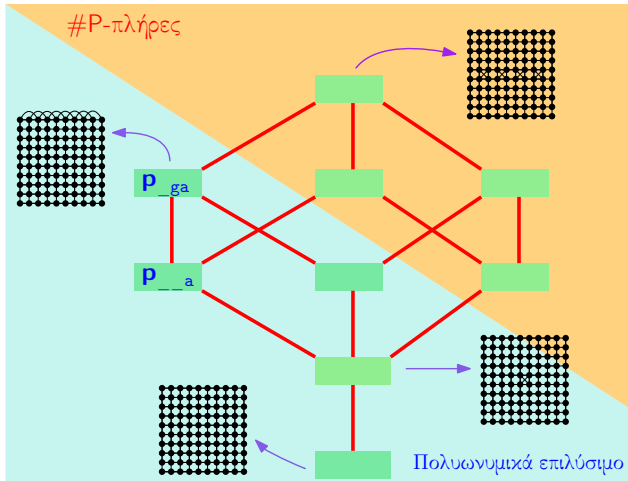
Το παρόν τοπίο



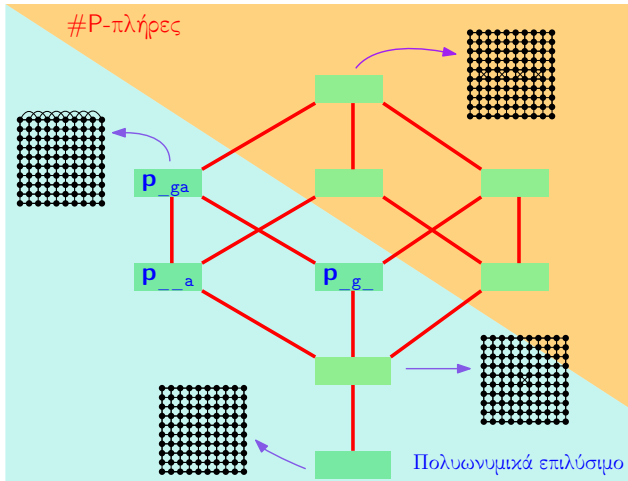
Το παρόν τοπίο



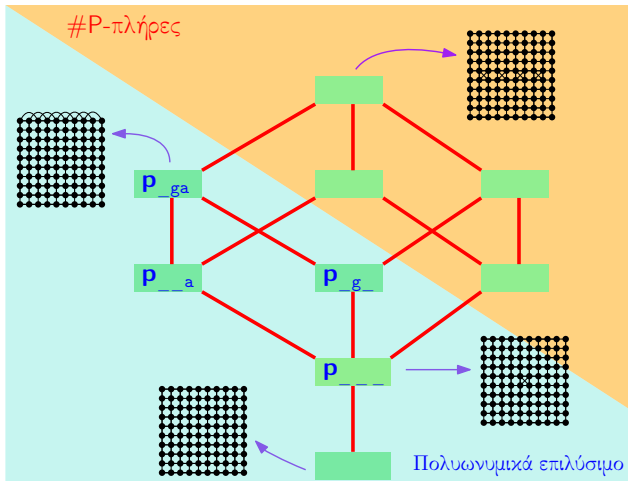
Το παρόν τοπίο



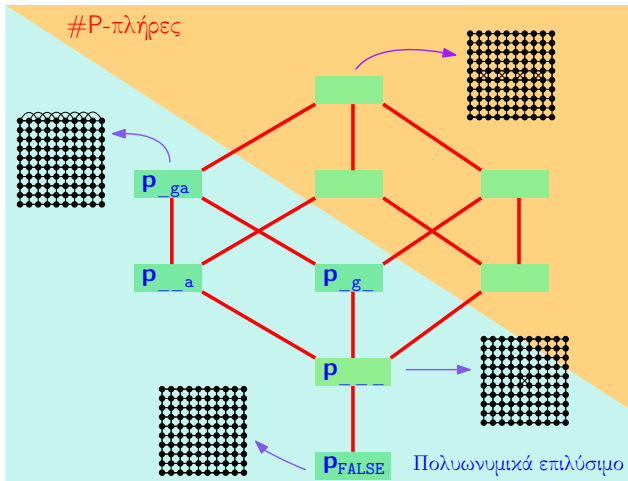
Το παρόν τοπίο



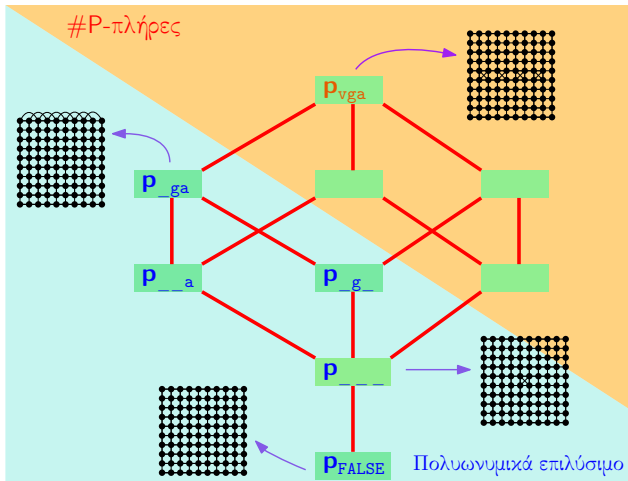
Το παρόν τοπίο



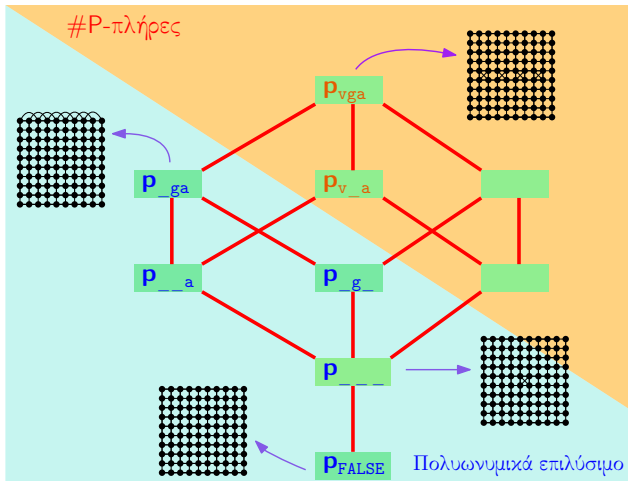
Το παρόν τοπίο



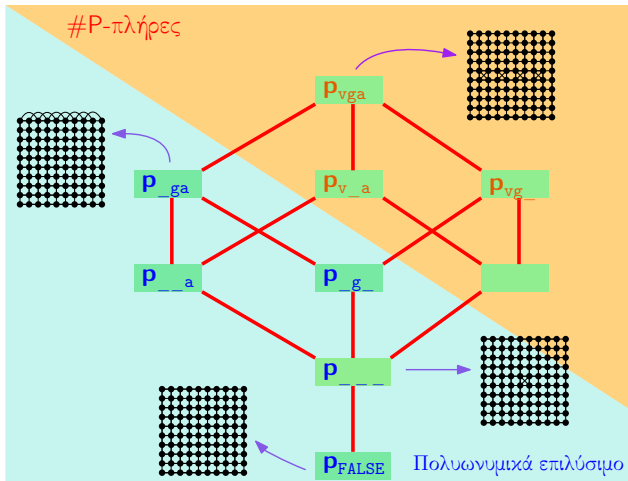
Το παρόν τοπίο



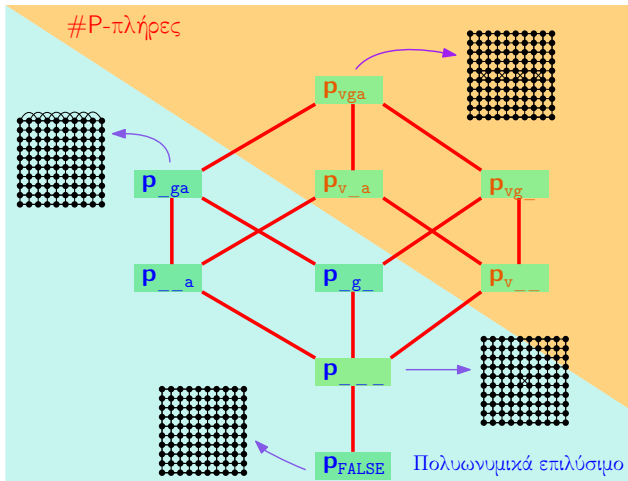
Το παρόν τοπίο



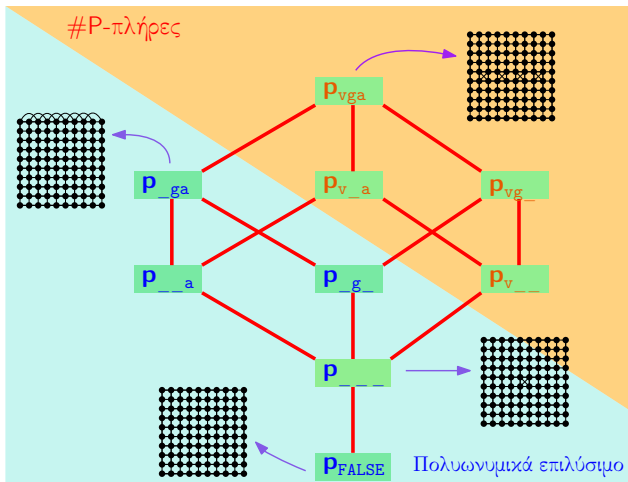
Το παρόν τοπίο



Το παρόν τοπίο

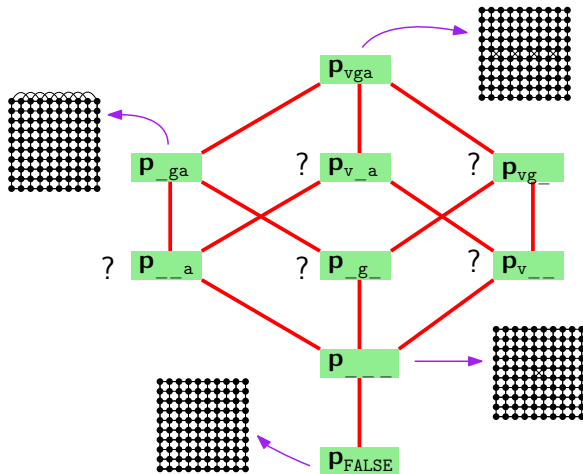


Το παρόν τοπίο



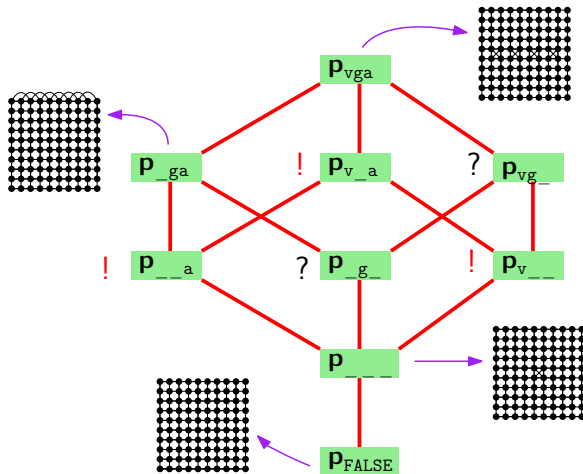
► η παράμετρος p_{ga} καθορίζει πλήρως την μετάβαση πολυπλοκότητας από το P στο #P-πλήρες για το πρόβλημα #ΤΕΛΕΙΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ.

Τι συμβαίνει στα άλλα μέρη της vga-ιεραρχίας;



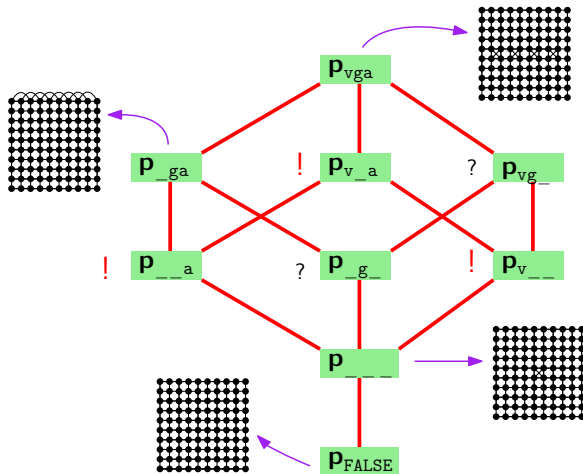
► Τρέχουσα έρευνα...

Τι συμβαίνει στα άλλα μέρη της vga-ιεραρχίας;



► Τρέχουσα έρευνα...

Τι συμβαίνει στα άλλα μέρη της vga-ιεραρχίας;



► Τρέχουσα έρευνα...

- Άλλες εκλεπτύνσεις του Δομικού Θεωρήματος των Ελασσόνων Γραφημάτων.
(vga-ιεραρχία, παραμετρικές παρεμποδίσεις)
- Αλγοριθμικές εφαρμογές;
(Δυναμικός προγραμματισμός σε παραμέτρους της vga-ιεραρχίας)
- Το πρόβλημα του υπολογισμού της παραμένουσας σε γενικούς (μη-συμμετρικούς) 0-1 πίνακες.
(Δομική θεωρία ελασσόνων ταιριασμάτων, διατεταγμένα γραφήματα)
- Ολογραφικοί αλγόριθμοι (Holant Problems);
(#CSP, #SAT, #GRAPH HOMOMORPHISM)

Ευχαριστώ!¹

¹Αρχοντία Γιαννοπούλου και Sebastian Wiederrecht



Pablo Picasso: *Colombe Volant*