ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΟΜΟΣ Α

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΒΑΡΣΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΔΕΡΙΖΙΩΤΗΣ
ΜΙΧΑΛΗΣ ΜΑΛΙΑΚΑΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ Γ ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΡΑΠΤΗΣ
ΟΛΥΜΠΙΑ ΤΑΛΕΛΛΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό είναι ο πρώτος τόμος ενός έργου που προγραμματίζεται να αποτελείται από δύο τόμους, το οποίο σχεδιάζεται ώστε να χρησιμεύσει για την διδασκαλία εισαγωγικού πανεπιστημιακού μαθήματος δύο εξαμήνων, σε φοιτητές μαθηματικών τμημάτων.

Στην Ελλάδα κυκλοφορούν ήδη πολλά εισαγωγικά βιβλία Γραμμικής Άλγεβρας. Όμως, τα τρία τελευταία χρόνια έχει υπάρξει ριζική αλλαγή των Μαθηματικών που διδάσκονται στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Αυτή η εξέλιξη κάνει αναγκαία την συγγραφή συγγράμματος που να λαμβάνει υπ όψιν αυτή την αλλαγή.

Θα θέλαμε να εκφράσουμε τις θερμές ευχαριστίες μας στην κα Πόπη Μπολιώτη που δακτυλογράφησε με ταχύτητα και αποτελεσματικότητα το κείμενο αυτό στο σύστημα LaTeX το οποίο μας επιτρέπει στο μέλλον εύκολα να ανανεώνουμε και να διορθώνουμε τυχόν παραλήψεις και λάθη που έχουν γίνει.

Αθήνα, Ιανουάριος 2003

Οι συγγραφείς

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όπως όλες οι επιστήμες, έτσι και τα Μαθηματικά, είναι ένα εργαλείο διερεύνησης του κόσμου που μας περιβάλλει. Δεν είναι εδώ η κατάλληλη θέση για να αρχίσουμε μιά συζήτηση για το τι είναι και τι κάνουν τα Μαθηματικά στην ολότητα τους. Όμως μία από τις θεμελιακές διαδικασίες με τις οποίες τα Μαθηματικά προσεγγίζουν και ερευνούν το κόσμο, είναι η παρακάτω, που την περιγράφουμε σε αδρές γραμμές :

Μας ενδιαφέρει λοιπόν ένα ορισμένο φαινόμενο το οποίο περιλαμβάνει μία ποικιλία στοιχείων. Πολύ συχνά τα στοιχεία που απαρτίζουν το φαινόμενο αυτό μπορούν να εκφρασθούν με πραγματικούς αριθμούς. Έτσι λοιπόν τα στοιχεία του φαινομένου αυτού περιγράφονται από σύνολα του τύπου $\mathbb{R}^\nu$, όπου ν ένας φυσικός αριθμός, η κάποια υποσύνολα τέτοιων συνόλων. Οι δε σχέσεις των στοιχείων αυτών πολύ συχνά εκφράζονται με συναρτήσεις του τύπου $f : \mathbb{R}^\nu \longrightarrow \mathbb{R}^\mu$. Περαιτέρω, ερωτήματα που αφορούν το φαινόμενο αυτό, μεταφράζονται σε ερωτήματα γύρω από την συνάρτηση f, και έτσι η μελέτη του φαινομένου που μας ενδιαφέρει γίνεται αρμοδιότητα των Μαθηματικών. Σπεύδουμε να τονίσουμε ότι συνηθέστατα τα βήματα που περιγράφουμε πιό πάνω, με 3-4 λέξεις το καθένα, μέσα στην πραγματική ιστορία του ανθρώπου, ήσαν διαδικασίες ... αιώνων. Τα παραπάνω είναι απλά μία αδρή περιγραφή σε γενικές γραμμές.

Άς δούμε ένα απλό παράδειγμα. Όπως μαθαίνει κανείς στην Αναλυτική Γεωμετρία, τα σημεία του πραγματικού χώρου που μας περιβάλλει, περιγράφονται από διατεταγμένες τριάδες πραγματικών αριθμών, δηλαδή περιγράφονται από στοιχεία του $\mathbb{R}^3$. Άς θεωρήσουμε λοιπόν την απόσταση σημείων του χώρου από το σταθερό σημείο (1, -2, 192). Η σχέση αυτή περιγράφεται από την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, που έχει τύπο

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-192)^2$$

. Έτσι λοιπόν, ένα ερώτημα του τύπου « ποία σημεία του χώρου απέχουν από το σημείο (1, -2, 3) απόσταση ίση με 118 ; », μεταφράζεται στο Μαθηματικό ερώτημα, « Να μελετηθεί το σύνολο $f^{-1}(118)$ ».

Αφού λοιπόν περιγράψαμε το παραπάνω σχήμα, παρατηρούμε ότι σε τέτοιο επίπεδο γενικότητας δεν έχουμε σοβαρές ελπίδες να διατυπώσουμε άμεσα κάποια ενδιαφέρουσα θεωρία. Είναι λογικό να ξεκινήσουμε από τις απλούστερες καταστάσεις, να δούμε τι μπορούμε να πούμε για αυτές και στην συνέχεια, να δούμε αν την γνώση που αποκτήσαμε στο απλούστερο επίπεδο μπορούμε να την γενικεύσουμε η να επεκτείνουμε σε κάποιο πιό πολύπλοκο επίπεδο.

Η παρακάτω απλή παρατήρηση μας φέρνει στην περιοχή της Γραμμικής Άλγεβρας: Οι απλούστερες συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^\nu \longrightarrow \mathbb{R}^\mu$ είναι αυτές που η f περιγράφεται με τύπο όπου εμφανίζονται πολυώνυμα πρώτου βαθμού. (ΣΧΟΛΙΟ. Η εμφάνιση η μη όρων μηδενικού βαθμού, στο πολυώνυμο, δεν αλλάζει ουσιωδώς τα πράγματα). Γιά παράδειγμα, μιά τέτοια είναι η $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ που έχει τύπο $f(x, y, z) = (2 + 4x + 6y - z, -13 + 7x - y + 4z)$. Ενώ δεν είναι σε αυτή την κατηγορία η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ με τύπο $f(x, y) = (3x^2 + e^y - sinxy, -5 + xy + y^4$.

Η Γραμμική Άλγεβρα μελετά συναρτήσεις του είδους $f : \mathbb{R}^\nu \longrightarrow \mathbb{R}^\mu$ που δίδονται από τύπο της παρακάτω μορφής.

$f(y_1, y_2, y_3, ..., y_n) = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + ... + a_{1n}y_n,$
$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + ... + a_{2n}y_n, a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + ... + a_{3n}y_n,$
$...a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + a_{m3}y_3 + ... + a_{mn}y_n)$

όπου τα a_{ij} γιά $1 \leq i \leq \nu, 1 \leq j \leq \mu$, είναι πραγματικοί αριθμοί.

Οι συναρτήσεις (αυτές) είναι πολύ σημαντικοί εκπρόσωποι της γενικότερης κατηγορίας συναρτήσεων που λέγονται Γραμμικές Συναρτήσεις η Γραμμικές Απεικονίσεις, . Το όνομα προήλθε από το ότι εκφράζονται από πολυώνυμα πρώτου βαθμού, όπως συμβαίνει και με τις εξισώσεις της ευθείας γραμμής και του επιπέδου, που μαθαίνουμε στην Αναλυτική Γεωμετρία. Οι γραμμικές απεικονήσεις εξετάζονται στο κεφάλαιο

Η σημασία των Γραμμικών Απεικονίσεων είναι διττή:

α) Αν δεν καταλάβουμε τις Γραμμικές Απεικονίσεις, τότε δεν έχουμε σοβαρή ελπίδα να καταλάβουμε τις πιό πολύπλοκες συναρτήσεις

β) Αποδεικνύεται στον Απειροστικό Λογισμό κλπ ότι ευρείες κατηγορίες συναρτήσεων προσεγγίζονται από Γραμμικές Συναρτήσεις. Συνεπώς, μέσω των προσεγγίσεων αυτών, η γνώση που έχουμε για τις Γραμμικές συναρτήσεις μεταφράζεται σε πληροφόρηση για ευρύτερες κατηγορίες συναρτήσεων. Δύο σπουδαίες υποπεριπτώσεις αυτού του είδους της προσέγγισης, είναι αφ ενός μεν οι δύο πρώτοι όροι της σειράς $Taylor$ και στην μία και στις πολλές διαστάσεις και αφ ετέρου η εφαπτόμενη ευθεία σε μιά καμπύλη, το εφαπτόμενο επίπεδο σε μιά επιφάνεια κλπ.

Απλοποιώντας την περιγραφή, θα μπορούσαμε να πούμε ότι στον τόμο αυτό θεωρούμε Γραμμικές Απεικονίσεις $f : \mathbb{R}^\nu \longrightarrow \mathbb{R}^\mu$, και προσπαθούμε να περιγράψουμε αποτελεσματικά δύο σύνολα, το α) Το $f^{-1}(0, 0, ..., 0)$ και το β) $f(\mathbb{R}^\nu)$ όπως και άλλα παρεμφερή με αυτά. Αυτά τα σύνολα είναι τα θεμελιώδη παραδείγματα αυτού που ονομάζεται Διανυσματικός χώρος και Υπόχωρος Διανυσματικού χώρου

Η βασική ιδέα για την περιγραφή αυτή, είναι η ιδέα του συστήματος δύο και τριών αξόνων που μαθαίνουμε στην Αναλυτική Γεωμετρία, για το επίπεδο και τον χώρο. Η ιδέα αυτή θα γενικευθεί στην έννοια της Βάσεως Διανυσματικού Χώρου.

Τα κυριότερα εργαλεία για την επίτευξη του στόχου αυτού είναι α) οι Πίνακες β) η θεωρία των Διανυσματικών Χώρων και οι παραφυάδες της.

Ας δούμε πως αναπτύσσεται η ύλη στα διάφορα κεφάλαια με την σειρά.

Το πρώτο κεφάλαιο είναι εισαγωγικό ασχολείται με θεμελιακές μαθηματικές έννοιες, κυρίως την θεωρία των συνόλων και την αποδεικτική μέθοδο της Επαγωγής. Στοχεύει και να συνδέσει τον αναγνώστη με πράγματα που μελετήθηκαν στο Γυμνάσιο-Λύκειο αλλά και να προωθήσει περαιτέρω τα ζητήματα αυτά.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται εισαγωγικά η θεωρία των πινάκων και συνδεέται με την λύση των γραμμικών συστημάτων. Εδώ εισάγεται και το εργαλείο των Στοιχειωδών γραμμοπράξεων, που παίζει καταλυτικό ρόλο στην λύση γραμμικών συστημάτων αλλά εμφανίζεται σε πολύ σοβαρό ρόλο και στα επόμενα κεφάλαια.

Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγονται και μελετώνται οι Διανυσματικοί Χώροι. Ο αναγνώστης έχει κάνει μιά πρώτη γνωριμία, στο Γυμνάσιο Λύκειο, με την αξιωματική μέθοδο. Την γνωριμία αυτή την έκανε μέσω του ιστορικού παραδείγματος της αξιωματικής μεθόδου, την Ευκλείδεια γεωμετρία του επιπέδου. Στην προσπάθεια που κάνουμε να εμβαθύνουμε στα σύνολα που περιγράφουμε πιό πάνω και μέσα στον κυκεώνα των λεπτομεριών που παρουσιάζει η περιγραφή τους, **εντοπίζουμε τα βα-**

σικά θεμελιακά χαρακτηριστικά τους. Αυτά είναι ό,τι εκφράζεται στον ορισμό του Διανυσματικού Χώρου και του συνδεόμενου με αυτόν ορισμό του Υπόχωρου. Στην συνέχεια οδηγούμεθα σε έναν τρόπο αποτελεσματικής περιγραφής των συνόλων αυτών μέσω της εννοίας της Βάσης Διανυσματικού Χώρου.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται μιά εισαγωγή στην έννοια των Γραμμικών Απεικονίσεων. Οι γραμμικές απεικονίσεις είναι το προϊόν της προσπάθειας αξιωματικοποίησης των συναρτήσεων που περιγράφουμε με συγκεκριμένους τύπους πιό πάνω. Εξετάζονται διάφορες ιδιότητες των γραμμικών απεικονίσεων και προετοιμάζεται το έδαφος για το επόμενο κεφάλαιο.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αποδεικνύεται ότι η αφηρημένη έννοια της γραμμικής απεικόνισης στην ουσία της δεν είναι κάτι περισσότερο από τις πολύ συγκεκριμμένες απεικονίσεις που περιγράφουμε πιό πάνω που εκφράζονται με πολύ συγκεκριμένους τύπους. Όμως η αφηρημένη τοποθέτηση, η οποία αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, έχει συμβάλλει στην βαθύτερη κατανόηση των πραγμάτων. Χρησιμοποιώντας τα εργαλεία και την θεωρία που έχει αναπτυχθεί μέχρι τώρα, δίδονται απαντήσεις στα ερωτήματα της πιό αποτελεσματικής περιγραφής των συνόλων α) Το $f^{-1}(0, 0, ..., 0)$ και το β) $f(\mathbb{R}^{\nu})$, γιά Γραμμικές Απεικονίσεις $f : \mathbb{R}^{\nu} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mu}$.

Στο έκτο κεφάλαιο, απαντιέται ένα ερώτημα που είχε μείνει εκκρεμές από το δεύτερο κιόλας κεφάλαιο του βιβλίου αυτού. Στο δεύτερο κεφάλαιο λύσαμε αριθμητικά ένα οιοδήποτε σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Με την μαθηματική κουλτούρα που έχει αναπτυχθεί από τις πρώτες κιόλας τάξεις του Γυμνασίου, ένας από τους στόχους μας οφείλει να είναι η εύρεση μαθηματικού τύπου για τις λύσεις του συστήματος, κάτι σαν τους τύπους που ξέρουμε π.χ. για τις εξισώσεις πρώτου και δεύτερου βαθμού. Η απάντηση δίδεται εδώ με την θεωρία των οριζουσών.

Στο έβδομο και τελευταίο κεφάλαιο χρησιμοποιείται η θεωρία των οριζουσών και η θεωρία των γραμμικών απεικονίσεων για μιά περαιτέρω εμβάθυνση στην μελέτη των γραμμικών συστημάτων.

Ελπίζουμε ότι τα παραπάνω άνοιξαν την όρεξη του αναγνώστη να συνεχίσει στις επόμενες σελίδες.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε συνοπτικά σε βασικές έννοιες για σύνολα και απεικονίσεις. Επιπλέον θα αναφερθούμε στη μέθοδο επαγωγής, η οποία αποτελεί μία από τις σημαντικές μεθόδους απόδειξης θεωρημάτων της Γραμμικής Άλγεβρας και των Μαθηματικών γενικότερα.

1.1 ΣΥΝΟΛΑ

Η έννοια του **Συνόλου** είναι μία πρωταρχική θεμελιώδης έννοια στην Μαθηματική επιστήμη. Η θεωρία των συνόλων εισάγεται από τον Georg Cantor (1845-1918), περί το 1900 μ.χ., και αποτελεί την βάση πάνω στην οποία ενοποιείται και θεμελιώνεται η Μαθηματική επιστήμη.

Ένα **Σύνολο** είναι μία συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων. Τα αντικείμενα αυτά λέγονται **Στοιχεία** του Συνόλου. Για κάθε σύνολο,υπάρχει μιά σαφής περιγραφή με βάση την οποία μπορούμε να αποφανθούμε κατά πόσο ένα δεδομένο στοιχείο ανήκει ή όχι στο σύνολο αυτό.

Τα παραπάνω ασφαλώς δεν αποτελούν έναν μαθηματικό ορισμό του συνόλου. Η έννοια του συνόλου, όπως αυτή του σημείου, είναι θεμελιακή και δεν μπορεί να αναχθεί σε απλούστερες έννοιες. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται να δει μιά αξιωματική έκθεση της θεωρίας των συνόλων θα πρέπει να κοιτάξει σε ειδικά συγγράμματα.

Τα σύνολα και τα στοιχεία τους συνήθως συμβολίζονται με γράμματα. Αν A είναι ένα σύνολο και a είναι ένα στοιχείο του, τότε εκφράζουμε αυτό το γεγονός με τον συμβολισμό «$a \in A$» ο οποίος διαβάζεται « Το a ανήκει στο A».

Ο συμβολισμός $y \notin A$ σημαίνει ότι το y δεν είναι στοιχείο του A.

Επίσης αναφέρουμε ότι ένα στοιχείο ενός συνόλου A πολλές φορές λέγεται και **μέλος του** A .

Ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του. Δηλαδή,

Ορισμός 1.1.1 *Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα αν και μόνο αν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.*

Για να περιγράψουμε ένα σύνολο γράφουμε τα δύο άγκιστρα { }, και στον χώρο μεταξύ αυτών περιγράφουμε τα στοιχεία που ανήκουν στο σύνολο.

Υπάρχουν τρείς κυρίως τρόποι να περιγραφεί ένα σύνολο.

α) Πλήρης αναφορά όλων των των στοιχείων του. Κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει αν το σύνολο έχει λίγα στοιχεία. Παραδείγματα είναι

A={1, 2, 3 }, B={ Αθήνα, Βόλος, Θεσσαλονίκη }

β) Με αναγραφή αρκετών στοιχείων του συνόλου (όχι όλων), έτσι ώστε να γίναι σαφής, (έστω υπαινικτικά, έστω κάπως αόριστα), η ιδιότητα που χαρακτηρίζει τα στοιχεία του συνόλου. Εδώ χρησιμοποιούνται και οι τρείς τελείες «...», τα λεγόμενα « τα αποσιωπητικά».

Παραδείγματα είναι, { 1, 2, 3, ..., n }, { 1, 2, 3, ..., n, ... }, { 2, 4, 6, ..., $2n$ }, { 2, 4, 6, ..., $2n$, ... }, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος.

γ) Έστω S ένα σύνολο και P μία ιδιότητα. Τότε το $\{x \in S \mid x$ έχει την ιδιότητα $P\}$ παριστά το σύνολο όλων των στοιχείων του S που έχουν την ιδιότητα P.

Παράδειγμα 1.1.2 *Στα ακόλουθα σύνολα, τα οποία θεωρούμε γνωστά, θα αναφερθούμε πολλές φορές και τα συμβολίζουμε ως:*

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots, \}$=*το σύνολο των φυσικών αριθμών*

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \cdots, \}$ = *το σύνολο των μή αρνητικών ακεραίων αριθμών*

$\mathbb{Z} =$ *το σύνολο των ακεραίων αριθμών*

$\mathbb{Q} =$ *το σύνολο των ρητών αριθμών*

$\mathbb{R} =$ *το σύνολο των πραγματικών αριθμών*

$\mathbb{C} =$ *το σύνολο των μιγαδικών αριθμών*

Ορισμός 1.1.3 *Το σύνολο που δεν έχει στοιχεία λέγεται* **το κενό σύνολο** *και συμβολίζεται με* $\emptyset$.

Ορισμός 1.1.4 *Αν A και B είναι δύο σύνολα και κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B, τότε το A λέγεται υποσύνολο του B και γράφουμε* $A \subseteq B$.

Αν υπάρχει κάποιο στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A, τότε το A λέγεται **γνήσιο υποσύνολο** του B και γράφουμε $A \subsetneqq B$.

Εύκολα βλέπουμε ότι:

- Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.
- Κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του.
- Δύο σύνολα A και B είναι ίσα αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Παράδειγμα 1.1.5 *Παρατηρούμε ότι* $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{N}_0 \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1.1.6

1) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ *είναι πολλαπλάσιο του 2*$\}$ *είναι το σύνολο των αρτίων ακεραίων αριθμών.*

2) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 4x + 1 = 0\} = \{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

3) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 3\} = \emptyset$.

Ορισμός 1.1.7 *Καλούμε* **ένωση** *δύο συνόλων A , B το σύνολο που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή στο B, και το συμβολίζουμε με $A \cup B$.*

Ορισμός 1.1.8 *Καλούμε* **τομή** *δύο συνόλων A,B το σύνολο που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία που ανήκουν και στο A και στο B και το συμβολίζουμε με $A \cap B$.*

Από τους ορισμούς έπεται ότι αν A,B είναι δύο σύνολα τότε $A \subseteqq A \cup B$ και $B \subseteqq A \cup B$.

Αν τώρα Γ είναι ένα σύνολο με $A \subseteqq \Gamma$ και $B \subseteqq \Gamma$ τότε $A \cup B \subseteqq \Gamma$.

Προφανώς αν δεν υπάρχουν στοιχεία που να ανήκουν και στο A και στο B, τότε $A \cap B = \emptyset$.

Αν $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ είναι σύνολα τότε

Η ένωση των $A_i, i \in \{1, 2 \cdots, \nu\}$ είναι το σύνολο με στοιχεία τα στοιχεία που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα $A_i, 1 \leq i \leq \nu$ και συμβολίζεται με $\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i$ ή με $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu$.

Η τομή των $A_i, i \in \{1, 2 \cdots, \nu\}$ είναι το σύνολο με στοιχεία τα στοιχεία που ανήκουν σε όλα τα $A_i, 1 \leq i \leq \nu$ και συμβολίζεται με $\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i$ ή με $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\nu$.

Ανάλογα, αν Λ είναι ένα σύνολο συνόλων, τότε το σύνολο με στοιχεία που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα μέλη του Λ λέγεται ένωση των συνόλων που ανήκουν στο Λ και συμβολίζεται με $\bigcup_{A \in \Lambda} A$.

Η τομή των συνόλων που ανήκουν στο Λ, με $\Lambda \neq \emptyset$ είναι το σύνολο με στοιχεία τα στοιχεία που ανήκουν σε όλα τα μέλη του Λ και συμβολίζεται με $\bigcap_{A \in \Lambda} A$.

Ορισμός 1.1.9 *Η διαφορά ενός συνόλου Y από ένα σύνολο X είναι το σύνολο με στοιχεία εκείνα τα στοιχεία του X που δεν ανήκουν στο Y και συμβολίζεται με $X \backslash Y$.*

Αν το Y είναι ένα υποσύνολο του X τότε η διαφορά του Y από το X λέγεται και **συμπλήρωμα** *του Y στο X και συμβολίζεται με Y^c.*

ΣΧΟΛΙΟ. Βέβαια το σύμβολο Y^c χρησιμοποιείται όταν το X, που υπονοείται, είναι σαφές από τα συμφραζόμενα. Σε αντίθετη περίπτωση χρησιμοποιούμε το $X \backslash Y$

Ορισμός 1.1.10 *Το σύνολο με στοιχεία τα υποσύνολα ενός συνόλου S λέγεται* **δυναμοσύνολο** *του S και συμβολίζεται με $\mathcal{P}(S)$.*

Παράδειγμα 1.1.11
1. Έστω A το σύνολο των αρτίων ακεραίων. Τότε $\mathbb{Z} \backslash A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \notin A\}$ *είναι το σύνολο των περιττών ακεραίων*
2. Έστω $S = \{1, 2, 3\}$. Τότε $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

Πρόταση 1.1.12 (Η άλγεβρα των συνόλων) *Έστω S ένα σύνολο και A,B,Γ υποσύνολά του.*

Τότε ισχύει:

$$
\begin{array}{lcl}
A \cup A = A & & A \cap A = A \\
A \cup B = B \cup A & & A \cap B = B \cap A \\
(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma) & & (A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma) \\
A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) & & A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) \\
A \cap (A \cup B) = A & & A \cup (A \cap B) = A \\
A \cup \emptyset = A & & A \cap S = A \\
A \cup S = S & & A \cap \emptyset = \emptyset \\
A \cup A^c = S & & A \cap A^c = \emptyset \\
 & (A^c)^c = A & \\
(A \cup B)^c = A^c \cap B^c & & (A \cap B)^c = A^c \cup B^c
\end{array}
$$

Η απόδειξη της πρότασης είναι άμεση από τους ορισμούς. Ενδεικτικά επαληθεύουμε την τελευταία ισότητα.

Για να δείξουμε ότι $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ αρκεί να δείξουμε ότι $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ και $(A \cap B)^c \supseteq A^c \cup B^c$.

Πράγματι, αν $x \in (A \cap B)^c$, τότε $x \in S$ και $x \notin A \cap B$, άρα ένα ακριβώς από τα ακόλουθα ισχύει:

(α) $x \in A$ και $x \notin B$

(β) $x \notin A$ και $x \in B$

(γ) $x \notin A$ και $x \notin B$

Στην περίπτωση (α) έχουμε ότι $x \in B^c$, στην περίπτωση (β) έχουμε ότι $x \in A^c$ και στην περίπτωση (γ) έχουμε ότι $x \in A^c \cap B^c$, άρα σε κάθε περίπτωση $x \in A^c \cup B^c$.

Δείξαμε ότι $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$. Έστω τώρα ότι $x \in A^c \cup B^c$, άρα $x \in A^c$ ή $x \in B^c$, συνεπώς $x \notin A$ ή $x \notin B$ άρα $x \in (A \cap B)^c$.

Παρατήρηση Οι ισότητες $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ και $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ λέγονται νόμοι του De Morgan.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να επαληθευθούν όλες οι ισότητες της πρότασης 1.1.12

2) Αν Α είναι ένα πεπερασμένο σύνολο τότε με $\mid A \mid$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχειων του Α.

   Να δειχθεί ότι αν Α,Β είναι πεπερασμένα σύνολα τότε:

$$\mid A \cup B \mid = \mid A \mid + \mid B \mid - \mid A \cap B \mid$$

3) Έστω S ένα σύνολο και Α,Β$\in \mathcal{P}(S)$. Να δειχθεί ότι $A \cap B^c = \emptyset$ αν και μόνο αν $A \subseteq B$

4) Έστω S ένα σύνολο και A,B$\in \mathcal{P}(S)$ με A^c και B^c πεπερασμένα σύνολα. Να δειχθεί ότι το σύνολο $(A \cap B)^c$ είναι πεπερασμένο.

5) Έστω S ένα σύνολο και X,Y $\in \mathcal{P}(S)$. Η **συμμετρική διαφορά** των συνόλων X και Y ορίζεται ως
$$(X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$$
και συμβολίζεται με $X \dot{+} Y$. Να δειχθεί ότι αν $A, B, \Gamma \in \mathcal{P}(S)$, τότε

(i) $A \dot{+} B = B \dot{+} A$

(ii) $A \dot{+} (B \dot{+} \Gamma) = (A \dot{+} B) \dot{+} \Gamma$

(iii) $A \dot{+} A = \emptyset$.

(iv) $A \cap (B \dot{+} \Gamma) = (A \cap B) \dot{+} (A \cap \Gamma)$

6) Έστω S, I μή κενά σύνολα και έστω ότι για κάθε $i \in I$ μας δίνεται ένα σύνολο A_i με $A_i \in \mathcal{P}(S)$.

Η τομή των συνόλων $A_i, i \in I$ είναι το σύνολο με στοιχεία τα στοιχεία που ανήκουν σε όλα τα $A_i, i \in I$ και συμβολίζεται με $\bigcap_{i \in I} A_i$.

Η ένωση των συνόλων $A_i, i \in I$ είναι το σύνολο με στοιχεία τα στοιχεία που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα $A_i, i \in I$ και συμβολίζεται με $\bigcup_{i \in I} A_i$.

Έστω τώρα S και I μή κενά σύνολα, και έστω ότι για κάθε $i \in I$ μας δίνεται ένα σύνολο A_i με $A_i \in \mathcal{P}(S)$. Τότε να δειχθεί ότι

(i) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$

(ii) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$

1.2 ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

Έστω A,B δύο σύνολα. Το σύμβολο (α, β) με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ λέγεται **διατεταγμένο ζεύγος** με πρώτη συντεταγμένη το α και δεύτερη συντεταγμένη το β. Αν (α, β) και (α', β') είναι δύο διατεταγμένα ζεύγη τότε
$(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$ αν και μόνο αν $\alpha = \alpha'$ και $\beta = \beta'$.

Ορισμός 1.2.1 *Το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A και B είναι το σύνολο με στοιχεία τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ και συμβολίζεται με $A \times B$.*

Παράδειγμα 1.2.2 *Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{1, 4\}$ τότε*

- $A \times B = \{(1,1), (1,4), (2,1), (2,4), (3,1), (3,4)\}$
- $B \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
- $A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$
- $B \times B = \{(1,1), (1,4), (4,1), (4,4)\}$

Η έννοια του καρτεσιανού γινομένου μπορεί να γενικευθεί για περισσότερα από δύο σύνολα.

Αν $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ είναι σύνολα, τότε το σύμβολο $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu)$ με

$\alpha_i \in A_i, 1 \leq i \leq \nu$, λέγεται **διατεταγμένη ν-άδα** με i-συντεταγμένη το α_i για κάθε $1 \leq i \leq \nu$. Αν $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu)$ και $(\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_\nu')$ είναι δύο διατεταγμένες ν-άδες, τότε

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu) = (\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_\nu') \ \alpha\nu \ \kappa\alpha\iota \ \mu o\nu o \ \alpha\nu \ \alpha_i = \alpha_i' \ \gamma\iota\alpha \ \kappa\alpha\theta\epsilon \ 1 \leq i \leq \nu,$$

δηλαδή αν και μόνο αν η i-συντεταγμένη της ν-άδας $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu)$ ισούται με την i-συντεταγμένη της ν-άδας $(\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_\nu')$ για κάθε $1 \leq i \leq \nu$.

Ορισμός 1.2.3 *Το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ είναι το σύνολο με στοιχεία τις διατεταγμένες ν-άδες $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu)$, όπου $\alpha_i \in A_i, 1 \leq i \leq \nu$ και συμβολίζεται με $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_\nu$.*

Στην περίπτωση που $A_1 = A_2 = \cdots = A_\nu = A$ τότε το καρτεσιανό γινόμενο των $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ συμβολίζεται με A^ν, δηλαδή $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_\nu = A^\nu$.

Έτσι το A^ν ορίζεται για κάθε θετικό ακέραιο ν. Θεωρούμε ότι $A^1 = A$

Για παράδειγμα το σύνολο $\mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, το σύνολο $\mathbb{R}^3$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων τριάδων πραγματικών αριθμών , το σύνολο $\mathbb{R}^\nu$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ν-άδων πραγματικών αριθμών.

Δεν θεωρήσαμε σκόπιμο να δώσουμε αυστηρό ορισμό του καρτεσιανού γινομένου. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται μπορεί να συμβουλευθεί οποιοδήποτε βιβλίο της θεωρίας συνόλων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Έστω $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{1, 4\}$. Να βρεθεί το $\mid (A \times B) \cup (B \times A) \mid$.

2) Έστω Α,Β,Γ,Δ σύνολα. Τότε να δειχθεί ότι

   $i)$ $A \times B = \emptyset$ αν και μόνο αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$

   $ii)$ Αν $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ τότε

      $\alpha)$ $A \times B = B \times A$ αν και μόνο αν Α=Β

      $\beta)$ $A \subseteq \Gamma$, $B \subseteq \Delta$ αν και μόνο αν $A \times B \subseteq \Gamma \times \Delta$

   $iii)$ $(A \cup B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$

   $iv)$ $(A \cap B) \times (\Gamma \cap \Delta) = (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)$

   $v)$ $(A \backslash B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \backslash (B \times \Gamma)$

3) Έστω Α,Β δύο σύνολα.

   Να δειχθεί ότι $A \times B = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = \bigcup_{\beta \in B} A_\beta$,

   όπου $B_\alpha = \{\alpha\} \times B$ και $A_\beta = A \times \{\beta\}$

4) Έστω I, J, S μή κενά σύνολα και έστω ότι για κάθε $i \in I$ μας δίνεται ένα σύνολο A_i με $A_i \in \mathcal{P}(S)$ και για κάθε $j \in J$ ένα σύνολο B_j με $B_j \in \mathcal{P}(S)$.

   Να δειχθεί ότι:

$$(\bigcup_{i\in I} A_i) \times (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j.$$

1.3 ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Ορισμός 1.3.1 *Έστω Α,Β δύο σύνολα. Μία* **διμελής σχέση** *από το Α στο Β είναι ένα υποσύνολο R του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$.*

Ιδιαίτερα ένα υποσύνολο $R \subseteq A \times A$ λέγεται μία **διμελής σχέση στο Α** .

Αν $(x, y) \in R$, τότε συνήθως γράφουμε xRy.

Παράδειγμα 1.3.2

1) $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$ *είναι μία διμελής σχέση στο Α.*

2) $R = \{(x, Y) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid x \in Y\}$ *είναι μία διμελής σχέση από το Α στο* $\mathcal{P}(A)$.

3) $R = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq Y\}$ *είναι μία διμελής σχέση από το* $\mathcal{P}(A)$ *στο* $\mathcal{P}(A)$.

Ορισμός 1.3.3 *Έστω Α ένα σύνολο και $R \subseteq A \times A$ μία διμελής σχέση στο Α. Τότε*

(i) *Η R λέγεται* **αυτοπαθής** *αν*

   $(x, x) \in R$ *για κάθε* $x \in A$

(ii) *Η R λέγεται* **συμμετρική** *αν έχει την ακόλουθη ιδιότητα:*

   αν $(x, y) \in R$, *τότε* $(y, x) \in R$.

(iii) *Η R λέγεται* **μεταβατική** *αν έχει την ακόλουθη ιδιότητα:*

   αν $(x, y) \in R$ *και* $(y, z) \in R$, *τότε* $(x, z) \in R$

Μία διμελής σχέση στο Α, η οποία είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική λέγεται **σχέση ισοδυναμίας** στο Α.

Για σχέσεις ισοδυναμίας χρησιμοποιούμε συνήθως το σύμβολο $\sim$δηλαδή αν R είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο Α τότε αντί xRy γράφουμε $x \sim y$.

Έτσι οι τρείς χαρακτηριστικές ιδιότητες παίρνουν τη μορφή:

- Αυτοπαθής $x \sim x$, για κάθε $x \in A$
- Συμμετρική Αν $x \sim y$ τότε $y \sim x$
- Μεταβατική Αν $x \sim y$ και $y \sim z$ τότε $x \sim z$

Παράδειγμα 1.3.4

(1) *Έστω Α ένα σύνολο. Τότε η ισότητα στο σύνολο Α είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο Α.*

(2) *Η σχέση $X \subseteq Y$ στο σύνολο $\mathcal{P}(A)$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας γιατί δεν είναι συμμετρική.*

(3) *Εύκολα βλέπουμε ότι στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$, η ακόλουθη σχέση :*

Για $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \alpha \sim \beta$ αν και μόνο αν ο ακέραιος $\alpha - \beta$ είναι άρτιος

είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός 1.3.5 *Έστω Α ένα σύνολο και $\sim$ μία σχέση ισοδυναμίας στο Α. Αν $\alpha \in A$ τότε η* **κλάση ισοδυναμίας** *του α είναι το σύνολο $\{x \in A \mid \alpha \sim x\}$ και συμβολίζεται με K_α.*

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας συμβολίζεται με $A/\sim$.

Παρατηρούμε ότι λόγω της συμμετρικής ιδιότητας, $K_\alpha = \{x \in A \mid \alpha \sim x\} = \{x \in A \mid x \sim \alpha\}$.

Παράδειγμα 1.3.6 *Για τα προηγούμενα παραδείγματα έχουμε:*

Για το (1), $K_\alpha = \{\alpha\}$ για κάθε $\alpha \in A$ και $A/\sim = \{\{\alpha\} \in \mathcal{P}(A) \mid \alpha \in A\}$

Για το (3) , $K_\alpha = \{\alpha + 2\nu \mid \nu \in \mathbb{Z}\}$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z}/\sim = \{K_0, K_1\}$

Πρόταση 1.3.7 *Έστω A ένα σύνολο και $\sim$ μία σχέση ισοδυναμίας στο Α. Τότε*

(i) *Για κάθε $\alpha, \beta \in A$, ισχύει ότι $K_\alpha = K_\beta$ αν και μόνο αν $\alpha \sim \beta$.*

(ii) *Για κάθε $\alpha, \beta \in A$, ισχύει ότι $K_\alpha = K_\beta$ ή $K_\alpha \cap K_\beta = \emptyset$*

(iii) $\bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha = A$

Απόδειξη.

(i) Αν $K_\alpha = K_\beta$ τότε επειδή $\beta \in K_\beta$ έπεται ότι $\beta \in K_\alpha$ άρα $\alpha \sim \beta$.

Έστω τώρα $\alpha \sim \beta$. Θα δείξουμε ότι $K_\alpha \subseteq K_\beta$ και $K_\beta \subseteq K_\alpha$. Αν $x \in K_\alpha$ τότε $x \sim \alpha$, αλλά από υπόθεση έχουμε ότι $\alpha \sim \beta$ άρα από τη μεταβατική ιδιότητα έπεται ότι $x \sim \beta$, συνεπώς $x \in K_\beta$. Άρα δείξαμε ότι $K_\alpha \subseteq K_\beta$.

Ανάλογα δείχνουμε ότι $K_\beta \subseteq K_\alpha$.

Οι (ii) και (iii) αφήνονται ως ασκήσεις.

Ορισμός 1.3.8 *Έστω Α ένα σύνολο. Ένα υποσύνολο S του $\mathcal{P}(A)$ λέγεται* **διαμέριση** *του Α αν*

(i) $\emptyset \notin S$

(ii) $\bigcup_{\Gamma \in S} \Gamma = A$

(*iii*) *Για κάθε* $X, Y \in S(A)$ *ισχύει ότι* $X = Y$ *ή* $X \cap Y = \emptyset$.

Δηλαδή, μια διαμέριση ενός συνόλου X *είναι ένα σύνολο μη κενών υποσυνόλων του* X, *τα οποία ανά δύο έχουν τομή το κενό σύνολο ή συμπίπτουν και η ένωσή τους είναι το* X.

Άπό την πρόταση 1.3.7 έπεται ότι άν $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο A, τότε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας είναι μία διαμέριση του A.

Στην επόμενη πρόταση θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Πρόταση 1.3.9 *Έστω A ένα σύνολο και* S *μία διαμέριση του A. Τότε υπάρχει μία σχέση ισοδυναμίας* $\sim$ *στο A, έτσι ώστε οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας να είναι τα στοιχεία του* S. *Δηλαδή,* $A/\sim = S$

Απόδειξη. Ορίζουμε μία σχέση στο A ως εξής:

για $x, y \in A$ θέτουμε $x \sim y$ αν και μόνο αν υπάρχει $\Gamma \in S$ με $x, y \in \Gamma$.

Είναι εύκολο τώρα να δούμε ότι η σχέση $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο A και αν $x \in A$ με $x \in \Gamma$, τότε $K_\alpha = \Gamma$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να εξετασθεί ποιές από τις ακόλουθες σχέσεις είναι σχέσεις ισοδυναμίας.

(i) Στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$:

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ τότε $\alpha \sim \beta$ αν ο ακέραιος $\beta - \alpha$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

(ii) Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$:

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε $\alpha \sim \beta$ αν ο αριθμός $\beta - \alpha$ είναι ρητός.

(iii) Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$:

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε $\alpha \sim \beta$ αν $\alpha\beta \geq 0$

(iv) Στο σύνολο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

Αν $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ τότε $(\alpha_1, \alpha_2) \sim (\beta_1, \beta_2)$ αν $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1$.

1.4 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Ορισμός 1.4.1 *Έστω X,Y δύο σύνολα. Μία* **απεικόνιση** f *από το X στο Y είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο* x *του X* <u>*ακριβώς ένα*</u> *στοιχείο* $f(x)$ *του Y.*

Το σύνολο X λέγεται το πεδίο ορισμού της απεικόνισης f και το σύνολο Y, το πεδίο τιμών της απεικόνισης f. Για συντομία γράφουμε $f : X \longrightarrow Y$. Το στοιχείο $f(x)$ του Y λέγεται *η εικόνα του* x *μέσω της απεικόνισης* f .

Τις απεικονίσεις ονομάζουμε και **συναρτήσεις**

Ορισμός 1.4.2 *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μία απεικόνιση και $A \subseteq X, B \subseteq Y$. Τότε το σύνολο $\{f(x) \in Y \mid x \in A\}$, λέγεται η εικόνα του A μέσω της f και συμβολίζεται με $f(A)$.*

Ιδιαίτερα το $f(X)$ λέγεται η εικόνα της f.

Το σύνολο $\{x \in A \mid f(x) \in B\}$ λέγεται η αντίστροφη εικόνα του B μέσω της f και συμβολίζεται με $f^{-1}(B)$.

Παράδειγμα 1.4.3

(α) *Η πρόσθεση των πραγματικών αριθμών είναι μία απεικόνιση $\pi\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(x, y) \longrightarrow x + y$.*

(β) *Ο πολλαπλασιασμός των πραγματικών αριθμών είναι μία απεικόνιση*

$\pi o\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(x, y) \longrightarrow xy$.

(γ) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *με* $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν ο } x \text{ είναι ρητός} \\ 0 & \text{αν ο } x \text{ είναι άρρητος} \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι μία απεικόνιση δεν είναι ανάγκη να ορίζεται μέσω κάποιου τύπου.

(δ) *Η $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(x, y) \longmapsto x$ είναι μία απεικόνιση.*

(ϵ) *Η $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$ με* $\begin{cases} 0 \longmapsto 0 \\ 2\nu \longmapsto \nu \\ 2\nu - 1 \longmapsto -\nu \end{cases}$ *για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μία απεικόνιση.*

(ζ) *Η $\varrho : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ με $\nu \longmapsto -\nu$ είναι μία απεικόνιση.*

Ορισμός 1.4.4 *Δύο απεικονίσεις $f : X \longrightarrow Y$ και $\varrho : A \longrightarrow B$ λέγονται ίσες αν $X = A, Y = B$ και $f(x) = \varrho(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Παράδειγμα 1.4.5 *Η $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ με* $\begin{cases} \nu \longmapsto -1 & \text{αν ο } \nu \text{ είναι περιττός} \\ \nu \longmapsto 1 & \text{αν ο } \nu \text{ είναι άρτιος} \end{cases}$

και η $\varrho : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ με $\nu \longmapsto$συν($\nu\pi$) είναι ίσες .

Ορισμός 1.4.6 *α) Μία απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ λέγεται* **ένα προς ένα ,** *και γράφουμε 1-1, αν η σχέση $f(x) = f(x')$ συνεπάγεται ότι $x = x'$. Ισοδύναμα, αν η σχέση $x \neq x'$ συνεπάγεται ότι $f(x) \neq f(x')$.*

β) Μία απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ λέγεται **επί** *αν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $f(x) = y$. Ισοδύναμα, αν $f(X) = Y$.*

Παράδειγμα 1.4.7 *Για τις απεικονίσεις στα παράδειγματα 1.4.3 έχουμε:*

- *Στο (α) η $\pi\rho$ είναι επί, αφού αν $r \in \mathbb{R}$ τότε $\pi\rho((r, 0)) = r$ αλλά δεν είναι 1-1, αφού $\pi\rho((1, 3)) = 4 = \pi\rho((2, 2))$.*

- *Στο (β) η $\pi o\lambda$ είναι επί, αφού αν $r \in \mathbb{R}$ τότε $\pi o\lambda((r, 1)) = r$, αλλά δεν είναι 1-1 αφού πολ$((3, 4)) = 12 = \pi o\lambda((2, 6))$*

- *Στο (γ) η f δεν είναι επί αφού $f(\mathbb{R}) = \{1, 0\} \subsetneqq \mathbb{R}$ και η f δεν είναι 1-1 αφού $f(2) = 1 = f(3)$.*

- *Στο (δ) η π_1 είναι επί αφού αν $r \in \mathbb{R}$ τότε $\pi_1((r, 2)) = r$ αλλά δεν είναι 1-1 αφού $\pi_1((1, 2)) = 1 = \pi_1((1, 3))$.*

- *Στο (ε) εύκολα βλέπουμε ότι η σ είναι 1-1 και επί*

- *Στο (ζ) η ϱ είναι 1-1 αφού αν $\varrho(x) = \varrho(y)$, τότε $-x = -y$, άρα $x = y$, αλλά δεν είναι επί αφού $\varrho(\mathbb{N}) \subsetneqq \mathbb{Z}$.*

Ορισμός 1.4.8 *Έστω M ένα σύνολο. Τότε η απεικόνιση $M \longrightarrow M, x \longmapsto x$ λέγεται η* **ταυτοτική** *απεικόνιση του M και συμβολίζεται με 1_M ή id_M*

Ορισμός 1.4.9 *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Z$ δύο απεικονίσεις. Τότε ορίζεται η απεικόνιση*

$$g \circ f : X \longrightarrow Z \text{ ως } \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

και λέγεται **σύνθεση** *των f και g.*

Παράδειγμα 1.4.10 *Έστω $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $\mu\epsilon$ $\nu \longmapsto 2\nu + 1$*
και $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $\mu\epsilon$ $\nu \longmapsto 2\nu$
τότε η $g \circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ορίζεται ως $\nu \longmapsto 2(2\nu + 1) = 4\nu + 2$
και η $f \circ g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ορίζεται ως $\nu \longmapsto 2(2\nu) + 1 = 4\nu + 1$
Παρατηρούμε ότι $f \circ g \neq g \circ f$.

Πρόταση 1.4.11 *Έστω $f : A \longrightarrow B$ μία απεικόνιση. Τότε $1_B \circ f = f = f \circ 1_A$.*

Η απόδειξη είναι άμεση και την αφήνουμε ως άσκηση.

Πρόταση 1.4.12 (Η σύνθεση απεικονίσεων είναι προσεταιριστική) *Έστω $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow \Gamma$ και $h : \Gamma \longrightarrow \Delta$ απεικονίσεις. Τότε οι απεικονίσεις $h \circ (g \circ f) : A \longrightarrow \Delta$ και $(h \circ g) \circ f : A \longrightarrow \Delta$ είναι ίσες.*

Απόδειξη. Έστω $\phi = h \circ (g \circ f) : A \longrightarrow \Delta$ και $\psi = (h \circ g) \circ f : A \longrightarrow \Delta$. Τότε για κάθε $\alpha \in A$ έχουμε $\phi(\alpha) = (h \circ (g \circ f))(\alpha) = h((g \circ f)(\alpha)) = h(g(f(\alpha)))$ και
$\psi(\alpha) = ((h \circ g) \circ f)(\alpha) = (h \circ g)(f(\alpha)) = h(g(f(\alpha)))$. Άρα $\phi(\alpha) = \psi(\alpha)$ για κάθε $\alpha \in A$, άρα $\phi = \psi$.

Πρόταση 1.4.13 *Έστω $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Z$ απεικονίσεις.*

(α) *Αν οι f, g είναι $1 - 1$ τότε και η $g \circ f$ είναι 1-1*

(β) *Αν οι f, g είναι επί τότε και η $g \circ f$ είναι επί*

(γ) *Αν οι f, g είναι $1 - 1$ και επί τότε και η $g \circ f$ είναι $1 - 1$ και επί.*

Απόδειξη. (α) Έστω $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$. Επειδή η f είναι 1-1 έπεται ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$. Τώρα επειδή η g είναι 1-1 έπεται ότι $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Άρα η $g \circ f$ είναι 1-1.

(β) Εστω $z \in Z$. Επειδή η g είναι επί έπεται ότι $z = g(y)$ για κάποιο $y \in Y$. Τώρα επειδή η f είναι επί έχουμε ότι $y = f(x)$ για κάποιο $x \in X$. Άρα $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Δηλαδή δείξαμε ότι για κάθε $z \in Z$ υπάρχει κάποιο $x \in X$ με $z = (g \circ f)(x)$. Άρα η $g \circ f$ είναι επί.

(γ) Έπεται άμεσα από τις (α) και (β).

Έστω $f : A \longrightarrow B$ μία απεικόνιση. Αν $g : B \longrightarrow A$ είναι μία απεικόνιση τότε ορίζονται οι απεικονίσεις

$$g \circ f : A \longrightarrow A \ \textit{και} \ f \circ g : B \longrightarrow B.$$

Στην περίπτωση που $g \circ f = 1_A$ και $f \circ g = 1_B$ τότε η g λέγεται **μία αντίστροφη** της f (και η f μία αντίστροφη της g.)

Θα δούμε παρακάτω πότε μία απεικόνιση f έχει αντίστροφη και ότι αυτή, αν υπάρχει, είναι μοναδική.

Πρόταση 1.4.14 *Μία απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ έχει αντίστροφη αν και μόνο αν η f είναι 1-1 και επί.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f έχει μία αντίστροφη $g : B \longrightarrow A$. Έτσι έχουμε $g(f(\alpha)) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$ και $f(g(\beta)) = \beta$ για κάθε $\beta \in B$. Θα δείξουμε ότι η f είναι $1-1$ και επί. Πράγματι, έστω $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ με $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$. Τότε $g(f(\alpha_1)) = g(f(\alpha_2))$, αλλά $g(f(\alpha_1)) = \alpha_1$ και $g(f(\alpha_2)) = \alpha_2$, άρα $\alpha_1 = \alpha_2$. Συνεπώς η f είναι $1-1$.

Έστω τώρα $\beta \in B$. Τότε $f(g(\beta)) = \beta$, δηλαδή το β είναι η εικόνα του στοιχείου $g(\beta)$ του A μέσω της f. Άρα η f είναι επί.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f είναι $1-1$ και επί. Θα δείξουμε ότι υπάρχει απεικόνιση $g : B \longrightarrow A$ με $f \circ g = 1_B$ και $g \circ f = 1_A$.

Έστω $\beta \in B$. Καθώς η f είναι επί υπάρχει τουλάχιστον ένα $\alpha \in A$ με $f(\alpha) = \beta$. Αν υπήρχε $\alpha' \in A$ με $f(\alpha') = \beta$ τότε θα είχαμε $f(\alpha) = \beta = f(\alpha')$ και επειδή η f είναι $1-1$ θα παίρναμε ότι $\alpha = \alpha'$. Άρα αν $\beta \in B$, τότε υπάρχει μοναδικό $\alpha \in A$ με $f(\alpha) = \beta$. Συνεπώς ορίζουμε μια απεικόνιση $g : B \longrightarrow A$ ώς εξής:

Αν $\beta \in B$ τότε η εικόνα του β μέσω της g, $g(\beta)$, είναι το μοναδικό $\alpha \in A$ το οποίο έχει την ιδιότητα $f(\alpha) = \beta$. Δηλαδή, $g(\beta) = \alpha$, όπου α το μοναδικό στοιχείο του A με την ιδιότητα $f(\alpha) = \beta$.

Εύκολα τώρα βλέπουμε ότι $f(g(\beta)) = \beta$ για κάθε $\beta \in B$ και $g(f(\alpha)) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$.

Άρα $f \circ g = 1_B$ και $g \circ f = 1_A$.

Πρόταση 1.4.15 *Αν μία απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ είναι 1-1 και επί τότε έχει μοναδική αντίστροφη την οποία συμβολίζουμε με f^{-1}.*

Απόδειξη. Είδαμε στην πρόταση 1.4.14 ότι αν μία απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ είναι 1-1 και επί τότε έχει αντίστροφη. Έστω $g_1, g_2 : B \longrightarrow A$ αντίστροφες της f. Δηλαδή $g_1 \circ f = 1_A = g_2 \circ f$ και $f \circ g_1 = 1_B = f \circ g_2$. Τότε $(g_1 \circ f) \circ g_2 = 1_A \circ g_2 = g_2$ από την πρόταση 1.4.11 . Αλλά από την προσεταιριστική ιδιότητα της σύνθεσης έχουμε ότι $(g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ 1_B = g_1$ άρα $g_1 = g_2$.

Από τα ανωτέρω έπεται ότι αν $f : A \longrightarrow B$ είναι 1-1 και επί τότε και η $f^{-1} : B \longrightarrow A$ είναι 1-1 και επί και η αντίστροφή της f^{-1} είναι η f.

Παράδειγμα 1.4.16 *Από τις απεικονίσεις στα παραδείγματα 1.4.3 μόνο η απεικόνιση σ, στο παράδειγμα (ε) είναι 1-1 και επί άρα μόνο αυτή έχει αντίστροφη.*

Η $\sigma^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ ορίζεται ως :

$$\sigma^{-1}(0) = 0, \sigma^{-1}(\kappa) = \begin{cases} 2\kappa & \text{αν } \kappa \text{ θετικός ακέραιος} \\ 2(-\kappa) - 1 & \text{αν } \kappa \text{ αρνητικός ακέραιος} \end{cases}$$

Πρόταση 1.4.17 *Αν $f : A \longrightarrow B$ και $g : B \longrightarrow \Gamma$ είναι 1-1 και επί τότε η $g \circ f : A \longrightarrow \Gamma$ είναι 1-1 και επί και $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι $f^{-1} \circ f = 1_A$ και $f \circ f^{-1} = 1_B$. Όπως επίσης $g^{-1} \circ g = 1_B$ και $g \circ g^{-1} = 1_\Gamma$. Από την προσεταιριστική ιδιότητα της σύνθεσης απεικονίσεων και την πρόταση 1.4.11 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) \\ &= g \circ (1_B \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = 1_\Gamma.\end{aligned}$$

Ανάλογα δείχνουμε ότι $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_A$.

Δηλαδή δείξαμε ότι η $g \circ f$ έχει μία αντίστροφη, την $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Αλλά ξέρουμε ότι αν μία απεικόνιση έχει αντίστροφη τότε αυτή είναι μοναδική, άρα $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ορισμός 1.4.18 *α) Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μία απεικόνιση και $M \subseteq X$. Η απεικόνιση $M \longrightarrow Y$ με $x \longmapsto f(x)$, λέγεται* **περιορισμός** *της f στο Μ και συμβολίζεται με $f|_M$.*

β) Έστω $\varrho : A \longrightarrow B$ μία απεικόνιση και Γ ένα σύνολο με $A \subseteq \Gamma$. Αν $\sigma : \Gamma \longrightarrow B$ είναι μία απεικόνιση τέτοια ώστε για κάθε $\alpha \in A$ ισχύει $\sigma(\alpha) = \rho(\alpha)$, τότε η σ λέγεται **επέκταση** *της ρ.*

Παράδειγμα 1.4.19 *Έστω η απεικόνιση $\rho : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ με $\nu \longmapsto -\nu$.*

Τότε οι απεικονίσεις

$\sigma_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *με* $\nu \longmapsto -\nu$

και

$$\sigma_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{με} \quad \sigma_2(\nu) = \begin{cases} -\nu & \text{αν ο ακέραιος } \nu \text{ είναι θετικός} \\ \nu & \text{αν ο ακέραιος } \nu \text{ είναι αρνητικός} \end{cases}$$

είναι επεκτάσεις της ρ.

Προφανώς $\sigma_1|_{\mathbb{N}} = \rho = \sigma_2|_{\mathbb{N}}$.

Ορισμός 1.4.20 *Έστω Α,Β σύνολα. Τότε η απεικόνιση $\pi_1 : A \times B \longrightarrow A$ με $(\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha$ λέγεται* **προβολή** *στον πρώτο όρο του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$.*

Ανάλογα ορίζεται και η προβολή, π_2, στον δεύτερο όρο του $A \times B$.

Παρατήρηση 1.4.21 *Ο ορισμός της απεικόνισης που δώσαμε, Ορισμός 1.4.1, δεν είναι διατυπωμένος αυστηρά στη γλώσσα των συνόλων.*

Ένας αυστηρός ορισμός είναι ο ακόλουθος: Μια απεικόνιση f είναι μια διατεταγμένη τριάδα (X, Y, R) όπου X, Y είναι σύνολα και R ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$ έτσι ώστε:

(i) για κάθε $x \in X$ υπάρχει $y \in Y$, ώστε $(x, y) \in R$

(ii) για κάθε $x \in X$, αν (x, y) και $(x, y') \in R$ τότε $y = y'$.

Παρατηρούμε ότι μια απεικόνιση $f = (X, Y, R)$ είναι μια ειδικής μορφής διμελής σχέση από το X στο Y.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (i) Ποιές από τις ακόλουθες απεικονίσεις είναι 1-1 ; , ποιές είναι επί;

$$f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, x \longmapsto x^2$$
$$f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto x^2$$
$$f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto x^3$$
$$f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3$$
$$f_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, x \longmapsto x+1$$

   (ii) Είναι οι συναρτήσεις $f_5 \circ f_1$ και $f_1 \circ f_5$ ίσες;

2. Έστω $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ η προβολή στον πρώτο όρο. Αν $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι υπάρχει μία 1-1 και επί απεικόνιση απο το σύνολο $\pi_1^{-1}(r_1)$ στο $\pi_1^{-1}(r_2)$

3. Έστω $f : A \longrightarrow B$ μια απεικόνιση, $X, Y \subseteq A$ και $\Gamma, \Delta \subseteq B$. Να δειχθεί ότι:

   i) Αν $X \subseteq Y$ τότε $f(X) \subseteq (Y)$

   (ii) Αν $\Gamma \subseteq \Delta$ τότε $f^{-1}(\Gamma) \subseteq f^{-1}(\Delta)$

   (iii) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$

   (iv) $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

4. Έστω $f : A \longrightarrow B$ μία απεικόνιση, $X, Y \subseteq A$ και $\Gamma, \Delta \subseteq B$. Να δειχθεί ότι:

   (i) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

   (ii) $f^{-1}(\Gamma \cup \Delta) = f^{-1}(\Gamma) \cup f^{-1}(\Delta)$

   (iii) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

   (iv) $f^{-1}(\Gamma \cap \Delta) = f^{-1}(\Gamma) \cap f^{-1}(\Delta)$

   Να δειχθεί επίσης ότι στο γ) έχουμε ισότητα για κάθε $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, αν και μόνο αν η f είναι 1-1.

4) Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μία απεικόνιση.

Έστω τώρα I ένα μή κενο σύνολο και έστω ότι για κάθε $i \in I$ μας δίνεται ένα σύνολο A_i με $A_i \in \mathcal{P}(X)$ και ένα σύνολο B_i με $B_i \in \mathcal{P}(Y)$.

Να δειχθεί ότι

(i) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

(ii) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

(iii) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

(iv) Αν η f είναι 1-1 τότε να δειχθεί ότι $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

5) Έστω $f : A \longrightarrow B$ και $\varrho : B \longrightarrow \Gamma$ δύο απεικονίσεις. Να δειχθεί ότι

$\alpha)$ Αν η $\varrho \circ f$ είναι επί, τότε η ϱ είναι επί.

$\beta)$ Αν η $\varrho \circ f$ είναι 1-1, τότε η f είναι 1-1.

6) Έστω $f : A \longrightarrow A$ μία απεικόνιση και $B, \Gamma \subseteq A$. Είναι σωστό ότι αν η $f|_B$ είναι 1-1 και η $f|_\Gamma$ είναι 1-1, τότε και η $f|_{B\cup\Gamma}$ είναι 1-1;

7) Έστω $f : A \longrightarrow B$ μία απεικόνιση. Να δειχθεί ότι:

$i)$ Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν για κάθε $\beta \in f(A)$, $\mid f^{-1}(\{\beta\}) \mid = 1$

$ii)$ Η f είναι επί αν και μόνο αν για κάθε $\beta \in B$, $f^{-1}(\{\beta\}) \neq \emptyset$

8) Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μία απεικόνιση. Τότε ορίζονται δύο απεικονίσεις:

$\overline{f} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ $\mu\epsilon$ $A \longmapsto f(A)$

και $\overline{f^{-1}} : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ $\mu\epsilon$ $B \longmapsto f^{-1}(B)$.

Να δειχθεί ότι αν η f είναι επί τότε $\overline{f} \circ \overline{f^{-1}} = 1_{\mathcal{P}(Y)}$ και αν η f είναι 1-1, τότε $\overline{f^{-1}} \circ \overline{f} = 1_{\mathcal{P}(X)}$.

9) (i) Έστω A,B δύο σύνολα και έστω S το σύνολο όλων των απεικονίσεων $f : \{1, 2\} \longrightarrow A \cup B$ με $f(1) \in A$ και $f(2) \in B$.

Να δειχθεί ότι υπάρχει μία 1-1 και επί απεικόνιση από το S στο $A \times B$.

(ii) Έστω A ένα σύνολο και ν ένας φυσικός αριθμός. Αν M είναι το σύνολο όλων των απεικονίσεων $f : \{1, 2, 3, \cdots, \nu\} \longrightarrow A$, τότε να δειχθεί ότι υπάρχει μία 1-1 και επί απεικόνιση από το M στο $A^\nu = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{\nu-\text{φορές}}$.

10) Μία απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ λέγεται **σταθερή** αν $f(\alpha) = f(\alpha')$ για κάθε $\alpha, \alpha' \in A$. Να δειχθεί ότι αν $f, \varrho : A \longrightarrow A$ είναι σταθερές απεικονίσεις και $f \neq \varrho$, τότε $\varrho \circ f \neq f \circ \varrho$.

11) Έστω $f : X \longrightarrow X$ μία απεικόνιση. Να δειχθεί ότι η f είναι σταθερή αν και μόνο αν για κάθε απεικόνιση $g : X \longrightarrow X$, έχουμε $f \circ g = f$.

12) Να βρεθεί μία 1-1 και επί απεικόνιση $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{M}$, όπου $M \subsetneqq \mathbb{N}$.

13) Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μία 1-1 απεικόνιση. Να ορίσετε μία απεικόνιση $\varrho : Y \longrightarrow X$ με $\varrho \circ f = 1_X$.

    Δώστε παράδειγμα απεικονίσεων $\sigma, \tau : A \longrightarrow A$ με $\tau \circ \sigma = 1_A$ και $\sigma \circ \tau \neq 1_A$.

14) Έστω $f, g : X \longrightarrow Y$ δύο απεικονίσεις. Να δειχθεί ότι:

    (i) $f = g$ αν και μόνο αν για κάθε απεικόνιση $h : Y \longrightarrow \{3, 7\}$ ισχύει $h \circ f = h \circ g$.

    (ii) $f = g$ αν και μόνο αν για κάθε απεικόνιση $\sigma : \{3\} \longrightarrow X$ ισχύει ότι $f \circ \sigma = g \circ \sigma$.

15) Έστω $A = A_1 \times A_2$ και R_1, R_2 σχέσεις ισοδυναμίας στα A_1, A_2 αντίστοιχα. Έστω R η σχέση στο Α που ορίζεται ως εξής:

    $(\alpha_1, \alpha_2)R(\beta_1, \beta_2)$ αν $\alpha_1 R \beta_1$ και $\alpha_2 R_2 \beta_2$.

    Να δειχθεί ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας και ότι υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία από το σύνολο A/R στο $A_1/R_1 \times A_2/R_2$.

16) Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μία απεικόνιση. Να εξετασθεί αν το σύνολο

    $\{f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{P}(X) \mid y \in f(X)\}$ είναι μία διαμέριση του X.

1.5 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Θα αποδείξουμε την αρχή της επαγωγής χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ιδιότητα των φυσικών αριθμών.

Αξίωμα του ελαχίστου ή Αξίωμα καλής διάταξης

Κάθε μή κενό υποσύνολο M των φυσικών αριθμών περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή, υπάρχει $m_1 \in M$ τέτοιο ώστε $m_1 \leq m$ για κάθε $m \in M$.

Θεώρημα 1.5.1 (Μαθηματική επαγωγή η Αρχή της επαγωγής) *Έστω ότι σε κάθε φυσικό αριθμό ν αντιστοιχεί μία πρόταση $p(\nu)$ που αφορά το ν και έστω ότι*

(i) Η $p(1)$ αληθεύει, και

(ii) για κάθε φυσικό αριθμό μ, αν η $p(\mu)$ αληθεύει τότε η $p(\mu + 1)$ αληθεύει

Τότε η $p(\nu)$ αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Απόδειξη. Έστω S το υποσύνολο του $\mathbb{N}$ που έχει ως στοιχεία τα $\nu \in \mathbb{N}$ για τα οποία η πρόταση $p(\nu)$ δεν αληθεύει, $S = \{\nu \in \mathbb{N} \mid p(\nu)$ δεν αληθεύει $\}$. Θα δείξουμε ότι $S = \emptyset$. Έστω ότι $S \neq \emptyset$. Τότε από το αξίωμα ελαχίστου, το S περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο έστω μ. Από την υπόθεση (i) έχουμε ότι $\mu > 1$. Από τον ορισμό του μ, έχουμε ότι η πρόταση $p(\mu - 1)$ αληθεύει. Τότε όμως από την υπόθεση (ii) έπεται ότι και η $p(\mu)$ αληθεύει , που είναι άτοπο.

Μία άλλη μορφή της μαθηματικής επαγωγής είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 1.5.2 (Δεύτερη μορφή της επαγωγής) *Έστω ότι σε κάθε φυσικό αριθμό ν αντιστοιχεί μία πρόταση $p(\nu)$, που αφορά το ν και έστω ότι*

(*i*) *Η $p(1)$ αληθεύει, και*

(*ii*) *Για κάθε φυσικό αριθμό μ, αν η $p(r)$ αληθεύει για κάθε $r \leq \mu$, τότε η $p(\mu+1)$ αληθεύει*

Τότε η $p(\nu)$ αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $S = \{\nu \in \mathbb{N} \mid p(\nu)$ δεν αληθεύει $\}$ είναι κενό. Αν το S δεν είναι κενό, τότε λόγω του αξιώματος του ελαχίστου, θα περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο, έστω μ. Από την υπόθεση (i) έχουμε ότι $\mu > 1$. Από τον ορισμό του μ προκύπτει ότι η πρόταση $p(r)$ αληθεύει για κάθε $r \leq \mu - 1$. Από την υπόθεση (ii) έχουμε ότι η $p(\mu)$ αληθεύει, που είναι άτοπο.

Παρατήρηση 1.5.3 *Η υπόθεση (i) στα προηγούμενα δύο θεωρήματα λέγεται συνήθως «αρχικό βήμα της επαγωγής» ενώ η υπόθεση (ii) « επαγωγικό βήμα ».*

Επίσης, συνήθως η υπόθεση « αν η $p(\nu)$ αληθεύει » στην (ii) του θεωρήματος 1.5.1 (αντίστοιχα «αν η $p(r)$ αληθεύει για κάθε $r \leq \mu$ ») στην (ii) του θεωρήματος 1.5.2 λέγεται « υπόθεση επαγωγής ».

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα, παρατηρούμε ότι

Παρατήρηση 1.5.4 *Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε ξέρουμε ότι:*
$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ *(προσεταιριστική ιδιότητα).*

Δηλαδή, αν προσθέσουμε το άθροισμα των α και β με το γ τότε το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό που βρίσκουμε αν προσθέσουμε το α με το άθροισμα των β και γ. Συνεπώς δεν έχει σημασία πως « μπαίνουν οι παρενθέσεις .»

Άρα μπορούμε να παραστήσουμε, χωρίς κίνδυνο σύγχυσης, τον αριθμό
$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ *ως* $\alpha+\beta+\gamma$.

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή ως προς ν ότι με όποιο τρόπο και να προσθέσουμε τα $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$, δηλαδή με όποιο τρόπο και να « βάλουμε τις παρενθέσεις » το αποτέλεσμα είναι πάντα το ίδιο και το συμβολίζουμε με
$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu$ *ή* $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i$

(π.χ. $(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_3+\alpha_4) = \alpha_1+(\alpha_2+(\alpha_3+\alpha_4)) = ((\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3)+\alpha_4 = (\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3)+\alpha_4)$*.)*

Έστω B ένα πεπερασμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών και έστω
$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu$ *τα στοιχεία του B.*

Αν $\phi : \{1, 2, \cdots, \nu\} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, \nu\}$ είναι μία 1-1 και επί απεικόνιση, τότε μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή ως πρός ν ότι
$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu = \beta_{\phi(1)}+\beta_{\phi(2)}+\cdots+\beta_{\phi(\nu)}$,

χρησιμοποιώντας επιπλέον την αντιμεταθετική ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, δηλαδή ότι $r_1+r_2 = r_2+r_1$ για κάθε $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Άρα χωρίς κίνδυνο σύγχυσης μπορούμε να παραστήσουμε το
$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu$ *με* $\sum_{\beta \in B} \beta$.

Παράδειγμα 1.5.5

$$(\star) \quad \sum_{i=1}^{\nu} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2 = (1/6)\nu(\nu+1)(2\nu+1) \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή.

Η $p(\nu)$ είναι η ισότητα $(\star)$.

Η $p(1)$ αληθεύει, πράγματι $\sum_{i=1}^{1} = 1^2 = (1/6)1 \cdot (2+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)$

Με την υπόθεση ότι ισχύει η $p(\mu)$ θα δείξουμε ότι ισχύει η $p(\mu+1)$.

Έστω ότι ισχύει η $p(\mu)$, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{\mu} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \mu^2 = (1/6)\mu(\mu+1)(2\mu+1)$$

Τότε

$\sum_{i=1}^{\mu+1} i^2 = \sum_{i=1}^{\mu} i^2 + (\mu+1)^2 = (1/6)\mu(\mu+1)(2\mu+1) + (\mu+1)^2$

$= (1/6)(\mu+1)\left[\mu(2\mu+1) + 6(\mu+1)\right] = (1/6)(\mu+1)(2\mu^2+7\mu+6) = (1/6)(\mu+1)(\mu+2)(2\mu+3)$.

Άρα δείξαμε ότι ισχύει η $p(\mu+1)$.

Συνεπώς από την αρχή της επαγωγής έπεται ότι η $(\star)$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Παράδειγμα 1.5.6 *Έστω x ένας πραγματικός αριθμός με $x \neq 1$, τότε*

$$(\star) \quad \sum_{i=0}^{\nu} x^i = 1 + x + x^2 + \cdots + x^\nu = \frac{1-x^{\nu+1}}{1-x}, \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή.

Η $p(\nu)$ είναι η ισότητα $(\star)$.

Η $p(1)$ αληθεύει, πράγματι $\sum_{i=0}^{1} x^i = 1 + x = \frac{1-x^2}{1-x}$.

Με την υπόθεση ότι ισχύει η $p(\mu)$ θα δείξουμε ότι ισχύει η $p(\mu+1)$.

Έστω ότι ισχύει η $p(\mu)$, δηλαδή

$$\sum_{i=0}^{\mu} x^i = 1 + x + x^2 + \cdots + x^\mu = \frac{1-x^{\mu+1}}{1-x}$$

τότε

$$\sum_{i=0}^{\mu+1} x^i = \sum_{i=0}^{\mu} x^i + x^{\mu+1} = \frac{1-x^{\mu+1}}{1-x} + x^{\mu+1} = \frac{1-x^{\mu+1}+x^{\mu+1}(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{\mu+2}}{1-x}$$

Άρα δείξαμε ότι αληθεύει η $p(\mu+1)$.

Συνεπώς από την αρχή της επαγωγής έπεται ότι η $(\star)$ αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Παρατήρηση 1.5.7 *Συχνά οι επαγωγικές αποδείξεις δεν αρχίζουν από τον αριθμό 1 αλλά από κάποιο μεγαλύτερο. Ισχύουν τα αντίστοιχα των θεωρημάτων 1.5.1 και 1.5.2 και στην περίπτωση αυτή.*

Για παράδειγμα αναφέρουμε

Θεώρημα 1.5.8 (Δεύτερη μορφή της επαγωγής με αρχικό βήμα στο κ) *Έστω κ ένας φυσικός αριθμός και έστω ότι σε κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq \kappa$ αντιστοιχεί μία πρόταση $p(\nu)$ που αφορά το ν. Έστω επιπλέον ότι*

(ι) Η $p(\kappa)$ αληθεύει, και

(ιι) Για κάθε φυσικό αριθμό $\mu \geq \kappa$, αν η $p(r)$ αληθεύει για κάθε $\kappa \leq r \leq \mu$, τότε η $p(\mu+1)$ αληθεύει

Τότε η $p(\nu)$ αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq \kappa$.

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 1.5.9 *Ένας φυσικός αριθμός $p \geq 2$ λέγεται* **πρώτος** *αν δεν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο μικροτέρων φυσικών αριθμών.*

Θα δείξουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός $\nu \geq 2$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο (ενός ή περισσοτέρων) πρώτων αριθμών.

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή.

Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 1.5.8 .

Για $\nu = 2$ ο ισχυρισμός ισχύει αφού ο 2 είναι πρώτος.

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για όλους τους φυσικούς r με $2 \leq r \leq \mu$. Θα δείξουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για τον $\mu+1$. Αν ο $\mu+1$ είναι πρώτος, τότε έχουμε τελειώσει. Αν ο $\mu+1$ δεν είναι πρώτος τότε $\mu+1 = \mu_1\mu_2$ με $\mu_1 < \mu+1, \mu_2 < \mu+1$. Αλλά τότε από την υπόθεση επαγωγής οι αριθμοί μ_1 και μ_2 ή είναι πρώτοι ή γινόμενα πρώτων άρα και το γινόμενό τους, δηλαδή ο αριθμός $\mu+1$, είναι γινόμενο πρώτων.

Το αποτέλεσμα τώρα έπεται από το θεώρημα 1.5.8 .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να δειχθεί ότι

   (α) Ο φυσικός αριθμός $8^{\nu+1} + 9^{2\nu-1}$ είναι ένα πολλαπλάσιο του 73 για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

   (β) $\sum_{i=1}^{\nu}(-1)^i i^2 = \frac{1}{2}(-1)^\nu \nu(\nu+1)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

   (γ) $2\nu \leq 2^\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

   (δ) $\sum_{i=1}^{\nu} i! < (\nu+1)!$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

2) Έστω A ένα πεπερασμένο σύνολο με ν στοιχεία. Να δειχθεί ότι το πλήθος των στοιχείων του $\mathcal{P}(A)$ είναι 2^ν.

3) Έστω κ ένας φυσικός αριθμός και $M \subseteq \{1, 2, \cdots, \kappa\}$, τέτοιο ώστε:

   (i) $1 \in M$

   (ii) Αν $\lambda \in \{1, 2, \cdots, \kappa-1\}$ και $\lambda \in M$ τότε $\lambda+1 \in M$.

Τότε να δειχθεί ότι $M = \{1, 2, \cdots, \kappa\}$

4) (i) Έστω A,B δύο πεπερασμένα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών με $A \cap B = \emptyset$.
Τότε να δειχθεί ότι $\sum_{x \in A \cap B} x = \sum_{\alpha \in A} \alpha + \sum_{\beta \in B} \beta$

(ii) Έστω $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ πεπερασμένα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών με $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j, 1 \leq i, j \leq \nu$
Τότε να δειχθεί ότι
$\sum_{x \in \cup_{i=1}^{\nu} A_i} x = \sum_{x \in A_1} x + \sum_{x \in A_2} x + \cdots + \sum_{x \in A_\nu} x$
Το άθροισμα $\sum_{x \in A_1} x + \sum_{x \in A_2} x + \cdots + \sum_{x \in A_\nu} x$ το συμβολίζουμε με $\sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{x \in A_i} x \right)$

5) Έστω A,B δύο πεπερασμένα σύνολα και $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ μία απεικόνιση.
Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ και $B = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu\}$, να δειχθεί ότι

(i) $\sum_{x \in A \times B} f(x) = \sum_{\beta \in B} f(\alpha_1, \beta) + \sum_{\beta \in B} f(\alpha_2, \beta) + \cdots + \sum_{\beta \in B} f(\alpha_\nu, \beta)$
και

(ii) $\sum_{x \in A \times B} f(x) = \sum_{\alpha \in A} f(\alpha, \beta_1) + \sum_{\alpha \in A} f(\alpha, \beta_2) + \cdots + \sum_{\alpha \in A} f(\alpha, \beta_\mu)$

- Το δεύτερο μέλος της (i) το γράφουμε ως $\sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{\beta \in B} f(\alpha, \beta) \right)$
- Το δεύτερο μέλος της (ii) το γράφουμε ως $\sum_{\beta \in B} \left(\sum_{\alpha \in A} f(\alpha, \beta) \right)$

Συνεπώς από (i) και (ii) έπεται ότι
$\sum_{x \in A \times B} f(x) = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{\beta \in B} f(\alpha, \beta) \right) = \sum_{\beta \in B} \left(\sum_{\alpha \in A} f(\alpha, \beta) \right)$

Υπόδειξη για τη λύση Χρησιμοποιήστε τις ασκήσεις: άσκηση 3 σελ. 16 , άσκηση 3α) σελ. 21 , και ασκηση 4 σελ. 26

Παρατήρηση

Η άσκηση 5) γενικεύεται ως εξής:

Έστω S ένα σύνολο και $A_1, A_2, \cdots, A_\kappa$ πεπερασμένα υποσύνολα του S.

Αν $f : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_\kappa \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μία απεικόνιση, τότε ισχύει ότι

$\sum_{x \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_\kappa} f(x) = \sum_{x_\kappa \in A_\kappa} \left(\cdots \left(\sum_{x_2 \in A_2} \left(\sum_{x_1 \in A_1} f(x_1, x_2, \cdots, x_\kappa) \right) \right) \right)$
$= \sum_{x_{\phi(\kappa)} \in A_{\phi(\kappa)}} \left(\cdots \left(\sum_{x_{\phi(2)} \in A_{\phi(2)}} \left(\sum_{x_{\phi(1)} \in A_{\phi(1)}} f(x_1, x_2, \cdots, x_\kappa) \right) \right) \right)$
για κάθε απεικόνιση $\phi : \{1, 2, \cdots, \kappa\} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, \kappa\}$ 1-1 και επί.

Κεφάλαιο 2

ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο αναγνώστης έχει ήδη συναντήσει συστήματα γραμμικών εξισώσεων στο Λύκειο και έχει αποκτήσει κάποια γνώση στο πως να τα λύνει . Τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων είναι τα απλούστερα συστήματα εξισώσεων που απαντώνται είτε στην μαθηματική επιστήμη καθ' εαυτή είτε στις εφαρμογές και διασυνδέσεις της με άλλες επιστήμες. Συνεπώς είναι εύλογο να υποθέσει κανείς ότι αν δεν αποκτήσουμε μία καλή γνώση αντιμετώπισης γραμμικών συστημάτων τότε δεν έχουμε σοβαρές ελπίδες να εμβαθύνουμε σε συστήματα που δεν είναι γραμμικά. Στην γνώση αυτή το σύγραμμα αυτό εμβαθύνει κατά διάφορους τρόπους. Στο κεφάλαιο αυτό θα συστηματοποιήσουμε την μέθοδο αριθμητικής λύσης γραμμικών συστημάτων, και αυτό θα γίνει μέσω της θεωρίας των πινάκων, η οποία παρέχει την κατάλληλη γλώσσα προς τον σκοπό αυτό. Στην συνέχεια η μέθοδος λύσης των γραμμικών συστημάτων που αναπτύξαμε θα συμβάλλει στην περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας των πινάκων. Ετσι λοιπόν τα δύο θέματα του κεφαλαίου αυτού θα αναπτυχθούν σε μιά σχέση αλληλοεξάρτησης.

Ισως η πρώτη εμφάνιση της ιδέας της χρήσης της γλώσσας των πινάκων στην λύση γραμμικών συστημάτων, σε πρωτόλεια μορφή, είναι στο κείμενο «Εννέα Κεφάλαια της Τέχνης των Μαθηματικών» ένα κινέζικο κείμενο στην περίοδο της Δυναστίας ΗΑΝ περί το 200πχ. Θεωρεί το εξής πρόβλημα: Εχουμε τριών ειδών καλαμπόκι που είναι τοποθετημένο σε δοχεία. Για κάθε είδος καλαμποκιού τα αντίστοιχα δοχεία περιέχουν την αυτή ποσότητα, η οποία όμως μας είναι άγνωστη και επίσης δεν είναι αναγκαστικά η ίδια για όλα τα είδη καλαμποκιού. Εξ άλλου είναι γνωστό ότι ένα δοχείο του πρώτου είδους και δύο δοχεία του δευτέρου και τρία δοχεία του τρίτου είδους είναι συνολικά 26 μονάδες βάρους. Επίσης είναι γνωστό ότι δύο δοχεία του πρώτου είδους και τρία δοχεία του δεύτερου και ένα δοχείο του τρίτου είναι συνολικά 34 μονάδες βάρους. Τέλος είναι γνωστό ότι τρία δοχεία του πρώτου είδους και δύο δοχεία του δεύτερου και ένα δοχείο του τρίτου είναι συνολικά 39 μονάδες βάρους. Ζητείται να βρεθεί πόσες μονάδες βάρους περιέχει το ένα δοχείο για κάθε είδος καλαμποκιού.

Με βάση τα όσα μαθαίνει κανείς στο λύκειο, ονομάζοντας x, y, z το βάρος ένος δοχείου από το πρώτο, δεύτερο και τρίτο είδος καλαμποκιού αντίστοιχα, οδηγούμεθα στο παρακάτω σύστημα τριών γραμμικών εξισώσεων με τρείς αγνώστους

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z &= 26 \\
2x + 3y + z &= 34 \\
3x + 2y + z &= 39
\end{aligned}
$$

Το σύστημα αυτό λύνεται με βάση τα όσα διδάσκονται στο λύκειο και δίνει την λύση

$$x = 37/4 \quad y = 17/4 \quad z = 11/4$$

Ο συγγραφέας του κινέζικου κειμένου φτιάχνει τον παρακάτω πίνακα

$$
\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 2 \\
3 & 1 & 1 \\
26 & 34 & 39
\end{array}
$$

που κατ ουσίαν σήμερα θα τον λέγαμε Επαυξημένο πίνακα του συστήματος. Η αλήθεια είναι ότι ο πίνακας αυτός είναι ο Ανάστροφος, (βλέπε σελίδα 34), αυτού που συνήθως χρησιμοποιούμε σήμερα, όμως η μαθηματική ουσία είναι η ίδια. Υποδεικνύει λοιπόν στον αναγνώστη να πολλαπλασιάσει την μεσαία στήλη με το 3 και μετά να αφαιρέσει την τρίτη στήλη « τόσες φορές όσες είναι δυνατόν». Στη συνέχεια κάνει το ίδια και για την πρώτη στήλη, οπότε οδηγούμεθα στον πίνακα

$$
\begin{array}{ccc}
0 & 0 & 3 \\
4 & 5 & 2 \\
8 & 1 & 1 \\
39 & 24 & 39
\end{array}
$$

Στην συνέχεια η πρώτη στήλη πολλαπλασιάζεται με το 5 και η δεύτερη στήλη αφαιρείται από αυτήν « τόσες φορές όσες είναι δυνατόν» οπότε οδηγούμεθα στον πίνακα

$$
\begin{array}{ccc}
0 & 0 & 3 \\
0 & 5 & 2 \\
36 & 1 & 1 \\
99 & 24 & 39
\end{array}
$$

οπότε οδηγούμεθα στην λύση

$$x = 37/4 \quad y = 17/4 \quad z = 11/4$$

Ασφαλώς είναι έντονη και εντυπωσιακή η ομοιότητα με την μέθοδο Απαλοιφή του $Gauss$, (βλέπε σελίδα 46), η οποία δεν ήταν ευρέως διαδεδομένη προ του 19ου αιώνα.

2.2 ΠΙΝΑΚΕΣ

Ξεκινάμε με μια αναφορά σε ορισμένα βασικά σύμβολα.

Ορισμός 2.2.1 *Με το σύμβολο $\mathbb{F}$ θα δηλώνουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ των Πραγματικών Αριθμών η το σύνολο $\mathbb{C}$ των Μιγαδικών Αριθμών , (εκτός αν δηλωθεί σαφώς κάτι άλλο). Επίσης τα σύμβολα ν, n και μ, m θα δηλώνουν θετικούς ακέραιους αριθμούς (εκτός αν δηλωθεί σαφώς κάτι άλλο).*

Ορισμός 2.2.2 *Με το σύμβολο $\mathbb{F}^\nu$ συμβολίζουμε το σύνολο των διατεταγμένων ν-αδων*

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu)$$

, όπου τα $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$, είναι στοιχεία του συνόλου $\mathbb{F}$.

Συχνά τα στοιχεία του $\mathbb{F}^\nu$ ονομάζονται **Διανύσματα**

Ακολουθεί ο βασικός ορισμός του κεφαλαίου αυτού και ασφαλώς ένας από τους 3-4 σημαντικότερους ορισμούς του βιβλίου αυτού.

Ορισμός 2.2.3 *Έστω ν και μ είναι θετικοί ακέραιοι. Ονομάζουμε **«Πίνακα ν γραμμών και μ στηλών, επί του $\mathbb{F}$»**, μία διάταξη σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου, που περιέχει $\nu \times \mu$ πλήθος στοιχείων του $\mathbb{F}$, τα οποία τοποθετούνται εντός μίας μεγάλης παρένθεσης ως κατωτέρω*

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & . & . & \mu \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ . \\ \nu \end{array} & \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & \alpha_{2\mu} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & . & . & . & \alpha_{\nu\mu} \end{pmatrix}
\end{array}$$

όπου για $i = 1, 2, ..., \nu$ και $j = 1, 2, ..., \mu$, το στοιχείο α_{ij} ανήκει στο $\mathbb{F}$

Συνήθως αντί για την πλήρη έκφραση «Πίνακας ν γραμμών και μ στηλών επί του $\mathbb{F}$ » θα λέμε «Πίνακας $\nu \times \mu$ ». Το σύμβολο « $\nu \times \mu$ » διαβάζεται « ν επί μ »

Το στοιχείο α_{ij} ευρίσκεται πάνω στην τομή της i -οστής γραμμής και j -οστής στήλης του πίνακα. Ο πρώτος δείκτης i δηλώνει την γραμμή και ο δεύτερος δείκτης j δηλώνει την στήλη επί των οποίων ευρίσκεται το στοιχείο α_{ij} . Συχνά θα αποκαλούμε το α_{ij} , ως (i , j)-**στοιχείο** του πίνακα (element of a matrix)

Ο παραπάνω πίνακας θα γράφεται συντομογραφικά $(\alpha_{ij})_{\nu\times\mu}$ η απλώς (α_{ij}). Έτσι η έκφραση $X = (\alpha_{ij})_{\nu\times\mu}$, σημαίνει ότι το X είναι πίνακας ν γραμμών και μ στηλών και ότι το (i, j) -στοιχείο του πίνακα είναι το α_{ij} .

Το σύνολο των πινάκων επί του $\mathbb{F}$ που έχουν ν γραμμές και μ στήλες, θα συμβολίζεται $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$. Στην ειδική περίπτωση $\nu = \mu$, οι πίνακες $\nu\times\nu$ ονομάζονται **Τετραγωνικοί** και το σύνολο τους συμβολίζεται $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.

Ορισμός 2.2.4 *Θεωρούμε έναν τετραγωνικό πίνακα $A = (a_{ij})_{\nu\times\mu}$. Τα στοιχεία του a_{ii} $i = 1, 2, ..., \nu$ ονομάζονται* ***Διαγώνια στοιχεία του πίνακα*** *.*

Ο A λέγεται ***Διαγώνιος πίνακας*** *άν όλα τα μη διαγώνια στοιχεία του είναι 0.*

Αν $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\nu)$ είναι μιά διατεταγμένη ν-αδα στοιχείων του $\mathbb{F}$, τότε ορίζουμε

$$D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\nu) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda_\nu \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2.2.5

Ο 3×3 πίνακας $X = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 2^3 & 2^4 & 2^5 \\ 2^4 & 2^5 & 2^6 \end{pmatrix}$ μπορεί να γραφτεί και ως $X = (\alpha_{ij})_{3\times3}$ όπου $\alpha_{ij} = 2^{(i+j)}$

Παράδειγμα 2.2.6

Ο $\nu \times \nu$ πίνακας $X = \begin{pmatrix} \pi^0 & \pi^{-1} & . & . & . & \pi^{1-\nu} \\ \pi^1 & \pi^0 & . & . & . & \pi^{2-\nu} \\ . & . & . & . & . & . \\ \pi^{\nu-1} & \pi^{\nu-2} & . & . & . & \pi^{\nu-\nu} \end{pmatrix}$ μπορεί να γραφτεί ως $X = (x_{ij})_{\nu\times\nu}$ όπου $x_{ij} = \pi^{(i-j)}$

Παράδειγμα 2.2.7

Ο 3×3 πίνακας

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

μπορεί να γραφτεί ως $A = (\alpha_{ij})_{3\times3}$, όπου $\alpha_{ij} = 1$.

ΣΧΟΛΙΟ. Ο παραπάνω ορισμός πίνακα, είναι μεν εύχρηστος, όμως δεν είναι διατυπωμένος αυστηρά στην γλώσσα των συνόλων, που είναι το σύνηθες στα μαθηματικά. Ένας αυστηρός ορισμός πίνακα, σε αυτό το επίπεδο θα ήταν και δύσχρηστος και δυσνόητος. Ένας αυστηρός ορισμός που θα εκφράσει την ιδέα του πίνακα όπως την περιγράψαμε, θα ήταν ο εξής: Κατ αρχάς εισάγουμε έναν σύντομο ορισμό:Έστω ότι κ, λ είναι οιοιδήποτε ακέραιοι αριθμοί και [κ , λ] είναι το σύνολο όλων των ακεραίων

x τέτοιων ώστε $k \leq x \leq l$. Συνεχίζοντες λοιπόν θεωρούμε λοιπόν το καρτεσιανό γινόμενο $[1, \nu] \times [1, \mu]$ και ένας πίνακας $\nu \times \mu$ A μπορεί να ορισθεί ως μία συνάρτηση A: $[1, \nu] \times [1, \mu] \longrightarrow F$. Όλη η θεωρία που θα αναπτύξουμε μπορεί να οικοδομηθεί στον ορισμό αυτό, όμως, φαίνεται να συμφωνούν όλοι οι ειδικοί και όλοι οι συγγραφείς ότι, για ένα εισαγωγικό μάθημα, η πραγματική κατανόηση θα ήταν μάλλον εξαιρετικά δυσχερής έως αδύνατη με έναν τέτοιο ορισμό. Είναι μία κατάσταση που κάποιες φορές είναι υποχρεωτική σε εισαγωγικά μαθηματικά μαθήματα.

Αφού λοιπόν δεν έχουμε έναν απολύτως αυστηρό ορισμό, (μεταξύ άλλων), θα πρέπει να εξηγήσουμε ποίους πίνακες θεωρούμε ίσους. Η κοινή λογική υπαγορεύει τον παρακάτω ορισμό ισότητας πινάκων.

Ορισμός 2.2.8 *Έστω ότι οι $A = (\alpha_{ij})_{\nu \times \mu}$ και $B = (\beta_{ij})_{\nu \times \mu}$ είναι δύο $\nu \times \mu$ πίνακες. Θα λέμε ότι «οι πίνακες A και B είναι **ίσοι**» (και θα το συμβολίζουμε « $A = B$ »), τότε και μόνον αν $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ για όλα τα i, j , για τα οποία ορίζονται τα σύμβολα αυτά.*

ΣΧΟΛΙΟ. Αν δύο πίνακες είναι ίσοι, τότε υποχρεωτικά έχουν ίδιο πλήθος γραμμών και ίδιο πλήθος στηλών.

Υπάρχουν δύο ειδικές κατηγορίες πινάκων που έχουν μία ιδιαίτερη σημασία. Είναι οι πίνακες που έχουν μία μόνον γραμμή και οι πίνακες που έχουν μία μόνον στήλη. Ακριβέστερα μιλάμε για του πίνακες $\nu \times 1$ και $1 \times \mu$. Αν τα $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_\mu$, , είναι στοιχεία του συνόλου $\mathbb{F}$, τότε έχουμε τους πίνακες $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_\nu \end{pmatrix}$ και $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\mu)$.

Οι πίνακες αυτοί ονομάζονται αντίστοιχα **Πίνακας Στήλη** και **Πίνακας Γραμμή**.

ΣΧΟΛΙΟ. Οι πίνακες γραμμή είναι τα γνωστά μας στοιχεία διανύσματα του $\mathbb{F}^\mu$, (βλέπε σελίδα 31). Δηλαδή τα σύνολα $\mathbb{F}^\mu$ και $\mathbb{F}^{1 \times \mu}$ είναι ίσα.

Κάθε πίνακας εμπεριέχει πίνακες γραμμές και πίνακες στήλες. Κατά κάποιο τρόπο οι πίνακες γραμμή και οι πίνακες στήλη μπορούν να θεωρηθούν οι δομικοί λίθοι εις τους οποίους αναλύεται κάθε πίνακας. Ο επόμενος ορισμός διαφωτίζει το θέμα.

Ορισμός 2.2.9 *Έστω ότι $A = (\alpha_{ij})_{\nu \times \mu}$ είναι ένας πίνακας ν γραμμών και μ στηλών, με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. (α) Έστω $1 \leq i \leq \nu$. Τότε το $r_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ...\alpha_{i\mu})$, ονομάζεται i **-γραμμή του πίνακα** A .*

*(β) Έστω $1 \leq j \leq \mu$. Τότε το $c_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{\nu j} \end{pmatrix}$ ονομάζεται j **-στήλη του πίνακα** A .*

Παράδειγμα 2.2.10

Θεωρούμε τον 3×3 πίνακα $X = (\alpha_{ij})_{3\times3}$ όπου $\alpha_{ij} = 2^{(i+j)}$. Τότε η δεύτερη γραμμή του είναι η (8, 16, 32), ενώ η τρίτη στήλη του είναι η $\begin{pmatrix} 2^4 \\ 2^5 \\ 2^6 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα 2.2.11

Έστω ότι $A = (\alpha_{ij})_{\nu\times\mu}$ είναι ένας πίνακας ν γραμμών και μ στηλών, με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Έστω ότι για $1 \leq i \leq \nu$,το r_i είναι η i -γραμμή του πίνακα και ότι για $1 \leq j \leq \mu$, το c_j είναι η j -στήλη του πίνακα A . Τότε ισχύουν οι ισότητες $A = (c_1, c_2, ..., c_\mu)$ και επίσης $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ . \\ . \\ . \\ r_\nu \end{pmatrix}$

Παράδειγμα 2.2.12

θεωρούμε τον 3×4 πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 10 & -12 \end{pmatrix}$$

Τότε η πρώτη και τρίτη γραμμή του είναι αντιστοίχως οι $(1, 0, 0, 2)$ και $(5, 6, 10, -12)$, ενώ η δεύτερη και τρίτη στήλη του είναι αντίστοιχα

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 2.2.13

Έστω A είναι ένας 3×3 πίνακας του οποίου η δεύτερη γραμμή είναι $(0, 4, 6)$ και η δεύτερη στήλη είναι $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Τότε ο πίνακας αυτός είναι της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \beta \\ 0 & 4 & 6 \\ \gamma & -2 & \delta \end{pmatrix}$$

όπου τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, είναι στοιχεία του πίνακα, που δεν μπορούν να προσδιοριστούν από τα στοιχεία που έχουμε.

Οι παρακάτω ορισμοί εισάγουν ορισμένες χρήσιμες έννοιες η σημασία των οποίων θα φανεί στην συνέχεια.

Ορισμός 2.2.14 *Έστω ότι $A = (\alpha_{ij})_{\nu\times\mu}$ είναι ένας πίνακας ν γραμμών και μ στηλών, με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Ορίζουμε τον μ γραμμών και ν στηλών πίνακα $A^t = (\beta_{ji})_{\mu\times\nu}$, που είναι πίνακας μ γραμμών και ν στηλών, όπου $\beta_{ji} = \alpha_{ij}$ για κάθε i με $1 \leq i \leq \nu$ και κάθε j με $1 \leq j \leq \mu$. Ο πίνακας A^t ονομάζεται* ***Ανάστροφος*** *του Α.*

Παράδειγμα 2.2.15

Αν Α είναι ο πίνακας του παραπάνω ορισμού, c_j είναι η j -στήλη του και r_i είναι η i -γραμμή του, τότε η j -γραμμή του A^t είναι η ${c_j}^t$ η δε i -στήλη του A^t είναι η ${r_i}^t$.

Παράδειγμα 2.2.16

Ο ανάστροφος του πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ είναι ο $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ενώ ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ είναι ανάστροφος του εαυτού του.

Παράδειγμα 2.2.17

Έστω A είναι ένας 3×3 πίνακας τέτοιος ώστε $A = A^t$. Επίσης ο πίνακας A έχει την μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ * & -4 & -1 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

(ΠΡΟΣΟΧΗ. Τα * δεν είναι τα ίδια) Ζητείται να βρεθούν τα $*$ με βάση τις παραπάνω πληροφορίες. Επειδή ο A είναι ανάστροφος του εαυτού του, θέτοντας $A = (\alpha_{ij})$, θα έχουμε $\alpha_{21} = \alpha_{12} = 2$, $\alpha_{31} = \alpha_{13} = 6$ και $\alpha_{32} = \alpha_{23} = -1$, άρα ο πίνακας είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ορισμός 2.2.18 *Έστω $A = (\alpha_{ij})_{\nu\times\nu}$ είναι ένας τετραγωνικός $\nu \times \nu$ πίνακας. Ο A ονομάζεται Άνω Τριγωνικός αν ισχύει $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$. Επίσης ο A ονομάζεται Κάτω Τριγωνικός αν ισχύει $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i < j$*

Τέλος ο A ονομάζεται Διαγώνιος Πίνακας αν ισχύει $\alpha_{ij} = 0$ όταν $i \neq j$.

Στην καθομιλουμένη θα λέγαμε ότι Άνω Τριγωνικός είναι ένας πίνακας του οποίου τα στοιχεία που είναι κάτω από την διαγώνιο είναι 0, ενώ ο Κάτω Τριγωνικός είναι εκείνος του οποίου είναι 0 όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την διαγώνιο. Τέλος Διαγώνιος είναι ο πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία εκτός της διαγωνίου είναι 0.

Παράδειγμα 2.2.19

Ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

είναι άνω τριγωνικός, ο

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

είναι κάτω τριγωνικός ενώ ο

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

είναι Διαγώνιος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.2

1. Να γράψετε τον 4×4 πίνακα $X = (x_{ij})_{4\times 4}$, που τα στοιχεία του ικανοποιούν την σχέση $x_{ij} = ij$

2. Να γράψετε τον 3×3 πίνακα $X = (x_{ij})_{3\times 3}$, που τα στοιχεία του ικανοποιούν την σχέση $x_{ij} = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ i+j>2 \\ i+2j, & \alpha\nu\ i+j \le 2 \end{cases}$

3. Να γράψετε τον $\nu \times \nu$ πίνακα $X = (x_{ij})_{\nu\times \nu}$, που τα στοιχεία του ικανοποιούν την σχέση $x_{ij} = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ i+j>2 \\ i+2j, & \alpha\nu\ i+j = 2 \\ -i, & \alpha\nu\ i+j<2 \end{cases}$

4. Να γράψετε τον 5×5 πίνακα $X = (x_{ij})_{5\times 5}$, που τα στοιχεία του ικανοποιούν την σχέση x_{ij} = το ελάχιστο των i και j .

5. Έστω $A = (\alpha_{ij})_{\nu\times\nu}$, είναι ένας $\nu \times \nu$ πίνακας.

   α) Να περιγραφεί ο πίνακας $B = (\beta_{ij})_{\nu\times\nu}$,όπου $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$.

   β)Να περιγραφεί ο πίνακας $B = (\beta_{ij})_{\nu\times\nu}$,όπου $\beta_{ij} = \alpha_{(\nu+1-i)\,j}$.

6. Έστω ότι Α είναι νας πίνακας. Να αποδειχθεί ότι

   α) $A = (A^t)^t$.

   β) Αν ο A είναι ανάστροφος του εαυτού του, τότε είναι τετραγωνικός.

   γ) Ο A είναι άνω τριγωνικός τότε και μόνον τότε αν ο A^t είναι κάτω τριγωνικός.

   δ) Ο A είναι διαγώνιος τότε και μόνον τότε αν είναι άνω και κάτω τριγωνικός

2.3 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Το σύνολο των πινάκων ν γραμμών και μ στηλών, έχει έναν αλγεβρικό λογισμό που έχει πολλά κοινά στοιχεία με τον κλασσικό αλγεβρικό λογισμό των πραγματικών και των μιγαδικών αριθμών. Υπάρχουν όμως και διαφορές τις οποίες πρέπει να προσέχει κανείς, (βλέπε σελίδα 56) . Στην ενότητα αυτή θα εισαγάγουμε και θα μελετήσουμε τις πιο απλές πλευρές αυτού του λογισμού, και επιφυλασσόμεθα να δούμε αργότερα βαθύτερες πλευρές του, καθώς θα προχωρούμε να αντιμετωπίσουμε μέσω αυτού, βαθύτερα προβλήματα.

Ορισμός 2.3.1 *Έστω ότι*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & \alpha_{2\mu} \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & . & . & . & \alpha_{\nu\mu} \end{pmatrix}$$

και

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & . & . & . & \beta_{1\mu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & . & . & . & \beta_{2\mu} \\ . & . & . & . & . & . \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} & . & . & . & \beta_{\nu\mu} \end{pmatrix}$$

είναι πίνακες του $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ και λ στοιχείο του $\mathbb{F}$. Τότε

*α) Αν $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i = 1, 2, ..., \nu$ και κάθε $j = 1, 2, ..., \mu$, τότε ο πίνακας λέγεται **Μηδενικός Πίνακας** , και συμβολίζεται $\mathbb{O}_{\nu\times\mu}$. Όταν είναι σαφές από τα συμφραζόμενα ποιά είναι τα ν και μ, τότε γράφουμε απλώς $\mathbb{O}$.*

*β) Θεωρούμε τον πίνακα $(x_{ij})_{\nu\times\mu}$ όπου $x_{ij} = -\alpha_{ij}$, για $1 \leq i \leq \nu$ και $1 \leq j \leq \mu$. Τότε ο πίνακας $(x_{ij})_{\nu\times\mu}$ ονομάζεται **Αντίθετος η Προσθετικός Αντίστροφος** του A και συμβολίζεται -A.*

*γ) Θεωρούμε τον πίνακα $(x_{ij})_{\nu\times\mu}$ όπου $x_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$, για $1 \leq i \leq \nu$ και $1 \leq j \leq \mu$. Τότε ο πίνακας $(x_{ij})_{\nu\times\mu}$ ονομάζεται **Άθροισμα** του A στον B και συμβολίζεται A+B.*

*δ) Θεωρούμε τον πίνακα $(x_{ij})_{\nu\times\mu}$ όπου $x_{ij} = \lambda\alpha_{ij}$, για $1 \leq i \leq \nu$ και $1 \leq j \leq \mu$. Τότε ο πίνακας $(x_{ij})_{\nu\times\mu}$ ονομάζεται **Γινόμενο** του λ επί του A και συμβολίζεται λ·A η λA. (Πολλές φορές, για να ξεχωρίζει το γινόμενο αυτό από ένα άλλο γινόμενο πινάκων για τα οποίο θα μάθουμε πιο κάτω, το ανωτέρω γινόμενο ονομάζεται **Βαθμωτό Γινόμενο***

Το παρακάτω Θεώρημα συγκεντρώνει τις βασικές ιδιότητες των παραπάνω αθροίσματος και γινομένου

Θεώρημα 2.3.2 *Έστω ότι τα A, B, Γ είναι πίνακες του $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$, και a, b είναι στοιχεία του $\mathbb{F}$. Τότε ισχύουν τα εξής*

α) $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$

*Λόγω της προηγούμενης σχέσης, λέμε ότι « στο σύνολο $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ η πρόσθεση έχει την **Προσεταιριστική ιδιότητα** .*

β) $A + \mathbb{O}_{\nu\times\mu} = A$

Λόγω της προηγούμενης σχέσης, λέμε ότι « στο σύνολο $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ *η πρόσθεση έχει **Μηδενικό στοιχείο** (λέγεται και **Ουδέτερο γιά την πρόσθεση στοιχείο** » το στοιχείο* $\mathbb{O}_{\nu\times\mu}$*».*

γ) $A + (-A) = \mathbb{O}_{\nu\times\mu}$

Λόγω της προηγούμενης σχέσης, λέμε ότι « στο σύνολο $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ *κάθε στοιχείο* A *έχει **Αντίθετο στοιχείο** η (**Προσθετικό Αντίστροφο**) το* $-A$*. ».*

δ) $A + B = B + A$

Λόγω της προηγούμενης σχέσης, λέμε ότι « στο σύνολο $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ *η πρόσθεση έχει την **Μεταδετική ιδιότητα** ».*

ε) 1 · A = A

Λόγω της προηγούμενης σχέσης, λέμε ότι « στο σύνολο $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ *το βαθμωτό γινόμενο έχει **Μονάδα**) (λέγεται και **Ουδέτερο γιά τον πολλαπλασιασμό στοιχείο**)) και επίσης λέγεται και **Μοναδιαιο στοιχείο**)), και αυτό είναι το στοιχείο 1 του* $\mathbb{F}$*».*

στ)(-1) $\cdot A = -A$

ζ) $a(bA) = (ab)A$

Η προηγούμενη ισότητα εκφράζει μία προσεταιριστική ιδιότητα.

η) $(a + b)A = aA + bA$

θ) $a(A + B) = aA + aB$

*Οι δύο προηγούμενες ισότητες εκφράζουν την **Επιμεριστική ιδιότητα***

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι $A = (a_{kl})_{\nu\times\mu}$ *,* $B = (b_{kl})_{\nu\times\mu}$ *και* $\Gamma = (\gamma_{kl})_{\nu\times\mu}$ *.*

α) Με βάση τον παραπάνω ορισμό, ο πίνακας $A + (B + \Gamma)$ *έχει* (k, l) *-στοιχείο το* $a_{kl} + (b_{kl} + \gamma_{kl})$ *, ενώ ο πίνακας* $(A + B) + \Gamma)$ *έχει* (k, l) *-στοιχείο το* $(a_{kl} + b_{kl}) + \gamma_{kl})$ *. Όμως ισχύει* $a_{kl} + (b_{kl} + \gamma_{kl}) = (a_{kl} + b_{kl}) + \gamma_{kl})$ *, επειδή ισχύει η Προσεταιριστική Ιδιότητα στην πρόσθεση στο* $\mathbb{F}$ *. Άρα πίνακας ο* $A + (B + \Gamma)$ *είναι ίσος με τον πίνακα* $(A + B) + \Gamma)$ *.*

β) Ο πίνακας $A + \mathbb{O}_{\nu\times\mu}$ *έχει* (k, l) *-στοιχείο το* $a_{kl} + 0$ *που είναι ίσο με* a_{kl} *διότι το 0 είναι Ουδέτερο Στοιχείο για την πρόσθεση στο* $\mathbb{F}$ *. Άρα πίνακας* $A + \mathbb{O}_{\nu\times\mu}$ *είναι ίσος με τον πίνακα* A *.*

γ) Ο πίνακας $A + (-A)$ *έχει* (k, l) *-στοιχείο το* $a_{kl} + (-a_{kl})$ *που είναι ίσο με* 0 *λόγω της ιδιότητας του Αντιθέτου για την πρόσθεση στο* $\mathbb{F}$ *. Άρα πίνακας ο* $A + (-A)$ *είναι ίσος με τον πίνακα* $\mathbb{O}_{\nu\times\mu}$ *.*

δ) Ο πίνακας $A+B$ *έχει* (k, l) *-στοιχείο το* $a_{kl}+b_{kl}$ *. Ο πίνακας* $B+A$ *έχει* (k, l) *-στοιχείο το* $b_{kl} + a_{kl}$ *Όμως το* $a_{kl} + (b_{kl})$ *είναι ίσο με* $b_{kl} + (a_{kl})$ *, λόγω της Μεταδετικής Ιδιότητας για την πρόσθεση στο* $\mathbb{F}$ *. Άρα ο πίνακας* $A + B$ *είναι ίσος με τον πίνακα* $B + A$ *.*

Τα υπόλοιπα αποδεικνύονται αναλόγως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Το παραπάνω θεώρημα δείχνει ότι το $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ είναι ένα παράδειγμα Διανυσματικού Χώρου, η γενική θεωρία των οποίων εκτίθεται σε επόμενο κεφάλαιο, .

Το επόμενο πόρισμα περιγράφει ορισμένες περαιτέρω χρήσιμες ιδιότητες του αθροίσματος και βαθμωτού γινομένου πινάκων. Θα μπορούσαν και αυτές να αποδειχθούν με τρόπο ανάλογο με το προηγούμενο θεώρημα, δηλαδή ανάγοντας κάθε σχέση σε σχέση μεταξύ των στοιχείων των ενεχομένων πινάκων, που είναι στοιχεία του $\mathbb{F}$, στον οποίον ξέρουμε πως να δουλεύουμε. Όμως θα προτιμήσουμε να τις αποδείξουμε χρησιμοποιόντας απ' ευθείας το προηγούμενο θεώρημα, για να ασκηθούμε και για να τονίσουμε την σημασία της δομής που δημιουργείται με τις πράξεις αυτές στο $\mathbb{F}^{\nu\times\mu}$

Πόρισμα 2.3.3 *Έστω $\nu\times\mu$ πίνακες A, B, και στοιχεία του $\mathbb{F}$ $\quad \alpha, \beta$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω*

(α) Έστω X πίνακας τέτοιος ώστε

$$X + A = \mathbb{O}$$

Τότε ισχύει $X = -A$

(β)

$$-(-A) = A$$

(γ) $0A = \mathbb{O}$

(δ)

$$(-\alpha)A = -(\alpha A) = (\alpha)(-A)$$

(ε) Αν ισχύει $\alpha A = \beta B$ και $\alpha \neq 0$ τότε

$$A = (\beta/\alpha)B$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

(α) Έστω

$$X + A = \mathbb{O}$$

προσθέτοντας το $-A$ και στα δύο μέλη, έχουμε

$$(X + A) + (-A) = \mathbb{O} + (-A)$$

περαιτέρω λόγω του μηδενικού στοιχείου και της προσεταιριστικής ιδιότητας, έχουμε

$$X + (A + (-A)) = -A$$

περαιτέρω λόγω του μηδενικού στοιχείου, έχουμε

$$X = -A$$

(β) Είναι $A + (-A) = \mathbb{O}$ άρα κατά το προηγούμενο $A = -(-A)$

(γ) Έχουμε

$$0A = (0 + 0)A = (0A) + (0A)$$

άρα

$$0A = (0A) + (0A)$$

άρα

$$0A + (-0A) = ((0A) + (0A)) + (-0A)$$

άρα

$$\mathbb{O} = (0A) + ((0A)) + (-0A)) = 0A$$

(δ) Έχουμε

$$(-\alpha)A + (\alpha A) = ((-\alpha) + \alpha)A = 0A = \mathbb{O}$$

άρα κατά το (α), $(-\alpha)A = -(\alpha A)$, κλπ

(ε) Από την $\alpha A = \beta B$ έχουμε $\alpha^{-1}(\alpha A) = \alpha^{-1}(\beta B)$, $(\alpha^{-1}\alpha)A) = (\alpha^{-1}\beta)B)$, $1A = (\alpha^{-1}\beta)B)$, άρα $A = (\beta/\alpha)B)$

Μια ειδική περίπτωση των παραπάνω ορισμού και θεωρήματος, που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, είναι το σύνολο $\mathbb{F}^\nu$ των διανυσμάτων, που είναι το ίδιο πράγμα με το σύνολο $\mathbb{F}^{1\times\nu}$ των $1 \times \nu$ πινάκων . Στο πλαίσιο των διανυσμάτων, οι παραπάνω ορισμοί εξειδικεύονται.

Έστω ότι ν είναι ένας θετικός ακέραιος, λ είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{F}$ και $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_i...\alpha_\nu)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, ...\beta_i...\beta_\nu)$ είναι στοιχεία του $\mathbb{F}^\nu$.

Τότε $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ...\alpha_i + \beta_i...\alpha_\nu + \beta_\nu)$. Το $\alpha + \beta$ ονομάζεται **«Άθροισμα των** α **και** β **»**.

Επίσης το διάνυσμα $-\alpha = (-\alpha_1, -\alpha_2, ...-\alpha_i...-\alpha_\nu)$. Το $-\alpha$ ονομάζεται **Αντίθετο του α**.

Επίσης $\lambda \cdot \alpha = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ...\lambda\alpha_i...\lambda\alpha_\nu)$. Το $\lambda \cdot \alpha$ η $\lambda\alpha$ ονομάζεται **«Γινόμενο του** λ **επί** α **»**.

Επίσης Το $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_i...\alpha_\nu)$ λέγεται **Μηδέν** η **Μηδενικό Στοιχείο** όταν όλα τα $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_i...\alpha_\nu$ είναι 0. Συμβολίζεται δε $\mathbb{O}_\nu$ η απλά $\mathbb{O}$, όταν το ν εννοείται από τα συμφραζόμενα.

Παράδειγμα 2.3.4

Θεωρούμε τους 3×4 πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ -4 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

και τον πραγματικό αριθμό 2.

Τότε ισχύει

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ -3 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2.3.5

Έστω ότι οι B, X είναι πίνακες $\nu \times \mu$ και ότι α είναι στοιχείο του $\mathbb{F}$ με $\alpha \neq 0$. Έστω ότι ισχύει

$$\alpha X + B = 0$$

και θέλουμε να εκφράσουμε τον X συναρτήσει των α, B. Κατά κάποιο τρόπο έχουμε το αντίστοιχο της γνωστής μας εξίσωσης πρώτου βαθμού, στους πραγματικούς αριθμούς.

Με βάση το παραπάνω Θεώρημα έχουμε την παρακάτω διαδοχή σχέσεων

$$\begin{aligned}
\alpha X + B &= 0\\
(\alpha X + B) + (-B) &= 0 + (-B)\\
\alpha X + (B + (-B)) &= (-B)\\
\alpha X + 0 &= (-B)\\
\alpha X &= (-B)\\
(1/\alpha)(\alpha X) &= (1/\alpha)(-B)\\
((1/\alpha)\alpha)X &= ((1/\alpha)((-1)B)\\
1X &= ((1/\alpha)(-1))B\\
X &= (-1/\alpha)B.
\end{aligned}$$

Τα παραπάνω δείχνουν ότι αν η εξίσωση πινάκων

$$\alpha X + B = 0$$

έχει λύσεις, αυτή είναι μια μόνον η

$$X = (-1/\alpha)B.$$

Προσοχή. Δεν έχουμε αποδείξει μέχρι στιγμής ότι η

$$X = (-1/\alpha)B$$

είναι λύση του συστήματος. Απλώς αποδείξαμε ότι είναι υποψήφια λύση. Δεν είναι δύσκολο όμως να ελέγξουμε ότι είναι λύση, με την παρακάτω διαδικασία επαλήθευσης

$$\alpha((-1/\alpha)B) + B = (\alpha(-1/\alpha))B + B = (-1)B + B = (-B) + B = 0.$$

Ώστε τελικά η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση.

Έτσι λοιπόν βρίσκουμε ένα τύπο για τον X πολύ όμοιο με τον αντίστοιχο για τις εξισώσεις πρώτου βαθμού των πραγματικών αριθμών. Ίσως ο αναγνώστης να σκέφτεται ότι η σειρά των βημάτων που ακολουθούμε πιό πάνω, είναι πολύ αναλυτική, και ίσως είναι ανιαρή άνευ λόγου. Όμως αν θέλουμε να είμαστε απόλυτα σωστοί και να κάνουμε ακριβή χρήση των όσων ακριβώς έχουμε αποδείξει, τότε πρέπει να ακολουθήσουμε την λεπτομερή σειρά βημάτων που ακολουθούμε πιο πάνω, διότι έτσι μόνο μπορούμε να δικαιολογήσουμε κάθε βήμα με βάση τα όσα έχουμε αποδείξει. Για παράδειγμα, δεν θα επιτρεπόταν να πούμε το παρακάτω: Ξεκινάμε από την σχέση

$$\alpha X + B = 0$$

και "αφαιρούμε τον B από τα δύο μέλη της ισότητας" ή "μεταφέρουμε τον B στο δεύτερο μέλος με αλλαγμένο το πρόσημο". Ο λόγος που δεν μπορούμε να το κάνουμε αυτό είναι ότι απλούστατα δεν έχουμε αποδείξει ότι ο χειρισμός αυτός, ο οποίος έχει χρησιμοποιηθεί επιτυχώς στην περιοχή των πραγματικών, μιγαδικών κλπ, νομιμοποιείται να χρησιμοποιηθεί και στην περιοχή των πινάκων. Η λεπτομερής ανάλυση που κάναμε πιο πάνω αποδεικνύει ότι αυτοί οι χειρισμοί είναι νόμιμοι και το αποδεικνύει με αναφορά στο παραπάνω αποδειχθέν θεώρημα.

Προτού φύγουμε από το παράδειγμα αυτό, αξίζει να κάνουμε και ένα ακόμα σχόλιο. Θα μπορούσαμε την παραπάνω εξίσωση πινάκων να την χειρισθούμε ανάγοντας τα πάντα στους πραγματικούς αριθμούς.

Με αυτή την στρατηγική αντίληψη έστω $B = (\beta_{ij})_{\nu\times\mu}$ και $X = (x_{ij})_{\nu\times\mu}$. Η

$$\alpha X + B = 0$$

μεταφράζεται σε

$$\begin{aligned} \alpha(x_{ij}) + (\beta_{ij}) &= 0 \\ (\alpha x_{ij} + \beta_{ij}) &= 0 \\ \alpha x_{ij} + \beta_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

για κάθε i, j με $1 \leq i \leq \nu$, $1 \leq j \leq \mu$.

Άρα

$$x_{ij} = (-1/\alpha)\beta_{ij} \quad \text{και} \quad X = (-1/\alpha)B$$

καταλήξαμε και με αυτή την μέθοδο στον ίδιο τύπο, κάτι που δεν μας εκπλήσει διότι και οι δύο μέθοδοι είναι ορθές. Δεν τίθεται θέμα ότι η μια μέθοδος είναι ανώτερη και η άλλη κατώτερη. Η αλήθεια είναι ότι ανάλογα με το συγκεκριμένο πρόβλημα που έχουμε στα χέρια μας, είναι δυνατόν να είναι πιο κατάλληλη η μια από την αλλη.

Η μέθοδος που ανάγει τα πάντα σε σχέσεις πραγματικών αριθμών, είναι η πλέον προφανής και με την μέθοδο αυτή αποδείξαμε ένα τμήμα του προηγούμενου Θεωρήματος και με την ίδια μέθοδο μπορούν άνετα να αποδειχθούν και τα υπόλοιπα. Το νέο στοιχείο είναι ότι το Θεώρημα αυτό, δίνει μια δομή στο σύνολο των πινάκων $\nu \times \mu$, η οποία περιγράφεται στην εκφώνηση του Θεωρήματος, χωρίς αναφορά στα στοιχεία των πινάκων που εμπλέκονται. Η δομή αυτή δίνει μια άλλη οπτική γωνία στην υπόθεση, η οποία σε πολλές περιπτώσεις υπερέχει της αναγωγής των πάντων σε σχέσεις μεταξύ των στοιχείων των πινάκων που εμπλέκονται. Στο προηγούμενο παράδειγμα ειδαμε πως λειτουργεί αυτή η αντίληψη στην πράξη.

Παράδειγμα 2.3.6

Έστω οι $\nu \times \mu$ πίνακες A, B. Να εξακριβωθεί αν υπάρχουν πίνακες X, Y τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \alpha X + \beta Y &= A \\ \gamma X + \delta Y &= B \end{aligned}$$

όταν $\alpha \neq 0$ και $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Λύση. Η $\alpha X + \beta Y = A$ δίνει $\alpha X + (\beta Y + (-A)) = 0$ άρα κατά το προηγούμενο παράδειγμα

$$X = (-1/\alpha)(\beta Y + (-A)) = (-\beta/\alpha)Y + (1/\alpha)A$$

η οποία αντικαθιστομένη στην δεύτερη ισότητα της εκφώνησης δίνει

$$\gamma((-\beta/\alpha)Y + (1/\alpha)A) + \delta Y = B$$

άρα

$$\begin{aligned}(-\beta\gamma/\alpha)Y + (\gamma/\alpha)A + \delta Y = B\\ (-\beta\gamma)Y + (\gamma A) + \alpha\delta Y = \alpha B\\ (\alpha\delta - \beta\gamma)Y = (-\gamma)A + \alpha B\end{aligned}$$

άρα

$$Y = \frac{(-\gamma)A + \alpha B}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

αντικαθιστούμε την τιμή αυτή του Y στην

$$X = (-\beta/\alpha)Y + (1/\alpha)A$$

που βρήκαμε πιο πάνω

$$\begin{aligned}X &= (-\beta/\alpha)\frac{(-\gamma)A + \alpha B}{\alpha\delta - \beta\gamma} + (1/\alpha)A\\ &= \frac{(\beta\gamma/\alpha)A + (-\beta)B + ((\alpha\delta - \beta\gamma)(1/\alpha))A}{\alpha\delta - \beta\gamma}\\ &= \frac{\delta A + (-\beta)B}{\alpha\delta - \beta\gamma}\end{aligned}$$

Προσοχή! δεν τελειώσαμε. Με όσα κάναμε μέχρι τώρα διαπιστώσαμε ότι ΑΝ υπάρχουν πίνακες X, Y που να ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις, τότε αυτοί οι πίνακες είναι μοναδικοί και είναι αυτοί που βρήκαμε πιο πάνω. ΔΕΝ αποδείξαμε ακόμα ότι αυτοί οι πίνακες ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις της εκφώνησης. Αυτό πρέπει να γίνει, όμως δεν είναι δύσκολο. Το επαληθεύουμε πολύ απλά κάνοντας τις πράξεις

$$\alpha X + \beta Y = \alpha\frac{\delta A - (-\beta)B}{\alpha\delta - \beta\gamma} + \beta\frac{(-\gamma)A + \alpha B}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

κλπ. κλπ. ας συνεχίσει ο αναγνώστης, ας το δει ως μιά ευκαιρία να ασκηθεί στον λογισμό των πινάκων.

ΣΧΟΛΙΟ. Η χρήση των παρενθέσεων στις διάφορες αλγεβρικές πράξεις μας είναι γνωστή από το Λύκειο. Όμως εκεί ίσως δεν είμασταν και ιδιαίτερα προσεκτικοί στην χρήση των παρενθέσεων, κάτι που ήταν συνέπεια της ωριμότητας και του επιπέδου του μαθήματος. Εδώ έχουμε μαι ευκαιρία να δούμε τα πράγματα κάπως προσεκτικότερα.

Ας πάρουμε κατ' αρχάς εκφράσεις που έχουν μόνο μια πράξη, ας πούμε την πρόσθεση. Έστω ότι A, B, Γ, Δ, E είναι $\nu \times \mu$ πίνακες. Ερωτάται τι μπορεί να σημαίνει $A + B + \Gamma$, $A + B + \Gamma + \Delta$ κλπ. όταν η πρόσθεση έχει ορισθεί για δύο πίνακες;

Μια πρώτη απάντηση θα ήταν ότι οι εκφράσεις αυτές υποδηλώνουν το $(A+B)+\Gamma$ και $((A+B)+\Gamma)+\Delta$ αντίστοιχα. Για περισσότερα πάνω σε αυτό το θέμα, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο πρώτο κεφάλαιο.

Ακολουθώντας μια πορεία ανάλογη εκείνης της άλγεβρας των στοιχείων του $\mathbb{F}$, προχωρούμε να εισαγάγουμε μια άλλη πράξη, την Αφαίρεση.

Ορισμός 2.3.7 *Έστω $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$ είναι πίνακες $\nu \times \mu$. Ορίζουμε την Αφαίρεση των A, B, (ή την Διαφορά των A, B,)*

$$A - B = A + (-B)$$

Παράδειγμα 2.3.8

Έστω ότι $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$ είναι $\nu \times \mu$ πίνακες. Τότε

$$A - B = (\alpha_{ij}) - (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij}) + (-(\beta_{ij})) = (\alpha_{ij}) + (-\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} - \beta_{ij}).$$

Έτσι λοιπόν αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

τότε

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Για να αποφύγουμε την χρήση πολλών παρενθέσεων, που και κουραστική είναι και πολλές φορές μπερδεύει την σκέψη, θα κάνουμε τις παρακάτω συμβάσεις

(α) Το σύμβολο της αφαίρεσης είναι το ίδιο πράγμα με το σύμβολο του αντιθέτου. Συγκεκριμένα το α-β, είναι το ίδιο πράγμα με το α+(-β).

(β) Η πράξη του βαθμωτού γινομένου εκτελείται πριν από την πράξη της πρόσθεσης. Συγκεκριμένα το α+βγ, είναι το α+(βγ) και όχι το (α+β)γ

Παράδειγμα 2.3.9

(α) $A - B - \Gamma$ σημαίνει $(A - B) - \Gamma$

(β) $(2A - 3B - 4\Gamma$ σημαίνει $((2A) - (3B)) - (4\Gamma)$

(γ) $-A - 2B - 3\Gamma$ σημαίνει $((-A) - (2B)) - (3\Gamma)$

(δ) Ας θεωρήσουμε το $-2A+B$. Αυτό μπορεί να σημαίνει ή $((-2)A)+B$ ή $(-(2A))+B$. Ευτυχώς(!) είναι ίσα. Γενικότερα όπου οι παραπάνω προτεραιότητες δημιουργούν ασάφια, μπορεί να αποδειχθεί ότι οι διάφορες εκδοχές της ασάφιας αυτής, οδηγούν όλες στο ίδιο αποτέλεσμα.

Η παρακάτω πρόταση συγκεντρώνει τις βασικές ιδιότητες της αφαίρεσης πινάκων.

Πρόταση 2.3.10 *Έστω ότι A, B, Γ είναι Πίνακες της ίδιας διάστασης και α, β, γ είναι στοιχεία της $\mathbb{F}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω*

(α) $\alpha A - \beta B = -\beta B + \alpha A$

(β) $\alpha A - (\beta B - \gamma\Gamma) = \alpha A - \beta B + \gamma\Gamma$

(γ) $\alpha(B - \Gamma) = \alpha B - \alpha\Gamma$

(δ) $\alpha\Gamma - \beta\Gamma = (\alpha - \beta)\Gamma$

(ε) $A - B - \Gamma = -B + A - \Gamma = -\Gamma - B + A$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επαφίεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.

Παράδειγμα 2.3.11

Έστω ότι A, B είναι $\nu \times \mu$ πίνακες, και θέλουμε να απλοποιήσουμε την έκφραση

$$5(2A - 3B) - (A + B) + 2(7A - 8B).$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση, βλέπουμε ότι η έκφραση αυτή διαδοχικά γράφεται

$$\begin{aligned}(10A - 15B) - A - B + (14A - 16B) &= 10A - 15B - A - B + 14A - 16B \\ &= 10A - A + 14A - 15B - B - 16B \\ &= (10 - 1 + 14)A + (-15 - 1 - 16)B \\ &= 23A - 32B.\end{aligned}$$

Οι επόμενοι ορισμοί εισάγουν ορισμένες ενδιαφέρουσες κατηγορίες πινάκων η σημασία των οποίων θα φανεί σε επόμενα κεφάλαια, ενώ ορισμένες απλές ιδιότητες αυτών εμφανίζονται στις ασκήσεις της ενότητας.

Ορισμός 2.3.12 *Ενας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται* ***Συμμετρικός*** *, αν $A = A^t$. Λέγεται δε* ***Αντισυμμετρικός*** *, αν $A = -A^t$.*

Παράδειγμα 2.3.13

Ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

είναι συμμετρικός, ενώ ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι αντισυμμετρικός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ2.3

1. Έστω ότι A, B, Γ είναι $\nu \times \mu$ πίνακες. Να απλοποιηθεί η έκφραση

$$(-1)(2A - B + 5\Gamma) + 2(-A + 2B - \Gamma) - 3(A + 2B + 3\Gamma)$$

2. Έστω ότι X, Y είναι 2×2 πίνακες, και ισχύει

$$2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$-5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι X, Y.

3. Έστω A, B είναι $\nu \times \mu$ πίνακες τέτοιοι ώστε $A = A^t$ και $B = -B^t$. Να αποδειχθεί ότι οι A, B είναι τετραγωνικοί πίνακες.

4. Τα διαγώνια στοιχεία Αντισυμμετρικού πίνακα είναι μηδέν.

5. Έστω A είναι τετραγωνικός πίνακας. Τότε ο πίνακας $(A+A^t)$ είναι συμμετρικός, ο δε $(A - A^t)$ είναι αντισυμμετρικός.

6. Έστω A είναι τετραγωνικός πίνακας. X ένας συμμετρικός πίνακας και Y είναι ένας συμμετρικός πίνακας τέτοιος ώστε

$$A = X + Y.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$X = (1/2)(A + A^t) \quad \text{και} \quad Y = (1/2)(A - A^t).$$

7. Το άθροισμα δύο άνω τριγωνικών $\nu \times \mu$ πινάκων είναι άνω τριγωνικός πίνακας. Το αντίστοιχο ισχύει και για τους κάτω τριγωνικούς πίνακες.

8. Ο αντίθετος ενός ανω τριγωνικού πίνακα είναι και αυτός άνω τριγωνικός. Το αντίστοιχο ισχύει και για τους κάτω τριγωνικούς πίνακες.

9. Έστω ότι A, B είναι $\nu \times \nu$ πίνακες

   α) Αν οι A, B είναι συμμετρικοί, τότε και ο $A + B$ είναι συμμετρικός.

   β) Αν οι A, B είναι αντισυμμετρικοί πίνακες τότε και ο $A + B$ είναι αντισυμμετρικός πίνακας.

   γ) Αν ο A είναι συμμετρικός πίνακας τότε και ο $-A$ είναι συμμετρικός επίσης.

   δ) Αν ο A είναι αντισυμμετρικός πίνακας, τότε και ο $-A$ θα είναι αντισυμμετρικός.

10. Έστω ότι ν, μ είναι θετικοί ακέραιοι. Αν $1 \leq i \leq \nu$ και $1 \leq j \leq \mu$ τότε $E_{ij} = (x_{\kappa\lambda})_{\nu\times\mu}$ και ο $\nu \times \mu$ πίνακας τέτοιος ώστε

$$x_{\kappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \kappa = i \text{ και } \lambda = j \\ 0 & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Έστω ότι $A = (\alpha_{ij})_{\nu\times\mu}$ είναι ένας $\nu \times \mu$ πίνακας. Τότε $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\mu}\alpha_{ij}E_{ij}$.

11. Δίδονται οι $\nu \times \mu$ πίνακες A, B. Να λυθεί η εξίσωση

$$3\left(-X + \frac{1}{4}A\right) + B = 2\left(X + \frac{5}{4}B + A\right)$$

12. Δίδονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

να βρεθεί ο πίνακας X, αν ισχύει

$$2X + A = 3(B - X)$$

13. Έστω Z είναι πίνακας με στοιχεία μιγαδικούς. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες A, B που έχουν στοιχεία πραγματικούς, έτσι ώστε

$$Z = A + iB.$$

Να αποδειχθεί περαιτέρω ότι οι παραπάνω πίνακες A, B είναι μονοσήμαντα ορισμένοι.

2.4 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΡΑΜΜΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ένα κεντρικό θέμα στην μελέτη των πινάκων περιγράφεται ως εξής: Έχουμε κάποιο πρόβλημα προς μελέτη, το οποίο προέρχεται η από τα μαθηματικά η από τις εφαρμογές τους. Το πρόβλημα αυτό ενδεχομένως συνδέεται στενά με κάποιον πίνακα ο οποίος μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκος. Η δυνατότητα μελέτης του πίνακα συνδέεται με την δυνατότητα απλοποίησης του, απλοποίησης η οποία θα διατηρήσει κάποια ουσιώδη στοιχεία του αρχικού προβλήματος. Στο κεφάλαιο αυτό το πρόβλημα μας είναι η μελέτη γραμμικών συστημάτων, (βλέπε σελίδα 29), η οποία οδηγεί στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος, (βλέπε σελίδα 84). Ένας ορισμένος τρόπος απλοποίησης του πίνακα αυτού οδηγεί σε νέο σύστημα το οποίο είναι αφ' ενός ευκολότερο να λυθεί και αφ' ετέρου έχει τις ίδιες λύσεις με το αρχικό. Αυτή την απλοποίση που φέρει και το ιστορικό όνομα απαλοιφή του Gauss , (βλέπε σελίδα 46), αρχίζουμε να εξετάζουμε στην παρούσα ενότητα.

Ορισμός 2.4.1 *Έστω ότι $A = (\alpha_{ij})_{\nu\times\mu}$ είναι ένας πίνακας ν γραμμών και μ στηλών, με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Οι παρακάτω μετασχηματισμοί του πίνακα A, ονομάζονται* ***Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί των Γραμμών του A****, (συντομογραφικά* ***ΣΜΓ του A****).*

α) Πολλαπλασιάζουμε όλα τα στοιχεία της i -γραμμής επί λ ,(ενώ όλα τα άλλα στοιχεία του A εκτός της i -γραμμής μένουν αναλλοίωτα), όπου $1 \le i \le \nu$ και το λ είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{F}$ διάφορο του 0. (Αν r_i είναι η i -γραμμή του A, τότε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού όλων των στοιχείων της επί λ , είναι το λ r_i)

β) Προσθέτουμε στην i -γραμμή του A το λ r_k , (ενώ όλα τα άλλα στοιχεία του A εκτός της i -γραμμής μένουν αναλλοίωτα), όπου λ είναι στοιχείο του $\mathbb{F}$ και r_k είναι η k -γραμμή του A, όπου k είναι ακέραιος μεταξύ 1 και ν , και διάφορος του i .

γ) Εναλλάσσουμε την i -γραμμή του A με την k -γραμμή, (ενώ όλα τα άλλα στοιχεία του A εκτός των γραμμών i και k μένουν αναλλοίωτα)

Χρησιμοποιούμε τις παρακάτω συντομογραφίες για να δηλώσουμε τους τρεις παραπάνω μετασχηματισμούς γραμμών :

α) $r_i \longrightarrow \lambda \times r_i$ όπου το λ είναι διάφορο του μηδενός

β) $r_i \longrightarrow r_i + \lambda r_k$ όπου τα i, k είναι διάφορα μεταξύ τους

γ) $r_i \longleftrightarrow r_k$

Επισημαίνουμε ότι οι προσθέσεις γραμμών και οι πολλαπλασιασμοί με στοιχεία του $\mathbb{F}$ που περιγράφουμε στον προηγούμενο ορισμό, είναι ακριβώς οι προσθέσεις και οι πολλαπλασιασμοί που περιγράφονται για τα στοιχεία του συνόλου $\mathbb{F}^{\mu}$, όπου ανήκουν οι γραμμές αυτές.

Ορισμός 2.4.2 *Έστω ότι οι A και B είναι δύο $\nu \times \mu$ πίνακες. Θα λέμε ότι ο A είναι* ***Γραμμοϊσοδύναμος προς τον B*** *, αν ο B μπορεί να προκύψει από τον A με την εκτέλεση μιας πεπερασμένης ακολουθίας στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.*

Παράδειγμα 2.4.3

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

είναι ένας πίνακας 3×5 . Στον πίνακα αυτόν εφαρμόζουμε ορισμένους Στοιχειώδεις Μετασχηματισμούς Γραμμών.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_1 \longrightarrow 2r_1}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_3 \longrightarrow r_3 - 4r_1}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 30 & -16 & -10 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_2 \longrightarrow 3r_2}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 30 & -16 & -10 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_3 \longrightarrow r_3 - 30r_2}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & -466 & 260 & -451 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3 \longrightarrow -1/466 r_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -130/233 & 451/466 \end{pmatrix}$$

Έτσι λοιπόν καταλήξαμε στον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -130/233 & 451/466 \end{pmatrix}$$

προς τον οποίον είναι γραμμοισοδύναμος ο αρχικός A. O B φαίνεται να είναι απλούστερος από τον A, διότι έχει περισσότερα 0.

Στην συνέχεια θα ερευνήσουμε πιο συστηματικά την δυνατότητα να απλοποιήσουμε έναν πίνακα μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, και θα συνδέσουμε την δυνατότητα αυτή με την λύση γραμμικών συστημάτων, που είναι και το βασικό θέμα αυτού του κεφαλαίου.

Ξεκινάμε με έναν απλό ορισμό

Ορισμός 2.4.4 *Θεωρούμε το* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_i...\alpha_\nu)$ *ένα στοιχείο του* $\mathbb{F}^\nu$ *, δηλαδή μία διατεταγμένη* ν *-αδα στοιχείων του* $\mathbb{F}$ *. Ονομάζουμε* ***Ηγετικό Στοιχείο*** *της* ν *-αδας το πρώτο από τα στοιχεία* $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_i...\alpha_\nu$ *, που είναι διάφορο του 0.*

Ορισμός 2.4.5 *Έστω A είναι ένας πίνακας. O* A *λέγεται* ***Κλιμακωτός Πίνακας*** *, αν ισχύουν τα παρακάτω*

α) Το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής του A, ισούται με 1.

β) Το ηγετικό 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή βρίσκεται στα δεξιά του ηγετικού 1 της κάθε προηγουμένης γραμμής.

γ) Αν ο A έχει κάποια μηδενική γραμμή τότε και κάθε επομένη γραμμή του A είναι και αυτή μηδενική.

Ένας κλιμακωτός πίνακας λέγεται ***Ανηγμένος Κλιμακωτός*** *, αν επιπλέον*

δ) Σε κάθε μη μηδενική γραμμή, το ηγετικό 1 είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.

Παράδειγμα 2.4.6

Από το παράδειγμα που επεξεργαστήκαμε πιο πάνω, ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ΔΕΝ είναι Κλιμακωτός ενώ ο

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -130/233 & 451/466 \end{pmatrix}$$

είναι μεν κλιμακωτός αλλά όχι Ανηγμένος Κλιμακωτός. Ανηγμένος Κλιμακωτός είναι ο πίνακας

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -130/233 & 451/466 \end{pmatrix}$$

ΣΧΟΛΙΟ. Ο πίνακας που όλα τα στοιχεία του είναι 0 , ο $\mathbb{O}_{\nu\times\mu}$ ... είναι και αυτός ανηγμένος κλιμακωτός ! (Γιατί ;)

Το επόμενο Θεώρημα είναι το δυσκολότερο αλλά και το κεντρικότερο του κεφαλαίου αυτού. Είναι σκόπιμο ο αναγνώστης να ξανακοιτάξει τον ορισμό 2.4.1

Θεώρημα 2.4.7 *Κάθε πίνακας είναι γραμμοισοδύναμος προς κάποιον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη είναι άμεση απόρροια του παρακάτω θεωρήματος, που αν και φαίνεται πολυπλοκότερο, είναι ευκολότερο να αποδειχθεί, διότι επιτρέπει επαγωγική προσέγγιση του τελικού στόχου σε μικρά βήματα.

Η διαδικασία που περιγράφεται στο επόμενο Θεώρημα, είναι γνωστή ως **Απαλοιφή Gauss**

Θεώρημα 2.4.8 *Έστω A είναι ένας $\nu\times\mu$ πίνακας και κ είναι ένας θετικός ακέραιος. Τότε ο A είναι γραμμοισοδύναμος προς κάποιον πίνακα X , του οποίου οι πρώτες $min(\kappa,\mu)$ στήλες σχηματίζουν έναν $\nu\times min(\kappa,\mu)$ πίνακα, που είναι ανηγμένος κλιμακωτός.*

Το θεώρημα 2.4.7 είναι άμεση συνέπεια του προηγουμένου, λαμβάνοντας $\kappa=\mu$.

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε επαγωγή ως προς κ . Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο $\nu\times\mu$ πίνακας A έχει την μορφή $A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & \alpha_{1\mu}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & \alpha_{2\mu}\\ . & . & . & . & . & .\\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & . & . & . & \alpha_{\nu\mu}\end{pmatrix}$.

Έστω ότι κ =1. Τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση α) Η πρώτη στήλη του A είναι η μηδενική. Τότε ο πίνακας $X=A$ αποδεικνύει το θεώρημα.

Περίπτωση β) Η πρώτη στήλη του A δεν είναι η μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει i τέτοιο ώστε το στοιχείο α_{i1} είναι μη μηδενικό, όπου το i είναι θετικός ακέραιος μεταξύ 1 και ν . Στον πίνακα A εκτελούμε κατά σειρά τους δύο παρακάτω ΣΜΓ με σκοπό να κάνουμε το 1 ηγετικό στοιχείο στην πρώτη γραμμή και πρώτη στήλη. (Στην συνέχεια, με r_i συμβολίζουμε την i -γραμμή του πίνακα στον οποίο αναφερόμαστε κάθε φορά).

α) $r_i \longrightarrow 1/\alpha_{i1}r_i$

β) $r_1 \longleftrightarrow r_i$

Οι δύο αυτοί ΣΜΓ οδηγούν σε έναν νέο πίνακα $B=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & . & . & . & \beta_{1\mu}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & . & . & . & \beta_{2\mu}\\ . & . & . & . & . & .\\ \beta_{\nu1} & \beta_{\nu2} & . & . & . & \beta_{\nu\mu}\end{pmatrix}$,

όπου $\beta_{11}=1$.

Στον πίνακα B, εκτελούμε διαδοχικά τους ΣΜΓ $r_s \longrightarrow r_s-\beta_{s1}r_1$ για s = 2, 3, ..., ν , με σκοπό να μηδενίσουμε όλα τα στοιχεία της 1 -στήλης πλην του ηγετικού 1 της πρώτης γραμμής. Έτσι καταλήγουμε σε έναν πίνακα του τύπου $X=$

$\begin{pmatrix} 1 & x_{12} & . & . & . & x_{1\mu} \\ 0 & x_{22} & . & . & . & x_{2\mu} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & x_{\nu 2} & . & . & . & x_{\nu\mu} \end{pmatrix}$. Η πρώτη στήλη του X είναι ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας, έτσι απεδείχθη το θεώρημα για κ =1 .

Προχωρώντας επαγωγικά, θα υποθέσουμε ότι ισχύει το θεώρημα μας για $\kappa = j$, όπου j είναι θετικός ακέραιος και θα προχωρήσουμε να αποδείξουμε το επαγωγικό βήμα, ότι δηλαδή το θεώρημα ισχύει για $\kappa = j + 1$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι ο A είναι γραμμοισοδύναμος με έναν πίνακα $Y = (y_{ij})_{\nu\times\mu}$ του οποίου οι πρώτες j στήλες σχηματίζουν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα $\nu \times j$. Πάλι θα θεωρήσουμε φυσιολογικά δύο περιπτώσεις

Περίπτωση A) $\mu \leq j$. Τότε η ζητούμενη συνεπαγωγή είναι προφανής διότι $min(j, \mu) = min(j + 1, \mu) = \mu$.

Περίπτωση B) $j < \mu$, οπότε $(j+1) \leq \mu$, που είναι και η ενδιαφέρουσα περίπτωση. Η περίπτωση αυτή αναλύεται σε τρεις υποπεριπτώσεις. Θεωρούμε τις j πρώτες στήλες του πίνακα Y και έστω ότι Z είναι ο $\nu \times j$ πίνακας που σχηματίζουν οι στήλες αυτές. Έστω f είναι η $(j + 1)$ -στήλη του Y .

Υποπερίπτωση B_1) Z=0. Τότε το επαγωγικό βήμα θα γίνει ακριβώς όπως και στην περίπτωση $j = 1$ πιο πάνω. Τα μηδενικά των πρώτων j στηλών δεν επηρεάζουν στην διαδικασία.

Υποπερίπτωση B_2) Η $(j + 1)$ -στήλη του πίνακα Y φ, είναι μηδενική. Στην περίπτωση αυτή οι $(j + 1)$ πρώτες στήλες του πίνακα Y αποτελούν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα, οπότε ο πίνακας $X = Y$ αποδεικνύει το θεώρημα.

Υποπερίπτωση B_3) Ο πίνακας Z είναι μη μηδενικός και η $(j+1)$ -στήλη του πίνακα Y, f , είναι μη μηδενική. Έστω i είναι ο μέγιστος θετικός ακέραιος για τον οποίον η i -γραμμή του Y έχει ηγετικό 1 σε κάποια από τις j πρώτες στήλες. Με άλλα λόγια η i -γραμμή του Y είναι η κατώτερη (στην διάταξη των γραμμών του πίνακα Y) που έχει ηγετικό 1 που είναι στοιχείο και του Z. Αφού ο πίνακας Z είναι μη μηδενικός, θα υπάρχει ένα τέτοιο i . Μία συνέπεια είναι ότι ο πίνακας Z έχει μόνον 0 κάτω από την i -γραμμή. Φυσιολογικά διακρίνουμε και εδώ δύο δυνατότητες.

Δυνατότητα α) Η στήλη f έχει μόνον 0, στις γραμμές που έπονται (δηλαδή βρίσκονται πιο χαμηλά), της i -γραμμής . Στην περίπτωση αυτή, οι $(j+1)$ πρώτες στήλες (οι αριστερότερες στήλες) του Y , δηλαδή ο πίνακας (Zf) , είναι ένας $\nu\times(j+1)$ κλιμακωτός ανηγμένος πίνακας, άρα ο πίνακας $X = Y$ ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Δυνατότητα β) Η στήλη f έχει κάποια στοιχεία διάφορα του 0, σε κάποια γραμμή που έπεται (δηλαδή βρίσκεται πιο χαμηλά) της i -γραμμής. Έστω t η γραμμή αυτή, όπου $i < t$, οπότε το στοιχείο $y_{t(j+1)}$ είναι διάφορο του 0. Εκτελούμε τις παρακάτω περιγραφόμενες ΣΜΓ επί των γραμμών του Y

$r_t \longrightarrow (1/y_{t(j+1)})r_t$

οπότε το $(t, (j + 1))$ -στοιχείο γίνεται ηγετικό, συνεχίζουμε

$r_{i+1} \longleftrightarrow r_t$

οπότε το $((i + 1), (j + 1))$ -στοιχείο γίνεται ηγετικό, και οι ΣΜΓ

$r_s \longleftrightarrow r_s - y_{s(j+1)}r_(i + 1)$ για $1 \leq s \leq \nu \; and \; s \neq (i + 1)$, μηδενίζουν όλα τα στοιχεία της $(j+1)$ -στήλης εκτός του $((i+1), (j+1))$ -στοιχείου έχει γίνει το ηγετικό 1. Τελικά οι $j + 1$ πρώτες (δηλαδή οι αριστερότερες), στήλες του τελικού πίνακα σχηματίζουν έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα, άρα ο τελικός αυτός πίνακας έχει της ιδιότητες που απαιτεί η εκφώνηση του θεωρήματός μας.

Ίσως ο καλλίτερος τρόπος για να καταλάβει κάποιος την παραπάνω απόδειξη, είναι να την χρησιμοποιήσει σε συγκεκριμένα παραδείγματα. Η μέθοδος που περιγράφτηκε στην παραπάνω απόδειξη είναι γενική και καλύπτει κάθε περίπτωση. Όμως σε συγκεκριμένες αριθμητικές περιπτώσεις είναι δυνατόν να επιδέχεται απλοποιήσεις.

Παράδειγμα 2.4.9

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

είναι ένας πίνακας 3×5 . Στον πίνακα αυτόν εφαρμόζουμε ορισμένους Στοιχειώδεις Μετασχηματισμούς Γραμμών με σκοπό να καταλήξουμε σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα .

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1 \longrightarrow 2r_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_3 \longrightarrow r_3 - 4r_1}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 30 & -16 & -10 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_2 \longrightarrow 3r_2}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 30 & -16 & -10 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_3 \longrightarrow r_3 - 30r_2}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & -466 & 260 & -451 \end{pmatrix} \overset{r_3 \longrightarrow -1/466 r_3}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -130/233 & 451/466 \end{pmatrix}$$

Έτσι λοιπόν καταλήξαμε στον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -130/233 & 451/466 \end{pmatrix}$$

προς τον οποίον είναι γραμμοισοδύναμος ο αρχικός A. O B είναι μεν κλιμακωτός αλλά όχι ανηγμένος κλιμακωτός. Συνεχίζουμε λοιπόν περαιτέρω την διαδικασία

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -130/233 & 451/466 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \longrightarrow r_1 + 6r_2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 94 & -52 & 90 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -130/233 & 451/466 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \longrightarrow r_1 - 94r_3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 24336/233 & -454/466 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -130/233 & 451/466 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \longrightarrow r_2 - 15r_3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 24336/233 & -454/466 \\ 0 & 1 & 0 & -147/233 & 225/466 \\ 0 & 0 & 1 & -130/233 & 451/466 \end{pmatrix}$$

Ετσι φθάσαμε στον στόχο μας, έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

Παράδειγμα 2.4.10

Θεωρούμε τον παρακάτω 3×6 πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 6 & 5 & 13 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix}$$

εφαρμόζοντας ΣΜΓ θα τον αναγάγουμε σε έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 6 & 5 & 13 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \longrightarrow 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 6 & 4 & 13 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \longrightarrow (r_2 - 2r_1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 9 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \longrightarrow (r_3 + 3r_1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \longrightarrow (1/3r_2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \longrightarrow (r_1 + r_2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \longrightarrow (r_3 - 3r_2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \longrightarrow -1/3 r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \longrightarrow r_1 + -5r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \longrightarrow r_2 + -3r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος αυτός πίνακας είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

Παράδειγμα 2.4.11

Θεωρούμε τον 3×3 πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

τον οποίο θα αναγάγουμε σε ανηγμένο κλιμακωτό, με σειρά ΣΜΓ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to -r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to (-1/4) r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 6r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2.4.12

Θεωρούμε τον 3×4 πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

που θα τον απλοποιήσουμε με μια σειρά ΣΜΓ. Στο παράδειγμα αυτό θα αλλάξουμε κάπως την σειρά των πράξεων, με σκοπό να έχουμε πράξεις που είναι κάπως απλούστερες, και θα εκτελέσουμε κάποιες πράξεις ταυτόχρονα, με σκοπό να επιταχύνουμε την διαδιακασία.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_2 - 2r_1]{r_3 \to r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

έτσι καταλήξαμε σε ένα κλιμακωτό πίνακα, όχι όμως ανηγμένο, καλείται ο αναγνώστης να συνεχίσει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.4

1. Να βρεθούν ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες προς τους οποίους είναι γραμμοισοδύναμοι οι παρακάτω πίνακες.

α) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

β) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 9 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

γ) $\begin{pmatrix} 1 & 819 & 326 \\ 0 & 1 & 23568 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

δ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 14 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{pmatrix}$

2.5 ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ήδη έχουμε μάθει για το Βαθμωτό γινόμενο. Υπάρχει όμως και ένα δεύτερο γινόμενο στους πίνακες που είναι και αυτό μία ιδιαίτερα χρήσιμη πράξη, πέραν της πρόσθεσης και του βαθμωτού γινομένου που είδαμε σε προηγούμενη ενότητα, (βλέπε σελίδα 36). Το γινόμενο αυτό αποκλίνει κάπως από τις κλασσικές νομοτέλειες της παραδοσιακής άλγεβρας των πραγματικών και των μιγαδικών και για αυτό έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ορισμός 2.5.1 *Έστω ότι ο $A = (a_{ij})_{\nu\times k}$ είναι ένας $\nu\times k$ πίνακας και ο $B = (b_{ij})_{k\times\mu}$ είναι ένας $k \times \mu$ πίνακας, όπου k είναι τυχών θετικός ακέραιος. Τότε ορίζουμε το* ***γινόμενο*** *« $A \cdot B$ » (διαβάζεται «(Α επί Β »), να είναι ένας $\nu \times \mu$ πίνακας ο $(t_{ij})_{\nu\times\mu}$, έτσι ώστε $t_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}$. (Συχνά το $A \cdot B$ το γράφουμε και AB.)*

Παράδειγμα 2.5.2

Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Το γινόμενο $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ ΔΕΝ ορίζεται κατά τα ανωτέρω. Όμως ορίζεται το γινόμενο $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -6 & 0 \\ -10 & 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ας εξηγήσουμε πως βρέθηκε αυτό το εξαγόμενο. Θα εφαρμόσουμε σχολαστικά τον παραπάνω ορισμό. Ο Α είναι πίνακας 2×3 ο δε Β είναι 3×4 , άρα το γινόμενο ΑΒ είναι πίνακας 2×4 . Είναι λοιπόν $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \end{pmatrix}$, όπου τα α_{kl} και β_{kl} έχουν τις συγκεκριμένες τιμές που δίδονται πιο πάνω. Ας πούμε λοιπόν ότι θέλουμε να βρούμε το (2,3)-στοιχείο του πίνακα ΑΒ. Κατά τον παραπάνω ορισμό αυτό ισούται με $\alpha_{21}\beta_{13} + \alpha_{22}\beta_{23} + \alpha_{23}\beta_{33}$ που στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι (-2)(-2)+(-3)(0)+(0)(2)=4 που είναι το στοιχείο (2,3)-στοιχείο του πίνακα ΑΒ. Ομοίως εργαζόμαστε και για τα υπόλοιπα στοιχεία του ΑΒ.

Παράδειγμα 2.5.3

Το επόμενο απλό παράδειγμα συμβάλλει σε καλλίτερη κατανόηση της εκτέλεσης των πράξεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό του γινομένου πινάκων. Έστω ο πίνακας γραμμή $R = (t_1, t_2, ..., t_k)$ και ο πίνακας στήλη $C = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ . \\ . \\ . \\ s_k \end{pmatrix}$. Κατά τον παραπάνω ορισμό το γινόμενο CR ορίζεται και είναι ένας $k \times k$ πίνακας, ενώ το RC είναι ένας 1×1 πίνακας, ο $(\sum_{l=1}^{k} t_l s_l)$.

Συγκρίνουμε τον παραπάνω αθροιστικό τύπο με τον αντίστοιχο τύπο που υπάρχει στον ορισμό του γινομένου πινάκων. Η σύγκριση μας οδηγεί σε μία επανεξέταση του αθροιστικού τύπου που υπάρχει στον ορισμό του γινομένου πινάκων, (βλέπε σελίδα 54) $t_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj} = r_i \cdot c_j$, όπου r_i είναι η i-γραμμή του A και c_j είναι η j-στήλη του πίνακα B. Αυτές οι απλές παρατηρήσεις οδηγούν στο παρακάτω

Πόρισμα 2.5.4 *Έστω $A = (a_{ij})_{\nu\times k}$ είναι ένας $\nu \times k$ πίνακας και ο $B = (b_{ij})_{k\times\mu}$ είναι ένας $k \times \mu$ πίνακας, όπου ν, k, μ είναι θετικοί ακέραιοι. Τότε το γινόμενο $A \cdot B$ είναι ένας $\nu \times \mu$ πίνακας του οποίου το (s,t) -στοιχείο είναι το γινόμενο $r_s \cdot c_t = \sum_{i=1}^{k} a_{si}b_{it}$, όπου r_s είναι η s -γραμμή του πίνακα A και c_t είναι η t -στήλη του πίνακα B.*

Το παραπάνω πόρισμα κωδικοποιεί κάπως καλλίτερα την διαδικασία εκτέλεσης των πράξεων που απαιτούνται για να βρεθεί το γινόμενο πινάκων.

Παράδειγμα 2.5.5

Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Θέλουμε να βρούμε το γινόμενο AB. Αυτό είναι ένας πίνακας 2×2 . Για να βρούμε το (2, 1)-στοιχείο του AB, θα πολλαπλασιάσουμε την 2-γραμμή του A, την (1, 1, -1), επί την 1-στήλη του B, την = $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Έτσι το (2, 1)-στοιχείο του AB είναι το (1, 1, -1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ =4. Ομοίως κάνουμε και τους άλλους υπολογισμούς και βρίσκουμε $AB = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Με τον ίδιο τρόπο ευρίσκουμε και το γινόμενο $BA = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες AB και BA δεν είναι ίδιοι. Βέβαια αυτό δεν ίσως έκπληξη διότι ο AB είναι πίνακας 2×2 ενώ ο BA είναι πίνακας 3×3 .

Το επόμενο παράδειγμα τονίζει καλλίτερα το φαινόμενο αυτό.

Παράδειγμα 2.5.6

Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ενώ $BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Παρ όλο ότι οι AB και BA πίνακες είναι και οι δύο 2×2 εντούτοις δεν είναι ίσοι. Διαπιστώνουμε δηλαδή μία ουσιώδη απόκλιση του πολλαπλασιασμού αυτού από τους παραδοσιακούς πολλαπλασιασμούς των πραγματικών , μιγαδικών κλπ. Δεν ισχύει εδώ η Μεταθετική ιδιότητα.

Το επόμενο παράδειγμα τονίζει και μία άλλη απόκλιση από τον παραδοσιακό πολλαπλασιασμό πραγματικών, μιγαδικών κλπ.

Παράδειγμα 2.5.7

Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε εδώ, όχι μόνον ότι $AB \neq BA$, αλλά και ότι AB=0 ενώ και ο A και ο B είναι $\neq 0$. Είναι και αυτό μία απόκλιση από τις παραδοσιακές ιδιότητες των πράξεων.

Θα επανέλθουμε και θα σχολιάσουμε τις αποκλίσεις αυτές, όμως άμεσα στρέφουμε την προσοχή μας στην συστηματοποίηση των βασικών ιδιοτήτων του γινομένου πινάκων.

Ιδιαίτερη σημασία έχει ο παρακάτω πίνακας

Ορισμός 2.5.8 *Έστω $I_\nu = (\delta_{ij})_{\nu\times\nu}$ είναι ο $\nu \times \nu$ πίνακας για τον οποίον*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ i = j \\ 0, & \alpha\nu\ i \neq j \end{cases}$$

*Ο πίνακας αυτός ονομάζεται **Ταυτοτικός πίνακας**. Συχνά, όταν υπονοείται το ν, γράφουμε I αντί του I_ν .*

Με βάση τα παραπάνω ο πίνακας I_ν παριστάνεται
$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ . \\ \nu \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & . & . & . & \nu \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Σε σχέση με τον παραπάνω ορισμό, κρίνουμε σκόπιμο να αναφέρουμε και το **Δέλτα του Kronecker** , που είναι ένας συμβολισμός αρκετά διαδεδομένος μέσα στα μαθηματικά

Ορισμός 2.5.9 *Έστω ότι A, B είναι σύνολα. Ονομάζουμε Δέλτα του Kronecker την συνάρτηση*

$$\delta : A \times B \to \{0, 1\}$$

που ορίζεται με τον παρακάτω τύπο

$$\delta(i,j) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ i = j \\ 0, & \alpha\nu\ i \neq j \end{cases}$$

Η συνήθης χρήση του Δέλτα του Kronecker είναι να γράφουμε δ_{ij} αντί γιά $\delta(i,j)$. Έτσι λοιπόν ο ταυτοτικός πίνακας θα γράφεται $I = (\delta_{ij})$

Πρόταση 2.5.10 *Το γινόμενο άνω (κάτω) τριγωνικών πινάκων είναι άνω (κάτω) τριγωνικός πίνακας.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $A = (\alpha_{ij})_{\nu\times\nu}$, $B = (\beta_{ij})_{\nu\times\nu}$ είναι $\nu \times \nu$ άνω τριγωνικοί πίνακες. Το (i,j) στοιχείο του AB είναι το

$$\sum_{s=1}^{\nu} \alpha_{is}\beta_{sj}$$

Έστω ότι $i > j$. Τότε αν $1 \leq s \leq \nu$, έπεται ότι ή θα είναι $s > j$ ή θα είναι $s < i$, άρα ή θα είναι $\beta_{sj} = 0$ ή θα είναι $\alpha_{is} = 0$. ῎Αρα αν $i > j$ τότε το (i, j) στοιχείο του AB είναι 0, άρα ο AB είναι άνω τριγωνικός.

Αναλόγως καλύπτεται και η περίπτωση των κάτω τριγωνικών πινάκων.

Το επόμενο Θεώρημα συγκεντρώνει τις βασικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων.

Θεώρημα 2.5.11 *Έστω ότι α, β είναι στοιχεία του $\mathbb{F}$, οι $\nu, \kappa, \lambda, \mu$ είναι θετικοί ακέραιοι και $A = (\alpha_{ij})_{\nu\times\kappa}$, $B = (\beta_{ij})_{\kappa\times\lambda}$, $\Gamma = (\gamma_{ij})_{\lambda\times\mu}$, $S = (s_{ij})_{\kappa\times\lambda}$, $T = (t_{ij})_{\kappa\times\lambda}$ είναι πίνακες. Τότε ισχύουν τα παρακάτω*

α) $I_\nu {\cdot} A = A {\cdot} I_\kappa = A$
Η παραπάνω ισότητα εκφράζεται λέγοντας ότι "Το I_ν είναι μονάδα στον πολλαπλασιασμό των πινάκων".

β) $A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$

γ) $\alpha \cdot (\beta \cdot \Gamma) = (\alpha\beta) \cdot \Gamma$

δ) $\alpha \cdot (B \cdot \Gamma) = (\alpha \cdot B) \cdot \Gamma = B \cdot (\alpha \cdot \Gamma)$
Οι τρεις παραπάνω ισότητες εκφράζουν την προσεταιριστική ιδιότητα στο πλαίσιο το οποίο ορίζονται.

ΣΧΟΛΙΟ. Την σχέση γ) την έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενο Θεώρημα και την παραθέτουμε γιά λόγους πληρότητας.

ε) $A \cdot (B + S) = A \cdot B + A \cdot S$
Η παραπάνω ισότητα εκφράζεται λέγοντας ότι "Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι Αριστερά Επιμεριστικός".

ζ) $(B + T) \cdot \Gamma = B \cdot \Gamma + T \cdot \Gamma$
Η παραπάνω ισότητα εκφράζεται λέγοντας ότι "Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι Δεξιά Επιμεριστικός".

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Οι αποδείξεις που απαιτεί το παραπάνω Θεώρημα μπορούν να γίνουν χωρίς ουσιώδεις περιπλοκές, μεταφράζοντας τις ισότητες που πρέπει να αποδειχθούν, σε ισότητες μεταξύ στοιχείων του $\mathbb{F}$. Η σχετικώς πιο δύσκολη είναι η β) για αυτό αυτή θα την δούμε αναλυτικά.

Για να αποδείξουμε ότι
$$A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$$
πρέπει και αρκεί να αποδείξουμε ότι τα δύο μέλη τις ισότητας, που είναι $\nu\times\mu$ πίνακες, έχουν τα ίδια στοιχεία στις αντίστοιχες θέσεις.

Ας δούμε πρώτα πιο είναι το (i, j)-στοιχείο του $A \cdot (B \cdot \Gamma)$. Το (s, j)-στοιχείο του $A \cdot B$ είναι το
$$\sum_{t=1}^{\lambda} \beta_{st}\gamma_{tj}$$

άρα το (i,j) στοιχείο του $A\cdot(B\cdot\Gamma)$ είναι το

$$\sum_{s=1}^{\kappa}\alpha_{is}\left(\sum_{t=1}^{\lambda}\beta_{st}\gamma_{tj}\right)$$

που ισούται με

$$\sum_{s=1}^{\kappa}\left(\sum_{t=1}^{\lambda}\alpha_{is}(\beta_{st}\cdot\gamma_{tj})\right).$$

Ας δούμε τώρα πιο είναι το (i,j) στοιχείο του $(A\cdot B)\cdot\Gamma$. Το (i,s)-στοιχείου των $(A\cdot B)$ είναι το

$$\sum_{t=1}^{\kappa}\alpha_{it}\beta_{ts}$$

άρα το (i,j) στοιχείο των $(A\cdot B)\cdot\Gamma$ είναι το

$$\sum_{s=1}^{\lambda}\left(\sum_{t=1}^{\kappa}\alpha_{it}\beta_{ts}\right)\gamma_{sj}$$

που ισούται με

$$\sum_{s=1}^{\lambda}\left(\sum_{t=1}^{\kappa}(\alpha_{it}\beta_{ts})\gamma_{sj}\right)$$

ή με

$$\sum_{t=1}^{\lambda}\left(\sum_{s=1}^{\kappa}\alpha_{is}(\beta_{st}\gamma_{tj})\right)$$

διότι ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{F}$ είναι προσεταιριστικός.

Είναι γνωστό όμως ότι

$$\sum_{s=1}^{\kappa}\left(\sum_{t=1}^{\lambda}\alpha_{is}(\beta_{st}\gamma_{tj})\right)=\sum_{t=1}^{\lambda}\left(\sum_{s=1}^{\kappa}\alpha_{is}(\beta_{st}\gamma_{tj})\right)$$

άρα τα (i,j)-στοιχεία των $A\cdot(B\cdot\Gamma)$ και $(A\cdot B)\cdot\Gamma$ είναι ίσα, άρα

$$A\cdot(B\cdot\Gamma)=(A\cdot B)\cdot\Gamma$$

Πρόταση 2.5.12 *Έστω ότι A είναι ένας $\nu\times\mu$ πίνακας, και κ ένας θετικός ακέραιος. Τότε ισχύει*

α) $O_{\kappa\times\nu}A=O_{\kappa\times\mu}$

β) $AO_{\mu\times\kappa}=O_{\nu\times\kappa}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα μπορούσε και αυτή η πρόταση να αποδειχθεί στην ίδια γραμμή όπως και η προηγούμενη. Όμως θα την αποδείξουμε σαν Πόρισμα της προηγούμενης, χωρίς άμεση αναφορά στα στοιχεία των ενεχομένων πινάκων.

Λόγω του αντίθετου στοιχείου, έχουμε

$$\begin{aligned} O_{\kappa\times\nu}\cdot A &= (A+(-A))\cdot A) \\ & \quad \text{Λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας} \\ &= (A\cdot A)+(-A)\cdot A \\ &= (A\cdot A)+((-1)A)\cdot A \\ & \quad \text{Λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας} \\ &= (A\cdot A)+(-1)(A\cdot A) \\ &= (A\cdot A)+(-(A\cdot A)) \\ & \quad \text{Λόγω της ιδιότητας του αντίθετου} \\ &= O_{\mu\times\kappa} \end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η

$$AO_{\mu\times\kappa} = O_{\nu\times\kappa}$$

Στην παραπάνω απόδειξη είδαμε τον πίνακα σαν ένα άτομο και όχι σαν κάτι που αναλύεται σε απλούστερα αντικείμενα. Το προηγούμενο Θεώρημα οικοδομεί έτσι περαιτέρω την μορφοποίηση της δομής του συνόλου των πινάκων και κάνει το σύνολο αυτό να έχει την δική του ζωή και λειτουργικότητα, χωρίς άμεση αναφορά στα στοιχεία από τα οποία αποτελείται ο πίνακας. Όπως θα δούμε επανειλημμένως στην συνέχεια, αυτή η οπτική γωνία πολλές φορές υπερέχει της εναλλακτικής οπτικής γωνίας, (που είναι και η προφανής) δηλαδή το να βλέπουμε δηλαδή τον πίνακα σαν κάτι που αποτελείται από στοιχεία, και κάθε ερώτημα που αφορά πίνακες, να μεταφράζεται σε ερώτημα πάνω στα στοιχεία τους. Το μήνυμα αυτό δεν αφορά μόνο την γραμμική άλγεβρα, αλλά είναι ίσως ο πυρήνας ενός από τα κεντρικότερα μηνύματα της άλγεβρας του 20ου αιώνα.

Εφαρμογή 2.5.13 *Έστω οτι A, B είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες, τέτοιοι ώστε $A\cdot B = B\cdot A$. Τότε να αποδειχθεί ότι*

(α) $(A+B)(A+B) = AA+2AB+BB$

(β) $(A+B)(A-B) = AA-BB$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.
(α)

$$\begin{aligned} (A+B)(A+B) &= A(A+B)+B(A+B) \\ &= (AA+AB)+(BA+BB) \\ &= AA+(AB+(BA+BB)) \\ &= AA+((AB+BA)+BB) \\ &= AA+(2AB+BB) \\ &= AA+2AB+BB \end{aligned}$$

(β) ομοίως

$$\begin{aligned}(A+B)(A-B) &= (A+B)(A+(-B))\\ &= A(A+(-B))+B(A+(-B))\\ &= AA+A(-B)+BA+B(-B)\\ &= AA-(AB)+BA-BB\\ &= AA-BB\end{aligned}$$

Όπως έχουμε δει, (βλέπε σελίδα 56, η διαφορά $AA-BB$ δεν είναι αναγκαστικά 0.

Η παραπάνω εφαρμογή υποκινεί τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.5.14 *Αν A, B είναι πίνακες και ισχύει $AB = BA$ τότε λέμε ότι "Οι Πίνακες Μετατίθενται".*

ΣΧΟΛΙΟ. Στην παραδοσιακή άλγεβρα του Γυμνασίου-Λυκείου, που διαπραγματευόταν πραγματικούς, μιγαδικούς αριθμούς, πολυώνυμα κλπ ποτέ δεν είχαμε αναφέρει μια έννοια σαν την παραπάνω. Ο λόγος είναι απλός : Αν δεν υπάρχει κάποια πράξη που δεν έχει την μεταθετική ιδιότητα, τότε δεν υπάρχει λόγος να δώσουμε όνομα στην ιδιότητα αυτή ώστε να τονισθεί η διάκριση. Π.χ. Αν υπήρχε μόνον ένας πλανήτης, τότε μάλλον δεν θα του δίναμε όνομα !

Ο επόμενος ορισμός μας επαναφέρει στην κυρίαρχη ενοποιητική γραμμή της άλγεβρας, που ενώ αναγνωρίζει τις ιδιαιτερότητες κάθε δομής, προσπαθεί κυρίως να τονίσει τις ομοιότητες, που συχνά είναι καλά κρυμμένες. Ετσι λοιπόν οι δυνάμεις, που είναι παλιά ιστορία στους πραγματικούς, μιγαδικούς αριθμούς, πολυώνυμα κλπ, υπάρχουν και στους πίνακες.

Ορισμός 2.5.15 *Έστω A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας. Τότε ορίζουμε το σύμβολο A^ν όπου ν είναι ακέραιος ≥ 0, επαγωγικά, ως εξής:*

(α) $A^0 = I_\nu$

(β) $A^\nu = A^{\nu-1}\cdot A$, *όπου ν θετικός ακέραιος.*

ΣΧΟΛΙΟ. Αντί να γράψουμε τα παραπάνω που φαίνονται και ίσως υπερβολικά σχολαστικά, μήπως να μπορέσουμε απλά να γράψουμε

$$A^\nu = A\cdot A\cdot A\cdot\ldots\cdot A$$

και να τελειώνουμε; Τί πρόβλημα θα είχε μια τέτοια τοποθέτηση.

Θεώρημα 2.5.16 *Έστω ότι A, B είναι τετραγωνικοί πίνακες που μετατίθενται και κ, λ είναι ακέραιοι ≥ 0. Τότε ισχύουν τα παρακάτω*

(α) $A^\kappa A^\lambda = A^{\kappa+\lambda} = A^\lambda A^\kappa$

(β) $(A^\kappa)^\lambda = A^{\kappa\lambda}$

(γ) $(AB)^\kappa = A^\kappa B^\kappa = B^\kappa A^\kappa$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη βασίζεται στην μέθοδο της επαγωγής και την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.

Με επαγωγικό τρόπο επίσης ορίζεται το γινόμενο περισσότερων από δύο πινάκων.

Ορισμός 2.5.17 *Έστω ότι $A_1, A_2, \ldots, A_\kappa$ είναι πίνακες, αντιστοίχως $\eta_1 \times \eta_2, \eta_2 \times \eta_3, \ldots, \eta_\kappa \times \eta_{\kappa+1}$ όπου κ θετικός ακέραιος. Τότε ορίζουμε το γινόμενο $A_1 A_2 \ldots A_\kappa$ ως κάτωτέρω, (με επαγωγικό τρόπο)*

$$A_1 A_2 \ldots A_\kappa = \begin{cases} A_1, & \text{αν} \quad \kappa = 1 \\ (A_1 \ldots A_{\kappa-1}) A_\kappa, & \text{αν} \quad \kappa \geq 2 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.5.18

Έστω ότι κ είναι θετικός ακέραιος και $A_1, A_2, \ldots, A_\kappa$ είναι πίνακες τύπου, αντιστοίχως, $\eta_1 \times \eta_2, \eta_2 \times \eta_3, \ldots, \eta_\kappa \times \eta_{\kappa+1}$. Να αποδειχθεί ότι

$$(A_1 \ldots A_\kappa)^t = A_\kappa^t A_{\kappa-1}^t \ldots A_2^t A_1^t$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σε αντανάκλαση από τον παραπάνω ορισμό, και η απόδειξη που έπεται θα είναι και αυτή επαγωγική.

Για $\kappa = 1$, η πρόταση είναι προφανής.

Θα αποδείξουμε την πρόταση για $\kappa = 2$, και αυτό είναι το πιο δύσκολο σημείο της απόδειξης.

Έστω ότι $A_1 = (\alpha(1)_{ij})$, $A_2 = (\alpha(2)_{ij})$. Τότε το (i,j)-στοιχείο του πίνακα $A_1 A_2$ είναι το

$$\sum_{s=1}^{\eta_2} \alpha(1)_{is} \alpha(2)_{sj}$$

και ακριβώς το ίδιο είναι και το (j,i)-στοιχείο του $(A_1 A_2)^t$.

Ας δούμε τώρα πιο είναι το (j,i)-στοιχείο των $A_2^T A_1^T$.

Το (j,t)-στοιχείο του A_2^T είναι το $\alpha(2)_{tj}$ ενώ το (t,i)-στοιχείο του A_1^T είναι το $\alpha(1)_{it}$, άρα το (j,i)-στοιχείο του $A_2^T A_1^T$ είναι το

$$\sum_{t=1}^{\eta_2} \alpha(2)_{tj} a(1)_{it} = \sum_{t=1}^{\eta_2} \alpha(1)_{it} \alpha(2)_{tj}$$

άρα ακριβώς το ίδιο με (j,i)-στοιχείο του $(A_1 A_2)^t$, που βρήκαμε πιο πάνω.

Άρα απεδείχθη ότι

$$(A_1 A_2)^t = A_2^t A_1^t.$$

Προχωρούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την επαγωγή για κάθε $\kappa \geq 2$.

Υποθέτουμε επαγωγικά ότι ισχύει η πρόταση για $\kappa = \mu$. Έστω $A_1, \ldots, A_\mu, A_{\mu+1}$ είναι πίνακας τέτοιος ώστε να έχει έννοια το γινόμενο

$$A_1 A_2 \ldots A_\mu A_{\mu+1}.$$

Τότε

$$(A_1A_2\dots A_\mu A_{\mu+1})^t = ((A_1\dots A_\mu)A_{\mu+1})^t$$

λόγω του επαγωγικού ορισμού του γινομένου

$$= A_{\mu+1}^t(A_1\dots A_\mu)^t$$

λόγω της παρούσης πρότασης για $\kappa = 2$

$$= A_{\mu+1}^t(A_\mu^t\dots A_1^t)$$

Ισως να σκέφτεται ο αναγνώστης ότι τελειώσαμε ουσιαστικά, και μπορούμε να πούμε ότι

$$A_{\mu+1}^t(A_\mu^t\dots A_1^t) = A_{\mu+1}^t A_\mu^t\dots A_1^t$$

και αυτό ήταν! Μιά τέτοια ... αισιόδοξη σκέψη, μάλλον προκύπτει από την πεποίθηση ότι είναι εύλογος (;) η προφανής(;) η πάρακάτω γενική ισότητα,

$$B_{\mu+1}(B_\mu\dots B_1) = B_{\mu+1}B_\mu\dots B_1$$

Ενώ είναι αλήθεια ότι είναι αληθής η τελευταία ίσότητα, όμως παρά τις κάποιες επιφανειακές εντυπώσεις, και ενδεχομένως και την παραδοσιακή, χωρίς πολλές εξηγήσεις, απαλοιφή των παρενθέσεων στα στοιχειώδη μαθηματικά του Λυκείου, η αλήθεια είναι ότι ΔΕΝ είναι προφανές γιατί είναι αληθής! Χρειάζεται απόδειξη! Η απόδειξη δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη, όμως πρέπει να γίνει. Ο πιό άμεσος τρόπος είναι να γίνει και αυτή με επαγωγή ως προς μ, και αυτό το αφήνουμε σαν άσκηση για τον αναγνώστη.

Έχουμε αναπτύξει αρκετά εργαλεία ώστε να μπορούμε να συζητήσουμε ένα σοβαρό ερώτημα, που δεν είναι ερώτημα της μαθηματικής επιστήμης, αλλά είναι ερώτημα που γιά την μαθηματική επιστήμη. Το ερώτημα αυτό είναι το εξής: Γιατί ορίσαμε το γινόμενο πινάκων έτσι όπως το ορίσαμε; Γιατί να μην ορίσουμε ένα γινόμενο που να έχει τα χαρακτηριστικά των παραδοσιακών γινομένων των πραγματικών αριθμών, μιγαδικών αριθμών κ.λπ. Πολλά εκ των οποίων ΔΕΝ τα έχει το γινόμενο των πινάκων, όπως για παράδειγμα

(α) ΔΕΝ ορίζεται πάντα (βλέπε σελίδα 54)

(β) ΔΕΝ ισχύει η μεταθετική ιδιότητα (βλέπε σελίδα 56)

(γ) ΕΙΝΑΙ δυνατόν να είναι $AB = 0$ και $A, B \neq 0$ (βλέπε σελίδα 56)
και διάφορα άλλα που θα δούμε στην συνέχεια.

Ας δούμε πως απαντάμε, ή μάλλον καλλίτερα, ας δούμε πως κάνουμε διάλογο σε ένα τέτοιο ερώτημα. Ίσως θα μπορούσε να πει κανείς ότι δεν υπάρχει τίποτα να συζητήσουμε: Ο ορισμός είναι σαφής και συντακτικά ορθός. Το Θεώρημα και οι λοιπές συνέπειες του ορισμού έχουν αποδειχθεί, άρα η έκθεση των πραγμάτων είναι λογικά ορθή. Υπάρχει όμως αντίλογος : Ασφαλώς δεν υπάρχει αμφιβολία για την λογική ορθότητα, όμως έχει ενδιαφέρον η θεωρία που προκύπτει από τον ορισμό αυτό και τα συναφή με αυτόν, και αν θέσουμε μια τέτοια προβληματική, τί σημαίνει να "έχει ενδιαφέρον";

Αν η συζήτηση περιορισθεί στην "λογική ορθότητα" και αφήσουμε έξω από την συζήτηση ερωτήματα όπως "έχει ενδιαφέρον" ή "είναι σημαντικό" τότε ΔΕΝ έχουμε να συζητήσουμε τίποτα, πέρα της ορθότητας των αποδείξεων και λοιπών συμπερασμάτων. Προφανώς δεν θα θέλαμε να υιοθετήσουμε μια τέτοια αντίληψη, η οποία αποσυνδέει τα μαθηματικά από την εξέλιξη της ανθρώπινης κοινωνίας και του πολιτισμού. Εξάλλου δεν διδάσκουμε οτιδήποτε είναι αληθές, αλλά μεταξύ των πάρα πολλών που είναι αληθή, επιλέγουμε εκείνα τα λίγα, που έχουν σημαντικό ενδιαφέρον. Όπως είπε τον 20ο αιώνα, ο René Thom [1] “Ο μεγάλος εχθρός της αλήθειας δεν είναι τόσο το ψευδές, αλλά πολύ μεγαλύτερος εχθρός είναι το ... ασήμαντο”.

Το πια είναι τα σημαντικά μαθηματικά και με πια κριτήρια αποφασίζεται αυτό, είναι μια πολύ μεγάλη συζήτηση που θα γίνεται όσο υπάρχει πολιτισμός, και την οποία, για πρακτικούς λόγους χρόνου κλπ, δεν μπορούμε ούτε και να αρχίσουμε στη θέση αυτή. Θα κάνουμε όμως κάποιο σχόλιο για το γινόμενο πινάκων, το οποίο μας έδωσε την αφορμή γιά αυτή την συζήτηση, και θα εντοπίσουμε κάποιες ενδιαφέρουσες διασυνδέσεις και με πιο παραδοσιακές μαθηματικές έννοιες.

Εφαρμογή 2.5.19 *Έστω ότι $A = (\alpha_{ij})$ είναι ένας $\nu \times \mu$ πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{F}$. Ορίζουμε μια απεικόνιση*

$$L(A) : \mathbb{F}^{\mu} \to \mathbb{F}^{\nu}$$

που ορίζεται με τον τύπο

$$L(A)(x) = xA^t, \quad \text{για} \quad x \in \mathbb{F}^{\mu}$$

Θεωρούμε επίσης και έναν άλλο πίνακα, τον $B = (\beta_{ij})_{\lambda\times\kappa}$ και την αντίστοιχη απεικόνιση

$$L(B) : \mathbb{F}^{\kappa} \to \mathbb{F}^{\lambda}.$$

Ξέρουμε από το Λύκειο και είδαμε και στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου αυτού, ότι μεταξύ απεικονίσεων υπάρχει η έννοια της σύνθεσης, που άλλοτε ορίζεται άλλοτε όχι. Για παράδειγμα θεωρώ τρεις πραγματικές συναρτήσεις

$$\alpha : R \to R, \quad \beta : R \to R, \quad \gamma : R_+ \to R_+$$

όπου R_+ είναι οι θετικοί πραγματικοί), που έχουν αντίστοιχο τύπο

$$\alpha(x) = x^2, \quad \beta(x) = x + 1, \quad \gamma(x) = \sqrt{x}.$$

Ορίζονται οι συνθέσεις συναρτήσεων που συμβολίζονται με το σύμβολο $\circ$,

$$\alpha\circ\beta, \beta\circ\alpha, \gamma\circ\alpha : R \to R$$
$$\alpha\circ\gamma, \beta\circ\gamma : R_+ \to R$$

ενώ ΔΕΝ ορίζεται η $\gamma \circ \beta$.

Αν συγκρίνουμε τους πίνακες A, B και τις αντίστοιχες απεικονίσεις $L(A)$ και $L(B)$ παρατηρούμε ότι έτσι όπως ορίστηκε ο πολλαπλασιασμός των πινάκων, το γινόμενο AB ορίζεται τότε και **μόνον** τότε αν ορίζεται η σύνθεση $L(A)\circ L(B)$, που συμβαίνει αν $\mu = \lambda$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $\mu = \lambda$ και ας θεωρήσουμε την σύνθεση συναρτήσεων

$$L(A) \circ L(B) : \mathbb{F}^{\kappa} \to \mathbb{F}^{\nu}$$

[1]Thom René (1923-...) Γάλλος μαθηματικός, εργάστηκε στην Διαφορική Τοπολογία, δημιούργησε τη Θεωρία Cobordism και τιμήθηκε με το βραβείο Fields το 1958.

που έχει τύπο, για $y \in \mathbb{F}^\kappa$

$$
\begin{aligned}
(L(A) \circ L(B))(y) &= L(A)(L(B)(y)) \\
&\text{από τον ορισμό του } \circ \\
&= L(A)(yB^t) \\
&\text{από τον ορισμό του } L(B) \\
&= (yB^t)A^t \\
&\text{από τον ορισμό του } L(A) \\
&= y(B^tA^t) \\
&\text{από την προσεταιριστική ιδιότητα} \\
&= y(AB)^t \\
&\text{από προηγούμενο Θεώρημα} \\
&= L(AB)(y) \\
&\text{από τον ορισμό του } L(AB)
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι

$$L(A) \circ L(B) = L(AB)$$

Αυτήν την τελευταία ισότητα μπορούμε να την ερμηνεύσουμε ως εξής: Ο πολλαπλασιασμός πινάκων ορίστηκε έτσι ώστε να αντανακλά την σύνθεση $\circ$ των συναρτήσεων $L(A), L(B)$. Κατά αυτόν τον τρόπο ο πολλαπλασιασμός αυτός συνδέεται με κάτι θεμελιώδες. Από αυτή την οπτική γωνία δεν μας κάνει πια εντύπωση το ότι δεν ορίζεται πάντοτε, αφού π.χ. ούτε η σύνθεση $\gamma \circ \beta$, των παραπάνω συναρτήσεων ορίζεται. Επίσης δεν μας παραξενεύει το ότι ο πολλαπλασιασμός αυτός δεν είναι μεταθετικός, αφού π.χ. στις παραπάνω συναρτήσεις η μεν $\alpha \circ \beta$ έχει τύπο

$$\alpha \circ \beta(x) = (x+1)^2 \quad \text{για} \quad x \in R$$

η δε $\beta \circ \alpha$ έχει τύπο

$$\beta \circ \alpha(x) = x^2 + 1, \quad \text{για} \quad x \in R$$

συνεπώς δεν είναι ίσες. Το φαινόμενο της μη μεταθετικότητας της σύνθεσης συναρτήσεων δεν μας παραξενεύει και είναι σύνηθες. Συνεπώς δεν πρέπει να μας παραξενεύει η μη μεταθετικότητα του γινομένου των πινάκων, διότι είναι αντανάκλαση της μη μεταθετικότητας της σύνθεσης.

Παράδειγμα 2.5.20

Έστω οι Διαγώνιοι Πίνακες $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ και $D(\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$ όπου τα $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \beta_1, \ldots, \beta_\nu$ ανήκουν στο $\mathbb{F}$. Ας υπολογίσουμε το γινόμενο $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)D(\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$. Έστω ότι $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu) = (x_{ij})$ και $D(\beta_1, \ldots, \beta_\nu) = (y_{ij})$. Τότε ο όρος (i, j) του ζητούμενου γινομένου είναι ο

$$\sum_\kappa = \alpha_{i\kappa}\beta_{\kappa j}.$$

Έστω ότι $i \neq j$. Τότε το $\alpha_{i\kappa}\beta_{\kappa j}$ είναι πάντα 0, άρα ο (i,j)-όρος του γινομένου μας είναι 0.

Έστω ότι $i = j$. Έστω ο όρος $\alpha_{i\kappa}\beta_{\kappa j}$ είναι $\neq 0$ μόνον αν $i = j$ και $\kappa = i$, οπότε ο όρος αυτός είναι $\alpha_{ii}\beta_{ii} = \alpha_i\beta_i$.

Άρα
$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)D(\beta_1, \ldots, \beta_\nu) = D(\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_\nu\beta_\nu)$$

Παράδειγμα 2.5.21

Ας θεωρήσουμε το γινόμενο
$$(x, y, 1)\begin{pmatrix} \alpha & h & g \\ h & \beta & f \\ g & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$
αν εκτελέσουμε τις πράξεις βρίσκουμε
$$\alpha x^2 + 2hxy + \beta y^2 + 2gx + 2fy + c.$$

Η παράσταση αυτή μας θυμίζει την εξίσωση Κωνικών Τομών, και μας παρέχει μια σύνδεσή τους με την Θεωρία των Πινάκων.

Δίνουμε σαν άσκηση προς τον αναγνώστη να βρει τον πίνακα που αντιστοιχεί στα παρακάτω πολυώνυμα.

(α) $3x - 5y + 2$

(β) $2x^2 + 3xy + 4y^2 + x + y + 5$

(γ) $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} - 1$

(δ) $y^2 = \alpha x$.

Παράδειγμα 2.5.22

Όπως είδαμε ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι μεταθετικός. Ας θεωρήσουμε τον πίνακα $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και ας ελέγξουμε με ποιούς 2×2 πίνακες $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ μετατίθεται.

Έστω ότι $BA = AB$ τότε, κάνοντας τις πράξεις βλέπουμε ότι
$$\begin{pmatrix} \beta & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$
άρα $\beta = 0$ και $\alpha = \delta$, άρα
$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Μεταξύ αυτών των τελευταίων πινάκων ας ελέγξουμε ποιοι μετατίθενται με τον πίνακα $\Gamma = B^t$. Έστω ότι

$$A\Gamma = \Gamma A$$

άρα

$$AB^t = B^t A,$$

και

$$(AB^t)^t = (B^t A)^t$$
$$(B^t)^t A^t = A^t (B^t)^t$$
$$BA^t = A^t B$$

Όμως

$$A^t = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Από τον προηγούμενο συλλογισμό, αφού ο A^t μετατίθεται με τον B, έχουμε $\gamma = 0$. Άρα οι μονοί πίνακες που μετατίθενται με τους B και B^t είναι οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = D(\alpha, \alpha).$$

Εξάλλου δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι αυτοί οι πίνακες μετατίθενται με όλους τους 2×2 πίνακες.

Παράδειγμα 2.5.23

Στο σύνολο $\mathbb{R}^{2\times 2}$ θεωρούμε το υποσύνολο

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Θεωρούμε επίσης και τους πίνακες

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \text{για } \alpha \in \mathbb{R} \\ J_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τα παρακάτω

(α) Αν $X, Y \in M$ τότε $XY = YX$

(β) $J_2^2 = -I_2$

(γ) Για κάθε $X \in M$ υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένοι $\alpha, \beta \in R$, ώστε

$$X = s(\alpha) I_2 + s(\beta) J_2 = \alpha I_2 + \beta J_2$$

(δ) Αν $\alpha, \beta \in R$ τότε ισχύει

$$\begin{aligned} s(\alpha\beta) &= s(\alpha)s(\beta) \\ s(\alpha+\beta) &= s(\alpha)+s(\beta) \\ s(1) &= I_2 \end{aligned}$$

Καλείται ο αναγνώστης να αποδείξει τα παραπάνω.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο M, συμπεριφέρεται όπως οι μιγαδικοί αριθμοί, έχοντας το υποσύνολο το $\{s(\alpha) : \alpha \in R\}$, το οποίο κατά κάποιο τρόπο παίζει τον ρόλο των πραγματικών αριθμών, τον πίνακα I_2 που παίζει ρόλο μοναδιαίου στοιχείου και τον πίνακα J_2 που παίζει ρόλο αντίστοιχο με την φανταστική μονάδα i

Ορισμός 2.5.24 *Ορίζουμε την απεικόνιση $s : \mathbb{F} \to \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, που έχει τύπο*

$$s(a) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \alpha \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 2.5.25

Για την απεικόνιση του προηγούμενου ορισμού να επιβεβαιώσετε ότι

(α) Είναι ένα-προς-ένα (Βλέπε σχετικό ορισμό στο πρώτο κεφάλαιο)

(β) $s(\alpha+\beta) = s(\alpha)+s(\beta)$

(γ) $s(\alpha\beta) = s(\alpha)s(\beta)$

(δ) $s(1) = I_\nu$

(ε) $s(-\alpha) = -s(\alpha)$

(στ) $s(\alpha)A = \alpha A,\ \alpha \in \mathbb{F},\ A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ Μπορούμε να σχολιάσουμε τις σχέσεις του παραπάνω παραδείγματος, λέγοντας ότι κατά κάποιο τρόπο η εικόνα $s(\mathbb{F}$ συμπεριφέρεται όπως οι πραγματικοί αριθμοί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν οι πίνακες AB μετατίθενται τότε

$$(A+B+\Gamma)(A^2+B^2+\Gamma^2-AB-A\Gamma-B\Gamma)) = A^3+B^3+\Gamma^3-3AB\Gamma$$

2. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Αν κ είναι ακέραιος ≥ 0, τότε να αποδειχθεί ότι

$$A^\kappa = (-1)^\kappa \begin{pmatrix} 1+6\kappa & 9\kappa \\ -4\kappa & 1-6\kappa \end{pmatrix}.$$

3. (α) Το γινόμενο δύο συμμετρικών (αντισυμμετρικών) πινάκων, που μετατίθενται, είναι συμμετρικός πίνακας.

   (β) Να ελεγχθεί αν το γινόμενο των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

   είναι συμμετρικός πίνακας.

4. Έστω ότι $A_1, \ldots, A_\kappa$ είναι πίνακες, όπου κ είναι θετικός ακέραιος και ότι το γινόμενο

$$A_1 \ldots A_\kappa$$

   έχει έννοια (δηλαδή, ορίζεται).

   (α) Να αποδειχθεί ότι αν $\kappa \geq 2$

$$A_1 \ldots A_\kappa = A_1(A_2 \ldots A_\kappa)$$

   (β) Αν $\kappa \geq 3$ να αποδειχθεί ότι

$$A_1 \ldots A_\kappa = (A_1 A_2)(A_3 \ldots A_\kappa)$$

   (γ) Έστω $\kappa \geq 3$ και $2 \leq i \leq (\kappa - 1)$. Να αποδειχθεί ότι

$$A_1 \ldots A_\kappa = (A_1 \ldots A_i)(A_{i+1} \ldots A_\kappa)$$

   (Υπόδειξη. Επαγωγή ως προς κ).

5. Έστω A ένας $\nu \times \nu$ πίνακας και α στοιχείο του $\mathbb{F}$. Τότε ισχύει

$$D(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)A = AD(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$$

6. Ποιοί 2×2 πίνακες μετατίθενται με τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

7. (α) Υπενθυμίζουμε ότι αν $z = \alpha + \beta i$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε ο μιγαδικός $\bar{z} = \alpha - \beta i$ λέγεται συζυγής του z. Να αποδειχθεί ότι αν $z = \alpha + \beta i$, $z' = \alpha' + \beta' i$ είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύουν τα εξής

   (i) $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$

   (ii) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$

   (iii) $z \cdot \bar{z} = \alpha^2 + \beta^2$

   (β) Θεωρούμε την απεικόνιση $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, που έχει τύπο $Q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}$. Έστω

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε ισχύουν τα παρακάτω

(i) η Q είναι ένα-προς-ένα

(ii) $Q(x+y) = Q(x) + Q(y),\ x, y \in \mathbb{C}^2$

(iii) $E^2 = J^2 = K^2 = -I$, $EJ = -JE = K$, $JK = -KJ = E$, $KE = -EK = J$

(iv) Αν $x, y \in \mathbb{C}^2$ $x = x_1 + x_2 i$, $y = y_1 + y_2 i$ τότε $Q(x, y) = x_1 I + x_2 E + y_1 J + y_2 K$

(v) Αν $x, y \in \mathbb{C}^2$, τότε το $Q(x)Q(y)$ ανήκει στην εικόνα της Q

(vi) Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$ τότε

$$Q(\alpha_1 + \alpha_2 i, \alpha_3 + \alpha_4 i)Q(\alpha_1 - \alpha_2 i, -\alpha_3 - \alpha_4 i) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2)I$$

(vii) Αν $A \in Q(\mathbb{C}^2)$ και $A \neq 0$ τότε υπάρχει $B \in Q(\mathbb{C}^2)$, τέτοιος ώστε $BA = AB = I$.

8. Έστω πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ στο $\mathbb{C}^{2\times 2}$, $z, w \in \mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε $\beta = z^2$ και $\gamma = -w^2$, και έστω ότι $A^2 = 0$. Να αποδειχθεί ότι είτε $\alpha = -\delta = wz$, είτε $\alpha = -\delta = -wz$. Γιατί υποθέσαμε ότι ο πίνακας έχει μιγαδικούς όρους.

9. Να προσδιορισθούν όλοι οι 2×2 πίνακες X που έχουν πραγματικά στοιχεία και ισχύει $X^2 = I_2$.

2.6 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Με αυτό συνεχίζουμε την ανάπτυξη της άλγεβρας των Πινάκων. Μέχρι αυτή τη στιγμή έχουμε την Πρόσθεση, Αφαίρεση, Βαθμωτό Γινόμενο και Γινόμενο Πινάκων. Εξετάσαμε τις νομοτέλειες αυτού του λογισμού και διαπιστώσαμε αρκετές ομοιότητες με τον παραδοσιακό λογισμό των πραγματικών μιγαδικών, πολυωνύμων κ.λπ., όμως είδαμε και κάποιες διαφορές, κυρίως στο γινόμενο πινάκων.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε την δυνατότητα να έχουμε κάποιου είδους διαίρεση μεταξύ πινάκων.

Ο βασικός ορισμός του κεφαλαίου είναι ο επόμενος.

Ορισμός 2.6.1 *Έστω ότι A είναι ένας $\nu \times \nu$ πίνακας. Λέμε ότι ο $\nu \times \nu$ πίνακας B είναι αντίστροφος του A, όταν*

$$AB = BA = I_\nu$$

Παράδειγμα 2.6.2

Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

και θα εξετάσουμε αν έχει αντίστροφο.

Αν υπάρχει αντίστροφος $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ θα πρέπει, (Προσοχή: ΔΕΝ αρκεί), να ισχύει

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Η ισότητα αυτή των πινάκων, μεταφράζεται σε ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους

$$\begin{aligned} 3\alpha - \beta &= 1 \\ -5\alpha + 2\beta &= 0 \\ 3\gamma - \delta &= 0 \\ -5\gamma + 2\delta &= 1 \end{aligned}$$

που ουσιαστικά είναι δύο συστήματα με δύο άγνωστους το καθένα. Τέτοια συστήματα έχουμε μάθει να λύνουμε στο Λύκειο, οπότε λύνοντας τα βρίσκουμε

$$\alpha = 2, \quad \beta = 5, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 3$$

έτσι λοιπόν παίρνουμε

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Προσοχή: Με όσα κάναμε μέχρι τώρα, εξασφαλίσαμε ότι $BA = I_2$. Δεν έχουμε εξασφαλίσει το ότι ο Β είναι ο αντίστροφος του Α, ούτε καν το ότι υπάρχει αντίστροφος Είναι ανοικτό ερώτημα αν ισχύει

$$AB = I_2$$

, που μόνο αν ισχύει και αυτό συνάγουμε ότι ο Β είναι αντίστροφος του Α. Όμως, μέχρι στιγμής εξασφαλίσαμε το ότι αν υπάρχει αντίστροφος του Α , τότε αυτός είναι μοναδικός και είναι αναγκαστικά ο Β, διότι η απαίτηση

$$BA = I_2$$

οδηγεί μονοσήμαντα σε έναν και μοναδικό Β.

Συνεχίζουμε λοιπόν την απόδειξη και κάνοντας τις πράξεις διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα ο B είναι αντίστροφος του A και είναι και μοναδικός.

Παράδειγμα 2.6.3

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

και θα εξετάσουμε, όπως κάναμε και στο προηγούμενο παράδειγμα, αν έχει αντίστροφο. Αυτή την στιγμή και με βάση την θεωρία που έχουμε αναπτύξει, δεν ξέρουμε αν υπάρχει η όχι αντίστροφος και επίσης αν υπάρχει δεν ξέρουμε αν είναι μοναδικός.

Έστω ότι υπάρχει αντίστροφος και είναι ο

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

οπότε θα πρέπει

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

άρα θα πρέπει

$$\begin{aligned} 7\alpha + 2\beta &= 1 \\ 14\alpha + 4\beta &= 0 \\ 7\gamma + 2grd &= 0 \\ 14\gamma + 4\delta &= 1. \end{aligned}$$

Το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων, είναι αδύνατο, και αυτό το βλέπουμε εύκολα πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της πρώτης εξίσωσης επί 2 και αφαιρώντας την προκύπτουσα από τη δεύτερη εξίσωση, οπότα πέρνουμε

$$0 = -2$$

που είναι άτοπο.

Το συμπέρασμα είναι ότι ο A ΔΕΝ έχει αντίστροφο.

Οι παραπάνω προτάσεις διαφωτίζουν ορισμένα ζητήματα που αφορούν την έννοια του αντίστροφου πίνακα.

Πρόταση 2.6.4 *Ο αντίστροφος ενός πίνακα, (αν υπάρχει), είναι μοναδικός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι A ένας πίνακας και B, Γ είναι δύο αντίστροφοί του. Τότε ισχύουν οι

$$AB = BA = A\Gamma = \Gamma A = I.$$

Συνεπώς

$$\Gamma = \Gamma I = \Gamma(AB) = (\Gamma A)B = IB = B.$$

Ο μοναδικός αυτός αντίστροφος του A, εφόσον υπάρχει, συμβολίζεται A^{-1}.

Ένας πίνακας που έχει αντίστροφο ονομάζεται Αντιστρέψιμος (invertible) ή Μη-Ιδιάζων (non-singular), ενώ ένας πίνακας που δεν έχει αντίστροφο ονομάζεται Μη-Αντιστρέψιμος (non-invertible) ή Ιδιάζων (singular)

Πρόταση 2.6.5 *Έστω ότι οι πίνακες $A, B, A_1, \ldots, A_\nu$ είναι αντιστρέψιμοι $\mu \times \mu$ πίνακες. Τότε ισχύει*

(α) $(A^{-1})^{-1} = A$

(β) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(γ) $(A_1 A_2 \ldots A_\nu)^{-1} = A_\nu^{-1} A_{\nu-1}^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, άρα $(A^{-1})^{-1} = A$
(β) Ισχύει

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B(B^{-1}A^{-1})) = A((BB^{-1})A^{-1}) = A(IA^{-1})(AB) = I$$

ομοίως ελέγχεται ότι $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$
(γ) Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς ν.
Για $\nu = 1$ είναι προφανές εκ του ορισμού, ενώ για $\nu = 2$ μόλις αποδείχθηκε πιο πάνω. Έστω λοιπόν ότι ισχύει για κ παράγοντες όπου $\kappa \geq 2$. Έστω λοιπόν ότι $\nu = \kappa + 1$

$$\begin{aligned}(A_1 \dots A_\nu)^{-1} &= ((A_1 \dots A_{\nu-1})A_\nu)^{-1} \\ &\text{επειδή ισχύει για δύο παράγοντες} \\ &= A_\nu^{-1}(A_1 \dots A_{\nu-1})^{-1} \\ &\text{κατά την επαγωγική υπόθεση} \\ &= A_\nu^{-1}(A_{\nu-1}^{-1} \dots A_1^{-1}) \\ &\text{οπότε} \\ &= A_\nu^{-1}A_{\nu-1}^{-1} \dots A_1^{-1}\end{aligned}$$

(Για τον αναγνώστη: Να εξηγηθεί το τελευταίο συμπέρασμα).

Εφαρμογή 2.6.6 *Έστω A, B πίνακες $\neq \mathbb{O}$ και έστω ότι $AB = \mathbb{O}$. Τότε οι A, B είναι ιδιάζοντες.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι ο A έχει αντίστροφο. Τότε $A^{-1}(AB) = A^{-1}0$, $(A^{-1}A)B = 0$, $IB = 0$ άρα $B = 0$, που αντίκειται στην υπόθεση. Ομοίως εργαζόμαστε και για τον B.

Εφαρμογή 2.6.7 *Έστω A, B είναι $\nu \times \mu$ πίνακες και ο A είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει ακριβώς ένας πίνακας X τέτοιος ώστε $AX + B = \mathbb{O}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι υπάρχει ένας τέτοιος X. Τότε

$$\begin{aligned}&A^{-1}(AX + B) = A^{-1}\mathbb{O} \\ &A^{-1}(AX) + A^{-1}B = \mathbb{O} \\ &(A^{-1}A)X = -A^{-1}B \\ &X = -A^{-1}B\end{aligned}$$

Άρα αν υπάρχει τέτοιος X, είναι μοναδικός. Εύκολα ελέγχεται ότι

$$A(-A^{-1}B) + B = \mathbb{O}.$$

Άρα υπάρχει τέτοιος X και είναι ο

$$X = -A^{-1}B.$$

Η παραπάνω εφαρμογή αντιστοιχεί κατά κάποιο τρόπο στην λύση εξισώσεων πρώτου βαθμού, στους πραγματικούς αριθμούς.

Ακολουθώντας για άλλη μια φορά, ιδέες που προέρχονται από τις πιο παραδοσιακές αλγεβρικές δομές, ορίζουμε και στους πίνακες δυνάμεις με αρνητικό εκθέτη.

Ορισμός 2.6.8 *Έστω A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και κ ένας ακέραιος. Τότε ορίζουμε*

$$A^{\kappa} = \begin{cases} A^{\kappa} & \alpha\nu \quad \kappa \geq 0 \\ (A^{-1})^{-\kappa} & \alpha\nu \quad \kappa < 0. \end{cases}$$

ΣΧΟΛΙΟ. Ο αντίστροφος ενός πίνακα είναι το αντίστοιχο του αντίθετου πίνακα, αναφορικά με τις πράξεις πολλαπλασιασμο και πρόσθεση. Οι σχέσεις ορισμού είναι

$$\begin{aligned} &AA^{-1} = A^{-1}A = I \\ &A + (-A) = (-A) + A = \mathbb{O} \end{aligned}$$

Στον πολλαπλασιασμό, που γενικά δεν είναι μεταθετικός απαιτούνται και οι δύο ισότητες, ενώ στην πρόσθεση αρκεί η μια.

Ο παρακάτω ορισμός, εκλεπτύνει έτι περαιτέρω την έννοια του αντίστροφου πίνακα.

Ορισμός 2.6.9 *Έστω A ένας $\mu \times \nu$ πίνακας. Ο $\nu \times \mu$ πίνακας B ονομάζεται Αριστερός Αντίστροφος του A αν ισχύει $BA = I_{\nu}$, ονομάζεται δε Δεξιός Αντίστροφος του A αν ισχύει $AB = I_m$.*

Παράδειγμα 2.6.10

Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & (1+\alpha)/4 \\ \beta & 1-\beta & \beta/4 - 1/2 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $BA = I_2$, άρα ο A έχει άπειρους Αριστερούς Αντίστροφους. Όμως ο A δεν έχει κανέναν Δεξιό Αντίστροφο, διότι αν υποθέσουμε ότι ο A έχει έναν Δεξιό Αντίστροφο $x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & c \\ e & f & g \end{pmatrix}$ τότε θα πρέπει $AX = I_3$ άρα

$$\begin{array}{lll} \alpha + e = 1, & \beta + f = 0, & c + g = 0 \\ 2\alpha + e = 0 & 2\beta + f = 1 & 2c + g = 0 \\ 4\alpha = 0 & 4\beta = 0 & 4c = 1 \end{array}$$

Οι παραπάνω δίνουν $\alpha = 0$, άρα $0 + e = 1$ και $2 \cdot 0 + e = 0$, άρα $e = 0 = 1$ που είναι άτοπο. Συνεπώς πράγματι ο A δεν έχει Δεξιό Αντίστροφο.

Παράδειγμα 2.6.11

Εύκολα επαληθεύεται κάνοντας τις σχετικές πράξεις, ότι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ έχει δεξιό και αριστερό αντίστροφο τον $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ότι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

έχει δεξιό και αριστερό αντίστροφο τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ενώ ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ έχει δεξιό και αριστερό αντίστροφο τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3/4 & 1/4 & 1/4 \\ -3/8 & 1/8 & -5/8 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα 2.6.12

Θεωρούμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Ο πίνακας αυτός δεν έχει ούτε δεξιό ούτε αριστερό αντίστροφο. Αυτό διαπιστώνεται εύκολα ως εξής. Έστω ότι υπάρχει αριστερός αντιστροφος του A, ο $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ c & d \end{pmatrix}$ οπότε πρέπει $BA = I_2$, άρα

$$2\alpha + 2\beta = 1, \quad 3\alpha + 3\beta = 0, \quad 2c + 2d = 0, \quad 3c + 3d = 1.$$

Τα παραπάνω οδηγούν στις $\alpha + \beta = 1 = 0$, που είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει αριστερός αντίστροφος.

Το παρακάτω Θεώρημα αποσαφηνίζει το τοπίο.

Θεώρημα 2.6.13 *Έστω ότι A είναι ένας $\mu \times \nu$ πίνακας, X είναι ένας αριστερός αντίστροφος του A και Y είναι ένας δεξιός αντίστροφος του A.*

(α) Τότε ισχύει και $X = Y$.

(β) Έστω Z είναι ένας αριστερός ή δεξιός αντίστροφος του A. Τότε $Z = X = Y$ και ισχύει $AZ = I_\mu$ και $ZA = I_\nu$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) Επειδή ισχύει $AY = I_\mu$ και $XA = I_\nu$ έπεται ότι οι πίνακες X, Y είναι $\nu \times \mu$ πίνακες. Περαιτέρω ισχύει $X = XI_\mu = X(AY) = (XA)Y = I_\nu Y = Y$.

(β) Έστω Z είναι ένας αριστερός αντίστροφος του A. (Ομοίως εξετάζεται και η περίπτωση του δεξιού αντίστροφου). Κατά το (α) ισχύει $Z = Y = X$

Φυσιολογικά λοιπόν οδηγούμεθα στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.6.14 *Έστω A είναι ένας $\nu \times \nu$ πίνακας τέτοιος ώστε υπάρχει πίνακας X ώστε $XA = AX = I_\nu$. Ο πίνακας A ονομάζεται Αντιστρέψιμος και ο X ονομάζεται Αντίστροφος του A.*

Πόρισμα 2.6.15 *Έστω A είναι ένας $\mu \times \nu$ πίνακας που έχει και δεξιό και αριστερό αντίστροφο. Τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και έχει ακριβώς έναν αντίστροφο.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Να ελεγχθεί αν υπάρχει πίνακας B, τέτοιος ώστε $AB = \mathbb{O}$ ή $BA = \mathbb{O}$.

2. Αν οι A, B είναι $\mu \times \mu$ πίνακες και ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε να λυθεί η εξίσωση

$$XA + B = \mathbb{O}$$

3. Έστω A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε ο A^t είναι αντιστρέψιμος και ισχύει
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

4. Έστω ότι A, B είναι αντιστρέψιμοι και μετατιθέμενοι $\mu \times \mu$ πίνακες και κ, λ είναι ακέραιοι αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι

   (α) $A^\kappa A^\lambda = A^\lambda A^\kappa = A^{\lambda+\kappa}$

   (β) $A^\kappa A^{-\lambda} = A^{\kappa-\lambda}$

   (γ) $(A^\kappa)^{-1} = A^{-\kappa} = (A^{-1})^\kappa$

2.7 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΠΙΝΑΚΕΣ

Στην ενότητα αυτή θα συνδέσουμε τους ΣΜΓ που είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Αυτό είναι το τελευταίο βήμα μας, προτού να δούμε την πρώτη σημαντική εφαρμογή του μηχανισμού που αναπτύξαμε μέχρι τώρα, που θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο στην λύση Γραμμικών Συστημάτων.

Υπενθυμίζουμε ότι στις γραμμές ενός πίνακα $A = (\alpha_{ij})_{\nu\times\mu}$, μπορούν να εκτελεστούν τριών τύπων ΣΜΓ.

Πρώτος Τύπος ΣΜΓ. Πολλαπλασιάζουμε την i γραμμή του πίνακα A, επί α, όπου α είναι στοιχείο του $\mathbb{F}$ διάφορο του 0.

Συμβολίζουμε αυτό τον ΣΜΓ
$$r_i \to \alpha r_i.$$

Δεύτερος Τύπος ΣΜΓ. Προσθέτουμε στην i γραμμή, την j γραμμή πολλαπλασιασμένη επί α, όπου $j \neq i$ και $\alpha \in \mathbb{F}$.

Συμβολίζουμε αυτό τον ΣΜΓ
$$r_i \to r_i + \alpha r_j.$$

Τρίτος Τύπος ΣΜΓ. Αν $i \neq j$ εναλλάσουμε τις i και j γραμμές.

Συμβολίζουμε αυτό το ΣΜΓ
$$r_i \longleftrightarrow r_j.$$

Ακολουθεί ο βασικός ορισμός αυτής της ενότητας.

Ορισμός 2.7.1 *Ένας $\nu \times \nu$ πίνακας ονομάζεται Στοιχειώδης Πίνακας , αν μπορεί να προκύψει από τον I_ν, εφαρμόζοντας έναν ΣΜΓ επί του I_ν. Μάλιστα, ο πίνακας λέγεται Πίνακας αντίστοιχος προς αυτόν τον ΣΜΓ, και επίσης ο ΣΜΓ αυτός λέγεται αντίστοιχος προς τον Πίνακα.*

Έτσι λοιπόν σε πλήρη αντιστοιχία με τους τύπους ΣΜΓ έχουμε τρεις τύπους στοιχειώδων πινάκων.

Πρώτος τύπος στοιχειώδους πίνακα

Αν $1 \leq i \leq \nu$ και $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, τότε ορίζουμε

$$M(i,\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & \alpha & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & & & & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ γραμμή}$$

είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον I_ν αν πολλαπλασιάσουμε την i γραμμή του, επί α.

Το (κ,λ) στοιχείο του $M(i,\alpha)$ είναι $= \begin{cases} \delta_{\kappa\lambda}, & \text{αν} \quad \kappa \neq i \\ \alpha\delta_{i\lambda}, & \text{αν} \quad \kappa = i \end{cases}$.

ΣΧΟΛΙΟ. Το $\delta_{\kappa\lambda}$ ανωτέρω είναι το δέλτα του Kronecker.

Δεύτερος τύπος στοιχειώδους πίνακα είναι ο πίνακας $A(j,\alpha,i)$, με $\alpha \in \mathbb{F}$ $1 \leq i,j \leq \nu$, $i \neq j$, που προκύπτει από τον I_ν, αν προσθέσουμε στην i γραμμή την j πολλαπλασιασμένη επί α.

Το (κ,λ) στοιχείο του $A(j,\alpha,i)$ είναι το $= \begin{cases} \delta_{\kappa\lambda}, & \text{αν} \quad \kappa \neq i \\ \delta_{i\lambda} + \alpha\delta_{j\lambda}, & \text{αν} \quad \kappa = i \end{cases}$.

Παριστάνεται από το παρακάτω σχήμα

$$A(j,\alpha,i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 1 & 0 & . & . & \alpha & & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & 1 & & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i \text{ γραμμή} \\ \\ \leftarrow j \text{ γραμμή} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ i \text{ στήλη} & j \text{ στήλη} \end{array}$$

Τρίτος τύπος στοιχειώδους πίνακα είναι ο πίνακας $E(i,j)$, με $1 \leq i,j \leq \nu$ και $i \neq j$, που προκύπτει από τον I_ν με εναλλαγή των γραμμών i με j.

Το (κ,λ) στοιχείο του πίνακα $E(i,j)$ είναι το $= \begin{cases} \delta_{\kappa\lambda}, & \text{αν} \quad \kappa \neq i,j \\ \delta_{j\lambda}, & \text{αν} \quad \kappa = i \\ \delta_{i\lambda}, & \text{αν} \quad \kappa = j \end{cases}$.

Παριστάνεται από το παρακάτω σχήμα

$$E(i,j) = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \text{ γραμμή} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \text{ γραμμή} \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & \uparrow & & & & & & \uparrow & & & & & \\
 & & & & & i \text{ στήλη} & & & & & & j \text{ στήλη} & & & & &
\end{array}
&
\end{array}$$

Το Θεώρημα που ακολουθεί είναι το κεντρικό Θεώρημα αυτής της ενότητας και συνδέει τις ΣΜΓ με πολλαπλασιασμό με στοιχειώδεις πίνακες. Το Θεώρημα αυτό μας λέει ότι η εκτέλεση ενός ΣΜΓ πάνω σε έναν $\nu \times \mu$ πίνακα A, έχει το ίδιο αποτέλεσμα με πολλαπλασιασμό από τα αριστερά του A επί τον στοιχειώδη πίνακα που αντιστοιχεί σε αυτόν τον ΣΜΓ. Συγκεκριμένα

Θεώρημα 2.7.2 *Έστω A ένας πίνακας $\nu \times \mu$, $1 \leq i, j \leq \nu$, $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω*

(α) Αν $\alpha \neq 0$, τότε ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε την i γραμμή του πίνακα A επί α είναι ο πίνακας $M(i, \alpha)A$.

(β) Ο πίνακας που προκύπτει αν προσθέσουμε στην i γραμμή του A, την γραμμή j πολλαπλασιασμένη επί α, είναι ο πίνακας $A(j, \alpha, i)A$.

(γ) Ο πίνακας που προκύπτει αν εναλλάξουμε τις γραμμές i και j του A, είναι ο πίνακας $E(i, j)A$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα αποδείξουμε ενδεικτικώς την (γ). Ομοίως αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες.

Έστω κ, λ θετικοί ακέραιοι με $1 \leq \kappa \leq \nu$, $1 \leq \lambda \leq \mu$. Έστω ότι $E(i, j) = (P_{st})$. Το στοιχείο (κ, λ) του πίνακα $E(i, j)A$ είναι το

$$\sum_{t=1}^{\nu} P_{\kappa t} \alpha_{t\lambda}$$

Σε πλήρη αντιστοιχεία με τον ορισμό του $E(i, j)$ που δώσαμε πιο πάνω, για τον υπολογισμό του $\sum_{t=1}^{\nu} P_{\kappa t} \alpha_{t\lambda}$, θα διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

Περίπτωση πρώτη: $\kappa \neq i, j$
Τότε
$$\sum_{t=1}^{\nu} P_{\kappa t}\alpha_{t\lambda} = \sum_{t=1}^{\nu} \delta_{\kappa t}\alpha_{t\lambda} = \alpha_{\kappa\lambda}$$
Περίπτωση δεύτερη: $\kappa = i$
Τότε
$$\sum_{t=1}^{\nu} P_{\kappa t}\alpha_{t\lambda} = \sum_{t=1}^{\nu} P_{it}\alpha_{t\lambda} = \sum_{t=1}^{\nu} \delta_{jt}\alpha_{t\lambda} = \alpha_{j\lambda}$$
Περίπτωση τρίτη: $\kappa = j$
Τότε
$$\sum_{t=1}^{\nu} P_{\kappa t}\alpha_{t\lambda} = \sum_{t=1}^{\nu} P_{jt}\alpha_{t\lambda} = \sum_{t=1}^{\nu} \delta_{i\lambda}\alpha_{t\lambda} = \alpha_{i\lambda}$$
Άρα ο πίνακας $E(i, j)A$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A με εναλλαγή των γραμμών i και j.

Το παραπάνω Θεώρημα μπορεί να διατυπωθεί λακωνικότερα, (με κάποια μικρή απώλεια στην ακριβολογία ίσως) ως εξής.

Θεώρημα 2.7.3 *Η εφαρμογή ενός ΣΜΓ πάνω σε έναν πίνακα, ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του πίνακα από τα αριστερά με τον αντίστοιχο στοιχειώδη πίνακα*

Παράδειγμα 2.7.4

Ας θεωρήσουμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ και ας εναλλάζουμε τις γραμμές 1 και 3. Με βάση το παραπάνω Θεώρημα ο πίνακας που προκύπτει
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
πρέπει να ισούται με
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$
Κάνοντας τις σχετικές πράξεις που απαιτούνται για την εκτέλεση του πολ/μού πινάκων βρίσκουμε ότι πράγματι ισχύει η αναμενόμενη ισότητα.

Το παραπάνω Θεώρημα έχει μια σειρά από ενδιαφέρουσες συνέπειες.

Πρόταση 2.7.5 *Κάθε στοιχειώδης πίνακας είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα ο αντίστροφος του είναι στοιχειώδης πίνακας. Συγκεκριμένα ισχύει*

(a) $M(i, \alpha)^{-1} = M(i, \alpha^{-1})$, *αν* $\alpha \neq 0$

(β) $A(j,\alpha,i)^{-1} = A(j,-\alpha,i)$ *όπου τα* i,j *είναι διάφορα μεταξύ τους*

(γ) $E(i,j)^{-1} = E(i,j) = E(j,i)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προκύπτει από το προηγούμενο Θεώρημα αν ερμηνευθεί ο πολλαπλασιασμός ως εκτέλεση ΣΜΓ. Επίσης αποδεικνύεται με απ' ευθείας επαλήθευση του ορισμού του αντίστροφου πίνακα.

Παράδειγμα 2.7.6

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A(2,\,1/2,\,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

κατά την προηγούμενη πρόταση είναι

$$A(2,\,1/2,\,3)^{-1} = A(2,\,-1/2,\,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Πράγματι, αν εκτελεσθούν οι πράξεις έχουμε

$$A(2,\,1/2,\,3)A(2,\,-1/2,\,3) = I_3$$

Το επόμενο είναι ένα σημαντικό Θεώρημα που συνδέει την σχέση "γραμμοϊσοδύναμα προς τον" με τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Θεώρημα 2.7.7 *Έστω* A, B *είναι δύο* $\nu \times \mu$ *πίνακες. Οι δύο παρακάτω δηλώσεις είναι ισοδύναμες.*

(α) Ο A *είναι γραμμοϊσοδύναμος προς τον* B*.*

(β) Υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών πινάκων $X_1, X_2, \ldots, X_\lambda$*, τέτοιων ώστε*

$$B = X_\lambda X_{\lambda-1} \ldots X_2 X_1 A$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) Έστω ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος προς τον B. Τότε ο πίνακας B προκύπτει από τον A με την διαδοχική εφαρμογή λ ΣΜΓ. Ας ονομάσουμε την σειρά των ΣΜΓ, με την σειρά που εκτελούνται $R_1, R_2, \ldots, R_\lambda$, οι οποίοι αν εφαρμοσθούν με την σειρά στο A, τότε προκύπτει ο B. Έστω ότι οι πίνακες που αντιστοιχούν σε εκείνους τους ΣΜΓ, είναι αντιστοίχως οι $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda$.

Θα αποδείξουμε ότι

$$B = M_\lambda(M_{\lambda-1}(\ldots(M_2(M_1 A))\ldots))$$

και αυτό θα γίνει με επαγωγή ως προς λ.

Έστω $\lambda = 1$. Τότε ο B προκύπτει από τον A με εφαρμογή του ΣΜΓ R_1. Άρα κατά το προηγούμενο Θεώρημα, ισχύει $B = M_1 A$.

Έστω ότι ισχύει ο ισχυρισμός μας για $\lambda = \kappa - 1$, $\kappa \geq 2$. Έστω ότι B' είναι ο πίνακας που προκύπτει αν εφαρμοσθούν διαδοχικά στα A οι ΣΜΓ $R_1, R_2, \ldots, R_{\kappa-1}$. Τότε κατά την επαγωγική υπόθεση $B' = M_{\kappa-1}(\ldots(M_1A)\ldots)$. Όμως ο B προκύπτει από τον B' με εφαρμογή τον ΣΜΓ R_κ, άρα λόγω της περίπτωσης $\kappa = 1$ που μόλις αποδείξαμε είναι

$$B = M_\kappa B' = M_\kappa(M_{\kappa-1}\ldots(M_1A)\ldots).$$

Ας δούμε τώρα το αντίστροφο

(β) Έστω ότι υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία $X_1, \ldots, X_\lambda$ στοιχειωδών πινάκων τέτοιων ώστε

$$B = X_\lambda X_{\lambda-1}\ldots X_2X_1A.$$

Έστω ότι $R_1, R_2, \ldots, R_\lambda$ είναι οι ΣΜΓ που αντιστοιχούν προς τους πίνακες $X_1, X_2, \ldots, X_\lambda$ αντίστοιχα.

Με επαγωγή ως προς λ, θα αποδείξουμε ότι ο B πρόκύπτει αν στον A εφαρμοστούν διαδοχικά οι ΣΜΓ $R_1, R_2, \ldots, R_\lambda$.

Αφήνουμε την απόδειξη στον αναγνώστη.

Ας τα δούμε αυτά συγκεκριμένα σε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.7.8

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο που περιγράφεται στην ενότητα 2.4 θα αναγάγουμε τον A σε έναν γραμμοϊσοδύναμο του που είναι ανηγμένος κλιμακωτός και παράλληλα, με βάση το προηγούμενο Θεώρημα θα καταγράψουμε τον πολλαπλασιασμό του A, από τα αριστερά, επί τον αντίστοιχο στοιχειώδη πίνακα

$$A \xrightarrow{r_1 \to 2r_1} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$A_1 = M(1,2)A$

$$A_1 \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 4r_1} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 30 & -16 & -10 & -1 \end{pmatrix}$$

$A_2 = A(1,-4,3)A_1 = A(4,1,3)M(1,2)A$

$$A_2 \xrightarrow{r_2 \to 3r_2} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 30 & -16 & -10 & -1 \end{pmatrix}$$

$A_3 = M(2,3)A_2 = M(2,3)A(4,1,3)M(1,2)A$

$$A_3 \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 30r_2} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & -466 & 260 & -451 \end{pmatrix}$$

$A_4 = A(2,-30,3)A_3 = A(2,-30,3)M(2,3)A(4,1,3)M(1,2)A$

$$A_4 \xrightarrow{r_3 \to -1/466 r_3} A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 6 & 1 & -130/233 & 451/466 \end{pmatrix}$$

$A_5 = M(3,-1/466)A_4$

$$A_5 \xrightarrow{r_1 \to r_1 + 6r_2} A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 94 & -52 & 90 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -130/233 & 451/460 \end{pmatrix}$$

$A_6 = A(2,6,1)A_5$

$$A_6 \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 94r_3} A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 94 & 104/233 & -454/466 \\ 0 & 1 & 15 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -130/233 & 451/460 \end{pmatrix}$$

$A_7 = A(3,-94,1)A_6$

$$A_7 \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 15r_3} A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 104/233 & -454/466 \\ 0 & 1 & 0 & -147/233 & 255/466 \\ 0 & 0 & 1 & -130/233 & 451/460 \end{pmatrix}$$

$A_8 = A(3,-15,2)A_7$

$$A_8 \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 6r_2} A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 986/233 & -1984/466 \\ 0 & 1 & 0 & -147/233 & 255/466 \\ 0 & 0 & 1 & -130/233 & 451/460 \end{pmatrix}$$

$A_9 = A(2,-6,1)A_8$

Ο A_9 αφενός είναι ανηγμένος κλιμακωτός αφετέρου $A_9 = A(2,-6,1)A_8$ και

$$\begin{aligned} A_8 &= A(3,-15,2)A_7 = A(3,-15,2)A(3,-94,1)A_6 \\ &= A(3,-15,2)A(3,-94,1)A(2,6,1)A_5 \\ &= A(3,-15,2)A(3,-94,1)A(2,6,1)M(3,-1/466)A_4 \\ &= A(3,-15,2)A(3,-94,1)A(2,6,1)M(3,-1/455) \end{aligned}$$

$$= A(2,-30,3)M(2,3)A(4,1,3)M(1,2)A.$$

Αρα $A_9 = A(2,-30,3)M(2,3)A(4,1,3)M(1,2)A$.

Πόρισμα 2.7.9 *Έστω ότι A, B, Γ είναι πίνακες. Τότε ισχύουν τα παρακάτω*

(α) Ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος προς τον A.

(β) Αν ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος προς τον B τότε και ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος προς τον A.

(γ) Αν ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος προς τον B και ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος προς τον Γ, τότε ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος προς τον Γ.

Συχνά τα παραπάνω εκφράζονται λέγοντας ότι « Η σχέση γραμμοϊσοδύναμος είναι σχέση ισοδυναμίας» (βλέπε το πρώτο κεφάλαιο).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Με βάση το προηγούμενο Θεώρημα και συγκεκριμένα την ισότητα $B = R_1 R_2 \dots R_\kappa A$ αν ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος προς τον B, κλπ κλπ

Πόρισμα 2.7.10 *Έστω A ένας πίνακας. Τότε υπάρχει ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας B και στοιχειώδεις πίνακες $M_1, M_2, \dots, M_\lambda$, τέτοιοι ώστε*

$$B = M_\lambda M_{\lambda-1} \dots M_2 M_1 A$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε αποδείξει στο Θεώρημα 2.4.7 ότι υπάρχει B ανηγμένος κλιμακωτός ώστε ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος προς τον A. Στην συνέχεια το προηγούμενο Θεώρημα μας εγγυάται την ύπαρξη στοιχειωδών πινάκων $M_1, \dots, M_\lambda$ τέτοιων ώστε

$$B = M_\lambda \dots M_1 A$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ 2.7

1. Έστω A ένας $\nu \times \mu$ πίνακας και $B = D(\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας. Βρείτε το γινόμενο BA και περιγράψτε το με λόγια

2. Έστω A ένας $3 \times \mu$ πίνακας και $B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$. Βρείτε το γινόμενο BA και περιγράψτε το με λόγια.

2.8 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων είναι τα απλούστερα συστήματα εξισώσεων. Αν δεν κατανοήσουμε αυτά τότε ούτε τα πολυπλοκότερα συστήματα έχουμε ελπίδα να αντιμετωπίσουμε ούτε θα μπορέσουμε να σχηματίσουμε μια ιδέα για τις γενικότερες συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μία πρώτη αντιμετώπιση του προβλήματος της λύσης ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Το κύριο εργαλείο μας θα είναι η θεωρία των Γραμμοπράξεων, (βλέπε σελίδα 46). Σε επόμενο κεφάλαιο θα εμβαθύνουμε περισσότερο στο θέμα της λύσης συστήματος γραμμικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας και την θεωρία των οριζουσών.

Ένα γενικό γραμμικό σύστημα εξισώσεων περιγράφεται ως ακολούθως. Τα n και m είναι θετικοί ακέραιοι και για $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ τα (a_{ij}) είναι στοιχεία του $\mathbb{F}$ και τα $b_1, b_2, b_3, ..., b_m$ είναι επίσης στοιχεία του $\mathbb{F}$. Τότε έχουμε το παρακάτω σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3$
. . . .
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m$

Τα $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ είναι τα άγνωστα στοιχεία του $\mathbb{F}$ που πρέπει να προσδιορισθούν ώστε να ισχύουν οι παραπάνω μ εξισώσεις. Το σύστημα ονομάζεται γραμμικό διότι οι άγνωστοι εμφανίζονται σε μονώνυμα βαθμού 0 η 1, δηλαδή δεν εμφανίζονται όροι του τύπου $x_1 x_2, (x_1)^2$, και επειδή στην αναλυτική γεωμετρία οι εξισώσεις της ευθείας και του επιπέδου είναι πολυώνυμα πρώτου βαθμού, για αυτό καθιερώθηκε και το όνομα Γραμμικά Συστήματα .

Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & \alpha_{2\mu} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\nu 2} & . & . & . & \alpha_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

ονομάζεται **Πίνακας των Συντελεστών του Συστήματος** η **Πίνακας του Συστήματος .** Οι όροι α_{ij} του πίνακα ονομάζονται **Συντελεστές του Συστήματος .** Η στήλη

$$b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_\mu \end{pmatrix}$$

ονομάζεται **Στήλη των Σταθερών Όρων του συστήματος .** Οι όροι της στήλης αυτής $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\mu$ ονομάζονται **Σταθεροί όροι του συστήματος .** Ο συνδυασμός του πίνακα των συντελεστών και της στήλης των σταθερων όρων, δημιουργεί έναν $\mu \times (\nu + 1)$ πίνακας

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & \alpha_{2\mu} & \beta_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\nu 2} & . & . & . & \alpha_{\mu\nu} & \beta_\mu \end{array}\right)$$

ονομάζεται **Επαυξημένος Πίνακας του συστήματος .** Η κάθετος γραμμή . που παρεμβάλλεται μεταξύ των πινάκων A, b δεν έχει καμμιά μαθηματική συνέπεια, απλώς τίθεται για να τονίσει ότι ο επαυξημένος πίνακας προκύπτει από την συμπαράταξη των πινάκων A, b.

Είναι εμφανές ότι το σύστημα καθορίζεται από τον Επαυξημένο Πίνακα του συστήματος.

Ο παρακάτω ορισμός συγκεντρώνει ορισμένες βασικές έννοιες που θα χρειασθεί συχνά να επικαλεσθούμε.

Ορισμός 2.8.1 *Θεωρούμε το παραπάνω γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους.*

α) Ένα στοιχείο $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_\nu \end{pmatrix}$ *που ανήκει στο* $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$ *λέγεται* ***Λύση του συστήματος***

αν ικανοποιούνται οι παρακάτω μ εξισώσεις

$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + ... + a_{1n}y_n = b_1$
$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + ... + a_{2n}y_n = b_2$
$a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + ... + a_{3n}y_n = b_3$
$....$
$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + a_{m3}y_3 + ... + a_{mn}y_n = b_m$

β) Δύο συστήματα λέγονται ***Ισοδύναμα συστήματα εξισώσεων*** *αν έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.*

γ) Ένα σύστημα λέγεται ***Συμβιβαστό σύστημα*** *όταν έχει τουλάχιστον μία λύση.*

δ) Ένα σύστημα λέγεται ***Αδύνατον*** *η* ***Ασυμβίβαστο*** *αν δεν έχει καμμιά λύση*

δ) Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων λέγεται ***Ομογενές*** *αν η στήλη των σταθερών όρων του συστήματος είναι η στήλη* $\mathbb{O}$.

ε)Ένα ομογενές σύστημα έχει πάντα την λύση $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ *η οποία ονομάζεται* ***Τετριμμένη λύση***

Οι παραπάνω έννοιες μπορούν να αναδιατυπωθούν στην γλώσσα των πινάκων με έναν τρόπο πιο συμπαγή που σε ορισμένες περιπτώσεις συμβάλλει στην καλλίτερη κατανόηση.

Έστω A είναι ένας πίνακας $\mu \times \nu$. Ο πίνακας αυτός ορίζει μια απεικόνιση

$$\gamma_A : \mathbb{F}^{\nu\times 1} \to \mathbb{F}^{\mu\times 1}$$

με βάση τον τύπο

$$\gamma_A(x) = A \cdot x, \text{ για } x \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}.$$

Αν λοιπόν $\beta \in \mathbb{F}^{m\times 1}$, τότε το σύστημα με πίνακα συντελεστών A και στήλη σταθερών β, είναι η εξίσωση

$$A \cdot x = \beta$$

όπου η λύση x θα αναζητηθεί το $\mathbb{F}^{n\times 1}$.

Στο πλαίσιο της ορολογίας που περιγράψαμε πιό πάνω, μπορούμε να πούμε ότι οι λύσεις του συστήματος δεν είναι τίποτε άλλο παρά το σύνολο $\gamma_A^{-1}(\{\beta\})$.

ΣΧΟΛΙΟ. Ίσως παραξένεψε τον αναγνώστη η επιλογή ορισμού, μια λύση ενός συστήματος να είναι μια στήλη $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\nu \end{pmatrix}$ και όχι μια γραμμή $(y_1, \ldots, y_\nu)$ που σίγουρα είναι ένα πιο οικείο αντικείμενο. Ένας από τους λόγους είναι η σύνδεση των γραμμικών συστημάτων με την πιο πάνω συνάρτηση γ_A. Αν αποδεχόμασταν τον ορισμό ότι η λύση ήταν γραμμή και όχι στήλη, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ τότε η παραπάνω συνάρτηση θα ήταν η $\gamma_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, με τύπο $\gamma_A(x) = x \cdot A^t$ που ίσως οπτικά να μην είναι ιδιαίτερα ευπρόσδεκτο στο μάτι, σε σύγκριση με την

$$\gamma_A(x) = A \cdot x$$

με την μεταβλητή x στα δεξιά του συμβόλου τησ συνάρτησης, που έτσι έχουμε συνηθίσει να γράφουμε τις συναρτήσεις επί αιώνες.

Υπάρχει και ένας άλλος λόγος που ευνοεί την επιλογή των στηλών, που θα εξηγηθεί στην Θεωρία των Γραμμικών Συναρτήσεων.

Τελικά υπάρχουν επιχειρήματα υπέρ και των δύο συμβολισμών. Στο βιβλίο αυτό ακολουθούμε την εκδοχή των στηλών, που είναι και η πλειοψηφούσα επιλογή στην διεθνή βιβλιογραφία. Εν πάσει περιπτώσει δεν τίθεται, προφανώς, θέμα ανωτέρων ή κατωτέρων μαθηματικών, αλλά το θέμα είναι ποια επιλογή συμβόλων και ορισμών θα ευκολύνει την ανάγνωση του κειμένου.

Πρόταση 2.8.2 *Έστω $(A|b)$ είναι ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος μ εξισώσεων με ν άγνωστους και έστω M ένας αντιστρέγιμος $m \times m$ πίνακας. Τότε το ανωτέρω σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα που έχει επαυξημένο πίνακα $(MA|Mb)$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $y \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ είναι μια λύση του συστήματος που έχει επαυξημένο πίνακα τον $(A|b)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$A \cdot y = b$$

που οδηγεί στο $M(A \cdot y) = M \cdot \beta$

$$(MA) \cdot y = Mb$$

άρα ο y είναι λύση του συστήματος που έχει επαυξημένο πίνακα τον $(MA|Mb)$.

Ομοίως αποδεικνύεται και το αντίστροφο.

Η παραπάνω πρόταση επιτρέπει την αναγωγή της λύσης ενός γραμμικού συστήματος σε ένα άλλο που ίσως να έχει απλούστερο πίνακα, και συνεπώς να είναι ευκολότερο. Σε όση δουλειά έχουμε κάνει μέχρι τώρα, η παραπάνω πρόταση μας λέει ότι αν μπορούμε να χειρισθούμε ένα σύστημα που έχει ανηγμένο κλιμακωτό επαυξημένο πίνακα, τότε θα μπορέσουμε να χειρισθούμε κάθε πίνακα.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.8.3

Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ \frac{1}{3}x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 5 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Μας ενδιαφέρουν οι πραγματικές λύσεις του συστήματος.

Το σύστημα αυτό έχει επαυξημένο πίνακα τον

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

με βάση την τεχνική της απαλοιφής Gauss (βλέπε σελίδα 46) βρίσκουμε έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα γραμμοϊσοδύναμο με τον παραπάνω

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 104/233 & -454/466 \\ 0 & 1 & 0 & -147/233 & 255/466 \\ 0 & 0 & 1 & -130/233 & 451/466 \end{pmatrix}$$

άρα το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + \frac{104}{233}x_4 &= -\frac{454}{466} \\ x_2 \qquad - \frac{147}{233}x_4 &= \frac{255}{466} \\ x_3 - \frac{130}{233}x_4 &= \frac{451}{466} \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{208x_4 - 454}{466} \\ x_2 &= \frac{294x_4 + 255}{466} \\ x_3 &= \frac{260x_4 + 451}{466} \end{aligned}$$

και το x_4μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός. Με άλλα λόγια το σύνολο των λύσεων είναι το

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{208\lambda - 454}{466} \\ \frac{294\lambda + 255}{466} \\ \frac{260\lambda + 451}{466} \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

που είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^{3\times 1}$

Παράδειγμα 2.8.4

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

για το οποίο μας ενδιαφέρουν οι μιγαδικές λύσεις.

Το σύστημα αυτό έχει επαυξημένο πίνακα τον

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

με την απαλοιφή Gauss βρίσκουμε τον γραμμοϊσοδύναμο προς τον ανωτέρω, και επίσης ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

άρα το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 4 \\ x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

οπότε το σύνολο των λύσεων είναι το

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3\lambda - 2 \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

που είναι υποσύνολο του $\mathbb{C}^{3\times 1}$

Παράδειγμα 2.8.5

θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6 \end{aligned}$$

που έχει πραγματικούς συντελεστές και αναζητούμε τις πραγματικές λύσεις.

Ο επαυξημένος πίνακας του είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

αυτός είναι γραμμοϊσοδύναμος προς τον

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

άρα οδηγούμεθα στο ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ x_2 \qquad\quad &= -1 \\ x_3 \quad &= 2 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε ακριβώς μια λύση την

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2.8.6

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} y + 3z &= -2 \\ x + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + 3y + 9z &= 1 \end{aligned}$$

και αναζητούμε τις πραγματικές λύσεις.

Ο επαυξημένος πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

οπότε οδηγούμεθα στο παρακάτω ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} x \qquad\qquad &= 4 \\ y + 3z &= -2 \\ 0 &= -1 \end{aligned}$$

το οποίο δεν έχει καμμιά λύση.

Τα παραπάνω παραδείγματα μας δείχνουν ότι αν ένα σύστημα έχει αναχθεί σε ένα άλλο με ανηγμένο κλιμακωτό επαυξημένο πίνακα, τότε είμαστε σε θέση να βρούμε τις λύσεις του. Επίσης τα παραπάνω παραδείγματα μας δείχνουν ότι υπάρχει μια ποικιλία δυνατοτήτων όσων αφορά το σύνολο των λύσεων.

Ας γενικεύσουμε αυτές τις επιμέρους παρατηρήσεις στο επόμενο Θεώρημα που είναι και η κεντρική πρόταση της ενότητας

Θεώρημα 2.8.7 *Έστω ότι ένα σύστημα μ γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους, έχει επαυξημένο πίνακα, που είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον ανηγμένο κλιμακωτό $\mu\times(\nu+1)$ πίνακα $(M|\beta)$ όπου ο $M=(m_{ij})$ είναι ένας ανηγμένος κλιμακωτός $\mu\times\nu$ πίνακας και* $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{pmatrix}$

Περαιτέρω έστω ότι στον πίνακα M οι στήλες που έχουν ηγετικό στοιχείο είναι οι $\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_\kappa$ με $\zeta_1<\zeta_2<\ldots<\zeta_\kappa$ και $\nu\geq\kappa\geq 1$, οι δε $\zeta_{\kappa+1},\zeta_{\kappa+2},\ldots,\zeta_\nu$ είναι οι υπόλοιπες στήλες, (που δεν περιέχουν ηγετικό στοιχείο), όπου $\zeta_{\kappa+1}<\zeta_{\kappa+2}<\ldots,<\zeta_\nu$.

Τότε υπό τους όρους αυτούς το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{array}{rcl} x_{\zeta_1}+\sum_{s=\kappa+1}^{\nu} m_{1\zeta_s}x_{\zeta_s} & = & \beta_1 \\ x_{\zeta_2}+\sum_{s=\kappa+1}^{\nu} m_{2\zeta_s}x_{\zeta_s} & = & \beta_2 \\ x_{\zeta_\kappa}+\sum_{s=\kappa+1}^{\nu} m_{\kappa\zeta_s}x_{\zeta_s} & = & \beta_\kappa \\ 0 & = & \beta_t \ \ \textit{για} \ \ \kappa+1\leq t\leq\nu \end{array}$$

(Σχόλιο. Κατά σύμβαση το σύμβολο $\sum_{s=\kappa+1}^{\nu}$ είναι 0 αν $\kappa+1>\nu$)

Περαιτέρω ισχύουν τα παρακάτω

(α) Το σύστημα έχει λύση τότε και μόνο τότε αν $\beta_t=0$ για κάθε t με $\kappa+1\leq t\leq\nu$. Στην περίπτωση αυτή οι λύσεις δίδονται από τους τύπους

$$\begin{array}{c} x_{\zeta_1}=\beta_1-\sum_{s=\kappa+1}^{\nu} m_{1\zeta_s}x_{\zeta_s} \\ x_{\zeta_2}=\beta_2-\sum_{s=\kappa+1}^{\nu} m_{2\zeta_s}x_{\zeta_s} \\ \cdots \\ x_{\zeta_\kappa}=\beta_\kappa-\sum_{s=\kappa+1}^{\nu} m_{\kappa\zeta_s}x_{\zeta_s} \end{array}$$

(β) Το σύστημα είναι αδύνατον τότε και μόνον τότε αν υπάρχει φυσικός t και $\kappa+1\leq t\leq\nu$ και $\beta_t\neq 0$. Επίσης, το σύστημα είναι αδύνατο τότε και μόνο τότε αν ο πίνακας $(M|\beta)$ έχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη.

(γ) Αν $\kappa<\nu$ και ισχύει ότι για κάθε t με $\kappa+1\leq t\leq\nu$ έπεται $\beta_t=0$, τότε το πλήθος των λύσεων του συστήματος είναι τουλάχιστον όσο τα στοιχεία του $\mathbb{F}$.

(δ) Το σύστημα έχει ακριβώς μια λύση τότε και μόνο τότε αν $\kappa=\nu$.

(ε) Αν το σύστημα έχει πλήθος λύσεων ≥ 2, τότε το πλήθος λύσεων θα είναι τουλάχιστον όσο το πλήθος των στοιχείων του $\mathbb{F}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι υπάρχει t, με $\kappa+1\leq t\leq\nu$ και $\beta_t\neq 0$. Τότε μια των εξισώσεων του συστήματος

$$M\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{pmatrix}=\beta$$

είναι η
$$0 = \beta_t$$
η οποια δεν ισχύει, ότι τιμές και να έχουν τα $x_1, \ldots, x_\nu$.

Άρα το σύστημα είναι αδύνατον στην περίπτωση αυτή.

Έστω τώρα ότι για t με $\kappa + 1 \leq t \leq \nu$ είναι $\beta_t = 0$.

Τότε επιλέγοντας για τους άγνωστους $x_{\zeta_{\kappa+1}}, x_{\zeta_{\kappa+2}}, \ldots, x_{\zeta_\nu}$ οτιδήποτε τιμές θέλουμε π.χ. $x_{\zeta_{\kappa+1}} = y_{\zeta_{\kappa+1}}, x_{\zeta_{\kappa+2}} = y_{\zeta_{\kappa+2}} = \ldots x_{\zeta_\nu} = y_{\zeta_\nu}$ οδηγούμεθα στην λύση

$$\begin{array}{c} x_{\zeta_1} = \beta_1 - \sum_{s=\kappa+1}^{\nu} m_{1\zeta_s} y_{\zeta_s} \\ x_{\zeta_2} = \beta_2 - \sum_{s=\kappa+1}^{\nu} m_{2\zeta_s} y_{\zeta_s} \\ \ldots \\ x_{\zeta_\kappa} = \beta_\kappa - \sum_{s=\kappa+1}^{\nu} m_{\kappa\zeta_s} y_{\zeta_s} \end{array}.$$

Άρα το σύστημα είναι συμβιβαστό και μάλιστα οι άγνωστοι $x_{\zeta_{\kappa+1}}, \ldots, x_{\zeta_\nu}$ μπορούν να πάρουν οιαδήποτε τιμή, τελείως ελεύθερα, οπότε καθορίζονται πλήρως οι τιμές των αγνώστων $x_{\zeta_1}, \ldots, x_{\zeta_\kappa}$.

(β) Συνάγεται άμεσα από το (α).

(γ) Έστω ότι ισχύει $\kappa < \nu$ και επιπλέον για κάθε t με $\kappa + 1 \leq t \leq \nu$ ισχύει $\beta_t = 0$.

Αφού $\kappa < \nu$ υπάρχει ο άγνωστος $x_{\zeta_{\kappa+1}}$. Κατά το (α), κάθε τιμή $x_{\zeta_{\kappa+1}} = y_{\zeta_{\kappa+1}}$ οδηγεί σε μια διαφορετική λύση. Άρα αφού το πλήθος των δυνατών τιμών του $x_{\zeta_{\kappa+1}}$ είναι όσο το πλήθος των στοιχείων του $\mathbb{F}$, έπεται ότι τουλάχιστον τόσες είναι και οι λύσεις του συστήματος $\sum$.

(δ) Έστω ότι $\kappa = \nu$. Τότε δεν υπάρχουν άγνωστοι $x_{\zeta_{\kappa+1}}, \ldots, x_{\zeta_\nu}$.

Άρα με βάση το (α) έχουμε ακριβώς μια λύση, την $x_1 = \beta_1, \ldots, x_\nu = \beta_\nu$.

Έστω τώρα ότι το σύστημα έχει ακριβώς μια λύση. Με βάση το (α) θα πρέπει να ισχύει $\beta_t = 0$ για κάθε t με $\kappa + 1 \leq t \leq \nu$. Οπότε με βάση το (γ) αποκλείεται να ισχύει $\kappa < \nu$, διότι στην περίπτωση αυτή το πλήθος των λύσεων του συστήματος είναι τουλάχιστον όσο το πλήθος των στοιχείων του $\mathbb{F}$.

Άρα η μόνη δυνατότητα που απομένει είναι $\kappa = \nu$.

(ε) Έστω ότι το σύστημα έχει πλήθος λύσεων ≥ 2. Τότε κατά το (α) ισχύει $\beta_t = 0$ για κάθε t με $\kappa + 1 \leq t \leq \nu$ επίσης κατά το (δ) θα ισχύει $\kappa < \nu$. Συνδυάζοντας αυτά με το (γ) συνάγουμε ότι το πλήθος των λύσεων είναι τουλάχιστον όσο το πλήθος των στοιχείων του $\mathbb{F}$.

Πόρισμα 2.8.8 *Έστω ένα ομογενές σύστημα μ εξισώσεων και ν άγνωστων, με $\mu < \nu$. Τότε το σύστημα εκτός από την τετριμμένη μηδενική λύση, έχει και άλλες μη τετριμμένες λύσεις.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό του παραπάνω Θεωρήματος.

Στην περίπτωσή μας οι σταθεροί όροι του αρχικού συστήματος είναι $\mathbb{O}$, οπότε η στήλη των σταθερών όρων

$$\mathbb{O}_{\nu\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

οπότε και ο β είναι η στήλη $\mathbb{O}$, διότι ο β προκύπτει από την στήλη του αρχικού συστήματος μέσω μιας ακολουθίας γραμμοπράξεων, άρα προκύπτει με πολλαπλασιασμό από τα αριστερά, της αρχικής στήλης $\mathbb{O}$ επί κάποιο γινόμενο στοιχειωδών πινάκων. Το γινόμενο αυτό είναι $\mathbb{O}$.

Αν κ είναι εκείνο του προηγούμενου Θεωρήματος, αναγκαστικά $\kappa \leq \mu$, και αφού υπετέθη ότι $\mu < \nu$, έπεται $\kappa < \nu$, και λόγω του (γ) του προηγούμενου Θεωρήματος, υπάρχουν τουλάχιστον τόσες λύσεις όσο το πλήθος των στοιχείων του $\mathbb{F}$.

ΣΧΟΛΙΟ. Με τα παραπάνω έχουμε πετύχει τον πρώτο στόχο του βιβλίου αυτού. Λύσαμε αριθμητικά ένα γραμμικό σύστημα και ορισμένα άλλα συναφή ζητήματα. Εργαλείο στην πορεία αυτή υπήρξε η θεωρία των πινάκων, και βασική τεχνική η απαλοιφή Gauss. Ο Gauss (Carl Friedrich (1777-1855) υπήρξε ο μεγαλύτερος μαθηματικός της εποχής του, και είναι λογικό να υποθέσει κανείς ότι η απαλοιφή Gauss, δεν πρέπει να του πήρε πάνω από 10 λεπτά, να την συλλάβει. Εντούτοις η συνεισφορά του αυτή, είναι εκείνη που τον έχει κάνει γνωστό σε πολύ περισσότερο κόσμο απ' ότι όλες οι υπόλοιπες! Η ιδέα της Απαλοιφής Gauss ορίμασε μέσα σε αιώνες. Το σπέρμα της ιδέας, το οποίο χρονικά βρίσκεται κάπου στα χρόνια της αναγέννησης, είναι αυτό που μαθαίνουμε στο Λύκειο και συνήθως ονομάζεται Μέθοδος της Απαλοιφής των Μεταβλητών . Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Ας εξετάσουμε το παράδειγμα του συστήματος

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 3x - 2y + 5z &= 2 \\ 2x + 4y + 7z &= -4 \end{aligned}$$

για να το λύσουμε, λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς x

$$x = (1 - 3y - z)/2$$

την τιμή αυτή του x την αντικαθιστούμε στις άλλες δύο εξισώσεις

$$3\frac{1-3y-z}{2} - 2y + 5z = 2$$

$$2\frac{1-3y-z}{2} + 4y + 7z = -4$$

αφού κάνουμε τις πράξεις οδηγούμεθα σε ένα σύστημα με $2 = 3 - 1$ αγνώστους (δηλαδή, ένα λιγότερο)

$$\begin{aligned} -13y + 7z &= 1 \\ y + 6z &= -5. \end{aligned}$$

Επαναλαμβάνουμε το ίδιο βήμα όπως και πιο πάνω, λύνοντας την πρώτη από τις νέες εξισώσεις, ως προς y, έχουμε

$$y = \frac{1-7z}{-13}$$

$$\frac{1-7z}{-13} + 6z = -5$$

και η τελευταία εξίσωση που έχει $2-1=1$ άγνωστο, μετά τις πράξεις, γίνεται

$$-85z = 64 \quad \text{και} \quad z = -\frac{64}{85},$$

κλπ. κλπ.

Ένας αναγνώστης που βρίσκεται στην παράδοση του Καρτέσιου (René Descartes, 1596-1650), και έχει την τάση "να αμφισβητεί", και κάποιος που θέλει να γίνει επιστήμων, είναι ίσως κατά κάποιο τρόπο υποχρεωμένος να θεωρεί ότι πρέπει να ανήκει στην παράδοσει αυτή, ίσως έθετε το εξής ερώτημα: Τί προσέφερε άραγε περισσότερο, η Απαλοιφή Gauss σε σχέση με την απλή και κλασσική Μέθοδο Απαλοιφής των Μεταβλητών; Μήπως και Μέθοδος Απαλοιφής των Μεταβλητών δεν οδηγεί στην αριθμητική λύση ενός συστήματος Γραμμικών εξισώσεων; Το ερώτημα αυτό είναι πολύ λογικό ερώτημα και έχει ανάγκη σοβαρής αντιμετώπισης. Κατά βάθος η μαθηματική ιδέα και στην Μέθοδο της Απαλοιφής των Μεταβλητών και στην Απαλοιφή Gauss είναι η ίδια. Θα μπορούσε ίσως κανείς να δώσει τον χαρακτηρισμό ότι η Απαλοιφή Gauss είναι μια εκλέπτυνση και προσεκτική ταξινόμιση των ιδεών της Μεθόδου της Απαλοιφής Μεταβλητών. Έτσι πετυχαίνει να πάει βαθύτερα στο θέμα. Ας δούμε μια από τις παραπάνω προτάσεις που αποδείξαμε.

Πόρισμα 2.8.9 *Έστω ένα ομογενές σύστημα μ εξισώσεων και ν άγνωστων, με $\mu < \nu$. Τότε το σύστημα εκτός από την τετριμμένη μηδενική λύση, έχει και άλλες μη τετριμμένες λύσεις.*

Το πόρισμα αυτό αναφέρεται σε λύσεις γραμμικών συστημάτων και δεν αναφέρεται πουθενά στην εκφώνιση του ούτε πίνακες, ούτε γραμμοπράξεις ούτε τίποτα από όλα αυτά. Είναι ένα πολύ απλό ερώτημα, που έρχεται πολύ φυσιολογικά χωρίς να ξέρει κανείς τίποτα γιά πίνακες και γραμμοπράξεις. Προσπαθώντας λοιπόν να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα, που διατύπωσε ο ιδεατός οξυδερκής αναγνώστης, θα θέσουμε το εξής ερώτημα: Μπορεί να αποδειχθεί το παραπάνω πόρισμα, με εργαλείο τη μέθοδο της απαλοιφής των μεταβλητών; Νομίζουμε ότι θα ήταν πολύ πιο δύσκολο, και ίσως και αδύνατον, να συλλάβει κανείς την εκφώνηση του πορίσματος, αλλά και να διατυπώσει κάπως τυποποιημένα και πειστικά μια απόδειξη, αν δεν είχε στην διάθεση του την γλώσσα των πινάκων και των γραμμοπράξεων.

Ελπίζουμε ότι με τον παραπάνω φανταστικό διάλογο προκαλέσαμε τον αναγνώστη να κάνει και αυτός τις δικές του σκέψεις.

Συνεχίζοντας μια φιλοσοφικού τύπου αναπόληση στα όσα γίνανε μέχρι τώρα, μπορούμε να σχολιάσουμε ότι από τον αρκετά μεγάλο μηχανισμό των πινάκων που έχουμε αναπτύξει, μόνο ένα πολύ μικρό μέρος έχει παίξει ουσιαστικό ρόλο στην μελέτη των Γραμμικών Συστημάτων. Ζητάμε λίγη υπομονή από τον αναγνώστη μέχρι το κεφάλαιο των Γραμμικών Συναρτήσεων και εκεί θα δει μια αξιολογότερη δικαίωση του μηχανισμού αυτού.

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα κάπως διαφορετικού τύπου. Εξετάζουμε ένα σύστημα που εκτός από τους άγνωστους, έχουμε και παραμέτρους.

Παράδειγμα 2.8.10

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 4 \\ 2x + 4y + 3z &= 5 \\ -x - 2y + 6z &= \alpha \end{aligned}$$

Να εξετασθεί για ποιές τιμές του α, το σύστημα αυτό έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$.
Λύση. Ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & \alpha \end{pmatrix}$$

του οποίου θα μετατρέψουμε ανηγμένο κλιμακωτό

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 4+\alpha \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{5} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 5 & 4+\alpha \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 5 & 4+\alpha \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \to r_3 - 5r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 7+\alpha \end{pmatrix}$$

άρα οδηγούμεθα εις το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y &= 17/5 \\ z &= -3/5 \\ 0 &= 7 + \alpha\,. \end{aligned}$$

Προφανώς αυτό έχει λύση τότε και μόνο τότε αν $\alpha = -7$

ΣΧΟΛΙΟ. Το παραπάνω παράδειγμα μας οδηγεί σε ορισμένες σκέψεις: Τί θα γινόταν αν υπήρχαν πολλές παράμετροι; Φαίνεται ότι μάλλον θα δυσκόλευαν τα πράγματα. Ας σκεφτούμε για παράδειγμα το ερώτημα:

Ποιά σχέση πρέπει να συνδέει τις παραμέτρους α, β, ώστε το σύστημα

$$\begin{aligned} (2\alpha + 3\beta)x + 5\beta y + 8\alpha z &= 0 \\ (3\beta - 7\alpha)x - \alpha y + 2\alpha z &= 0 \\ (6\alpha + 7) + (\alpha + 15)y + (7\beta + 3)z &= 0 \end{aligned}$$

έχει μη τετριμμένη λύση;

Ίσως να μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε, αλλά τι θα γίνει αν οι παράμετροι υπεισέρχονται με ποιο πολύπλοκους τρόπους, π.χ. συναρτήσεις $e^{()}$, $\sin()$, $\log()$ κ.λπ.;

Εξάλλου από μια άλλη οπτική, από την κουλτούρα της άλγεβρας του Γυμνασίου-Λυκείου, έχουμε την αίσθηση ότι κάτι λείπει: ένας τύπος! Ένας τύπος σαν τον

$$x = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

που δίνει τις ρίζες πολυωνύμου β' βαθμού, ή ακόμα ένας τύπος σαν τον

$$x = \frac{(A\delta - \beta B)}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad y = \frac{(\alpha B - A\gamma)}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

που δίνει τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= A \\ \gamma x + \delta y &= B\,. \end{aligned}$$

Πράγματι μας λείπει ένας τύπος, αυτός θα προωθούσε περαιτέρω την απάντησή μας στα συστήματα, και στην αναζήτηση και θα χρειασθεί να κάνουμε υπομονή, μέχρι να ωριμάσουν τα πράγματα, στο κεφάλαιο των Οριζουσών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί το α, ώστε το σύστημα
$$\begin{aligned} 3x - 5y + 102 &= 0 \\ 3x - 2y - 32 &= \alpha \\ x + y + 2 &= 5 \end{aligned}$$
να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

2. Για ποιές τιμές του λ, το συστημα
$$\begin{aligned} \lambda^2 x + 3\lambda y - 2 &= 0 \\ \lambda x + y + 2 &= 3 \\ -x + 2y - 2 &= 4 \end{aligned}$$
έχει ακριβώς μια λύση;

3. Έστω ν θετικά ακέραιος ≥ 3. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα
$$\begin{array}{llllllll} x_1+ & x_2 & & & & & & = 0 \\ x_1+ & x_2+ & x_3 & & & & & = 0 \\ & x_2+ & x_3+ & x_4 & & & & = 0 \\ & & \cdots & \cdots & & & & = 0 \\ & & & & x_{\nu-3}+ & x_{\nu-2}+ & x_{\nu-1} & = 0 \\ & & & & & x_{\nu-2}+ & x_{\nu-1}+ \quad x_\nu & = 0 \\ & & & & & & x_{\nu-1}+ \quad x_\nu & = 0 \end{array}$$

Να αποδειχθεί ότι οι λύσεις του συστήματος δίνονται από τους τύπους

$$x_\lambda = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad \lambda = 3\kappa, & \kappa \text{ φυσικός και } \quad \lambda < \nu \\ x_1 & \text{αν} \quad \lambda = 3\kappa + 1, & \kappa \text{ φυσικός και } \quad \lambda < \nu \\ -x_1 & \text{αν} \quad \lambda = 3\kappa + 2, & \kappa \text{ φυσικός και } \quad \lambda < \nu \end{cases}$$

και $x_\nu = -x_{\nu-1}$.

(ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Παραλλαγή της Επαγωγή της Καλής Διάταξης ως προς λ)

2.9 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Στην ενότητα αυτή, στηριζόμενοι στις δύο τελευταίες ενότητες, θα αναπτύξουμε έναν τρόπο υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα, (φυσικά, εφόσον αυτός υπάρχει).

Ο ορισμος του αντιστρόφου πίνακα εδόθη στην ενότητα 2.6, σελίδα 70.

Από τον ορισμό προκύπτει και ένας προφανής τρόπος αριθμητικού υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα, μάλιστα παρουσιάσαμε εκεί και συγκεκριμένα παραδείγματα.

Στην ενότητα αυτή, με βάση τα εργαλεία που έχουν αναπτυχθεί θα εμβαθύνουμε στην κατανόηση του αντίστροφου πίνακα και την διασύνδεσή του και αυτό θα επιτρέψει, μεταξύ άλλων, την ανάπτυξη μιας πιο αποτελεσματικής μεθόδου αριθμητικού υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα.

Το κεντρικό θεώρημα της ενότητας είναι το παρακάτω

Θεώρημα 2.9.1 *Έστω A είναι ένας $\nu \times \nu$ πίνακας. Οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι*

(α) *Ο A είναι αντιστρέγιμος.*

(β) *Το ομογενές σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους*

$$AX = \mathbb{O}$$

έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

(γ) *Έστω B πίνακας γραμμοϊσοδύναμος προς τον A. Τότε 0 B είναι γραμμοισοδύναμος προς τον I_ν.*

(δ) *Ο A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι από το (α) έπεται το (β).
Έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα

$$AX = \mathbb{O}$$

αυτό οδηγεί στην

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}\mathbb{O}$$

άρα

$$X = \mathbb{O}$$

άρα μόνο η τετριμμένη λύση υπάρχει.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι από το (β) έπεται το (γ).
Από το Θεώρημα 2.8.7, σελίδα 89, έπεται ότι αν το ομογενές σύστημα έχει ακριβώς μία λύση, τότε ο A είναι γραμμοισοδύναμος προς τον I_ν. Η ζητουμένη συνεπαγωγή έπεται εκ του ότι η σχέση « γραμμοισοδύναμος » είναι σχέση ισοδυναμίας.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι από το (γ) έπεται το (δ).
Έστω ότι ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_ν.

Όπως μάθαμε στην ενότητα 2.7 υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $A_1, \ldots, A_\kappa$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} A &= A_1A_2\ldots A_\kappa I_\nu \\ &= A_1A_2\ldots\ldots A_\kappa \end{aligned}$$

άρα ο A είναι γινόμενο αντιστρέψιμο πινάκων, άρα, όπως μάθαμε στην ενότητα2.6 το γινόμενο αυτό είναι αντιστρέψιμος πίνακας και μάλιστα

$$(A_1\ldots A_\kappa)^{-1} = A_\kappa^{-1}\ldots A_1^{-1}.$$

Τέλος η απόδειξη ολοκληρώνεται αποδεικνύοντας ότι το (α) έπεται εκ του (δ) που και αυτό αποδεικνύεται εκ του ότι το γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων είναι αντιστρέψιμοι.

Η εκφώνηση του παραπάνω Θεωρήματος και ο τρόπος που αποδεικνύεται, εμπνέει μια μέθοδο του αντίστροφου ενός πίνακα, εφόσον βέβαια αυτός υπάρχει.

Γράφουμε τον πίνακα A, στα δεξιά

$$I_\nu$$

$$(I_\nu|A)$$

Στον πίνακα αυτόν εκτελούμε γραμμοπράξεις με σκοπό να κάνουμε το A ανηγμένο κλιμακωτό. Στην διαδικασία αυτή, υπάρχουν μια σειρά στοιχειωδών πινάκων $A_1, \ldots, A_\kappa$ και ο τελικός πίνακας είναι ο

$$(A_\kappa\ldots A_2A_1 \mid \qquad A_\kappa\ldots A_2A_1A)$$

τέτοιος ώστε ο $A_\kappa\ldots A_2A_1A$ είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

Με βάση το προηγούμενο Θεώρημα, ο A είναι αντιστρέψιμος τότε και μόνο τότε αν $A_\kappa\ldots A_1A = I_\nu$ και αν αυτό πράγματι συμβαίνει, τότε $A^{-1} = A_\kappa\ldots A_1$.

Άρα εκτελώντας την διαδικασία για να γίνει ο A ανηγμένος κλιμακωτός πέρνουμε τελικά τον πίνακα

$$(A^{-1}|I_\nu)$$

εφόσον βέβαια ο A είναι αντιστρέψιμος.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.9.2

Θεωρούμε τον 3×3 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

για τον οποίο θέλουμε να ελέγξουμε αν έχει αντίστροφο τον οποίον και να βρούμε εάν υπάρχει.

Σχηματίζουμε λοιπόν τον 3×6 πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

εκτελούμε επί αυτού γραμμοπράξεις με την μέθοδο του Θεωρήματος 2.4.8, σελίδα 49, με στόχο να γίνει ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ανηγμένος κλιμακωτός. Προσοχή: Οι γραμμοπράξεις εκτελούνται επί όλου του 3×6 πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Ξεκινάμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -6 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_2 \to -r_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -3 & 2 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_3 \to (-1/4) r_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -3 & 2 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_1 \to r_1 + 9r_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3/2 & -1/4 & -9/4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_2 \to r_2 - 6r_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3/2 & -1/4 & -9/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 6/4 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Άρα, το συμπέρασμα είναι ότι ο αρχικός A έχει αντίστροφο και

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/4 & -9/4 \\ -1 & 1/2 & 6/4 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -1 & -9 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2.9.3

Να ελεγχθεί αν ο παρακάτω πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

έχει αντίστροφο

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

έτσι καταλήγουμε στον

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

που είναι ανηγμένος κλιμακωτός αλλά είναι διάφορος του I_ν. Άρα ο A δεν έχει αντίστροφο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να ελεγχθεί αν οι παρακάτω πίνακες έχουν αντίστροφο

   (α) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (β) $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & -i & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$
είναι αντιστρέψιμος τότε και μόνο τότε αν $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

3. Να εξετασθεί για ποιές τιμές παραμέτρου α, ο παρακάτω πίνακας είναι αντιστρέψιμος
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Κεφάλαιο 3

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εισαγάγουμε την έννοια του διανυσματικού χώρου (ή αλλιώς Γραμμικού Χώρου), και θα μελετήσουμε ορισμένες ιδιότητές τους.

3.1 ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Πρίν δώσουμε τον ορισμό του διανυσματικού χώρου ας δούμε ορισμένα γνωστά μας παραδείγματα:

1. Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ και $\mathbb{F}^{\mu\times\nu}$, το σύνολο των $\mu \times \nu$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$.

   Αν $A, B \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ τότε τό άθροισμά τους, $A + B$ είναι επίσης ένας $\mu \times \nu$ πίνακας $A + B \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$.

   Αν τώρα $\lambda \in \mathbb{F}$ και $A \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$, τότε ορίζεται ο πίνακας $\lambda A \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$.

2. Έστω Δ^2 το σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου με αρχή το σημείο O.

   Αν $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in \Delta^2$, τότε ορίζεται το άθροισμά τους (με τον κανόνα του παραλληλογράμμου), $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \in \Delta^2$.

   Αν τώρα $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\overrightarrow{OA} \in \Delta^2$, τότε ορίζεται το $\lambda\overrightarrow{OA} \in \Delta^2$.

3. Έστω $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Αν $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, τότε το άθροισμά τους $f + g$ είναι επίσης μία πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής, $f + g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Αν τώρα $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, τότε ορίζεται η $\lambda f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Παρατηρούμε ότι, η πρόσθεση πινάκων και πολλαπλασιασμός ενός στοιχείου του $\mathbb{F}$ με ένα πίνακα στο παράδειγμα 1, η πρόσθεση διανυσμάτων και πολλαπλασιασμός ενός πραγματικού αριθμού με ένα διάνυσμα στο παράδειγμα 2 και

η πρόσθεση πραγματικών συναρτήσεων και πολλαπλασιασμός ενός πραγματικού αριθμού με μία πραγματική συνάρτηση στο παράδειγμα 3,

έχουν ορισμένες κοινές θεμελιώδεις ιδιότητες.

Γιά παράδειγμα αν x, y, z είναι τρείς $\mu \times \nu$ πίνακες, ή τρία διανύσματα του επιπέδου με αρχή το O, ή τρείς πραγματικές συναρτήσεις, τότε ισχύει

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Αν λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

Παραδείγματα όπως τα προηγούμενα οδήγησαν στην έννοια του **διανυσματικού χώρου**.

Ορισμός 3.1.1 *Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Ένας* **διανυσματικός χώρος επί του** $\mathbb{F}$ *αποτελείται από ένα μή κενό σύνολο V, μία απεικόνιση $V \times V \longrightarrow V, (v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2$, που λέγεται πρόσθεση, μία απεικόνιση $(\mathbb{F} \times V) \longrightarrow V, (\lambda, v) \longmapsto \lambda v$, που λέγεται πολλαπλασιασμός ενός στοιχείου του $\mathbb{F}$ με ένα στοιχείο του V, έτσι ώστε να ισχύουν:*

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ *, για κάθε $\alpha, \beta \in V$.*
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ *, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in V$.*
3. *Υπάρχει ένα στοιχείο $\mathbb{O} \in V$, με την ιδιότητα*
$$\alpha + \mathbb{O} = \mathbb{O} + \alpha, \quad \text{για κάθε} \quad \alpha \in V$$
4. *Για κάθε στοιχείο $\alpha \in V$ υπάρχει ένα στοιχείο $-\alpha \in V$ με την ιδιότητα*
$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = \mathbb{O}$$
5. $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$ *για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ και $\alpha, \beta \in V$*
6. $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$ *για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ και $\alpha \in V$.*
7. $(\lambda\mu)\alpha = \lambda(\mu\alpha)$ *για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ και $\alpha \in V$.*
8. $1\alpha = \alpha$ *για κάθε $\alpha \in V$.*

Παρατηρήσεις 3.1.2

1. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Το στοιχείο $\mathbb{O} \in V$ είναι μοναδικό με την ιδιότητα*
$$\mathbb{O} + \alpha = \alpha + \mathbb{O} = \alpha$$
για κάθε $\alpha \in V$.

   Πράγματι αν $\mathbb{O}' \in V$ και $\mathbb{O}' + \alpha = \alpha + \mathbb{O}' = \alpha$ για κάθε $\alpha \in V$. Τότε $\mathbb{O}' = \mathbb{O}' + \mathbb{O} = \mathbb{O}$.

   Το $\mathbb{O} \in V$ λέγεται **το μηδενικό στοιχείο του** V *και συμβολίζεται με $\mathbb{O}_V$.*

   Αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης τότε πολλές φορές το μηδενικό στοιχείο ενός διανυσματικού χώρου συμβολίζεται με $\mathbb{O}$.

2. *Για κάθε* $\alpha \in V$ *υπάρχει μοναδικό στοιχείο* $-\alpha \in V$ *με*

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = \mathbb{O}$$

Πράγματι αν $\quad y \in V \quad$ *με* $\quad \alpha + y = y + \alpha = \mathbb{O}$, *τότε*

$$-\alpha = -\alpha + \mathbb{O} = -\alpha + (\alpha + y) = (-\alpha + \alpha) + y = \mathbb{O} + y = y$$

Ο V λέγεται επίσης και **γραμμικός χώρος επί του** $\mathbb{F}$.

Όταν το σύνολο $\mathbb{F}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, θα λέμε ότι έχουμε ένα *πραγματικό διανυσματικό χώρο* και όταν το σύνολο $\mathbb{F}$ είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών θα λέμε ότι έχουμε ένα *μιγαδικό διανυσματικό χώρο.*

Υπάρχουν επίσης και διανυσματικοί χώροι στους οποίους το σύνολο των συντελεστών $\mathbb{F}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ ή το σύνολο των πραγματικών αριθμών της μορφής $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ κτλ.

Εμείς θα μελετήσουμε παρακάτω μόνο πραγματικούς ή μιγαδικούς διανυσματικούς χώρους.

Παραδείγματα 3.1.3 *Εύκολα επαληθεύουμε ότι:*

(i) *Το σύνολο των* $\mu \times \nu$ *πινάκων με στοιχεία από το* $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ *, με τη συνήθη πρόσθεση πινάκων και πολλαπλασιασμό ενός στοιχείου του* $\mathbb{F}$ *με ένα πίνακα, είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$.

Το $0_{\mathbb{F}^{\mu\times\nu}}$ *είναι ο μηδενικός* $\mu \times \nu$ *πίνακας και αν* $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$, *τότε το* $-A = (-\alpha_{ij}) \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$.

(ii) *Το σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου που έχουν ως αρχή το O,* Δ^2, *με τη συνήθη πρόσθεση διανυσμάτων και πολλαπλασιασμό ενός πραγματικού αριθμού με ένα διάνυσμα είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Το* $0_{\Delta^2} = \overrightarrow{0}$ *είναι το διάνυσμα με αρχή και τέλος το O.*

Αν $\overrightarrow{OA} \in \Delta^2$, *τότε* $\overrightarrow{-OA}$ *είναι το διάνυσμα, συγγραμμικό με το* $\overrightarrow{OA}$ *με αρχή το O, φορά αντίθετη με τη φορά του* $\overrightarrow{OA}$ *και μέτρο ίσο με το μέτρο του* $\overrightarrow{OA}$.

(iii) *Το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής,* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *με τη συνήθη πρόσθεση συναρτήσεων και πολλαπλασιασμό ενός πραγματικού αριθμού με μία συνάρτηση είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.*

Το $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ *είναι η μηδενική συνάρτηση δηλαδή* $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 0$ *και αν* $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *τότε η* $-f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *ορίζεται ως* $x \longmapsto -f(x)$.

Παράδειγμα 3.1.4 *Έστω* $\mathbb{F}^\nu$ *το σύνολο των διατεταγμένων ν-άδων με στοιχεία από το* $\mathbb{F}$. *Εύκολα επαλεδεύουμε ότι με πρόσθεση*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu) + (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_\nu + \beta_\nu)$$

και πολλαπλασιασμό ενός στοιχείου του $\mathbb{F}$ *με ένα στοιχείο του* $\mathbb{F}^\nu$,

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \cdots, \lambda\alpha_\nu)$$

το $\mathbb{F}^\nu$ *είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$.

Να σημειώσουμε ότι $0_{\mathbb{F}^\nu} = (0, 0, \cdots, 0)$ *και ότι αν* $\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$, *τότε* $-\alpha = (-x_1, -x_2, \cdots, -x_\nu)$.

Παράδειγμα 3.1.5 *Έστω*

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}x_\nu = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu}x_\nu = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu}x_\nu = 0 \end{array}$$

ένα ομογενές γραμμικό σύστημα μ *εξισώσεων με* ν *αγνώστους με πραγματικούς συντελεστές. Το σύνολο των λύσεων του συστήματος με πρόσθεση δύο λύσεων και πολλαπλασιασμό ενός πραγματικού αριθμού με μία λύση όπως ορίζονται στο κεφάλαιο 2 είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.*

Παράδειγμα 3.1.6 *Θεωρούμε το σύνολο* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών. Ως πρόσθεση θεωρούμε τη συνήθη πρόσθεση των μιγαδικών αριθμών και ως πολλαπλασιασμό το γινόμενο πραγματικού αριθμού επί μιγαδικό. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι το σύνολο* $\mathbb{C}$ *είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.*

Παράδειγμα 3.1.7 *Θεωρούμε το σύνολο* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών. Ως πρόσθεση θεωρούμε τη συνήθη πρόσθεση των μιγαδικών αριθμών και ως πολλαπλασιασμό το γινόμενο μιγαδικού αριθμού επί μιγαδικό. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι το σύνολο* $\mathbb{C}$ *είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος.*

Παράδειγμα 3.1.8 *Έστω* $\mathbb{R}_\nu[x]$ *το σύνολο των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ* ν. *Εύκολα επαληθεύουμε ότι με πρόσθεση*

$$(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_\nu x^\nu) + (\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_\nu x^\nu) = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)x + \cdots + (\alpha_\nu + \beta_\nu)x^\nu$$

και πολλαπλασιασμό ενός πραγματικού αριθμού με ένα στοιχείο του $\mathbb{R}_\nu[x]$

$$\lambda(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_\nu x^\nu) = \lambda\alpha_0 + (\lambda\alpha_1)x + \cdots + (\lambda\alpha_\nu)x^\nu$$

το $\mathbb{R}_\nu[x]$ *είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.*

Το $0_{\mathbb{R}_\nu[x]}$ *είναι το μηδενικό πολυώνυμο,* $0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^\nu$ *και αν* $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_\nu x^\nu$, *τότε το* $-p(x)$ *είναι ίσο με* $-p(x) = -\alpha_0 - \alpha_1 x - \cdots - \alpha_\nu x^\nu$.

Πρόταση 3.1.9 *Έστω* V *ένας διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$. *Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Για κάθε* $\lambda \in F$, *έχουμε ότι* $\lambda 0_V = 0_V$
2. *Για κάθε* $x \in V$, *έχουμε ότι* $0_F x = 0_V$
3. *Εάν το γινόμενο* λx *είναι το μηδενικό στοιχείο του* V, *δηλαδή* $\lambda x = 0_V$, *τότε ή* $\lambda = 0_F$ *ή* $x = 0_V$.

4. *Για κάθε $\lambda \in F$ και κάθε $x \in V$, έχουμε ότι*
$$(-\lambda)x = -(\lambda x) = \lambda(-x).$$

Απόδειξη.

1. Έχουμε $\lambda 0_V = \lambda(0_V + 0_V) = \lambda 0_V + \lambda 0_V$. Έστω $\lambda 0_V = \omega$. Τότε έχουμε τη σχέση $\omega + \omega = \omega$. Στον διανυσματικό χώρο σύμφωνα με τον ορισμό υπάρχει και το στοιχείο $-\omega$, το αντίθετο του ω. Προσθέτοντας το στοιχείο $-\omega$ και στα δύο μέλη, έχουμε: $(\omega + \omega) + (-\omega) = \omega + (-\omega) = 0_V$. Από την ιδιότητα 2. της πρόσθεσης τώρα, έχουμε ότι $0_V = (\omega + \omega) + (-\omega) = \omega + (\omega + (-\omega)) = \omega + 0_V = \omega$

2. Έχουμε ότι $0_F x = (0_F + 0_F)x$. Έστω $0_{\mathbb{F}} x = \omega$. Τότε έχουμε τη σχέση $\omega + \omega = \omega$ και συνεχίζουμε όπως πρίν.

3. Έστω ότι λ$x = 0_V$. Αν λ=0_F, έχουμε το ζητούμενο. Αν λ$\neq 0_F$, τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης λ$x = 0_V$ με το 1/λ , οπότε έχουμε το ζητούμενο.

4. Αφήνεται ως άσκηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γίνουν οι επαληθεύσεις στα παραδείγματα 3.1.3 , 3.1.4 και 3.1.5 .

2. Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές, με πράξεις τη γνωστή πρόσθεση πολυωνύμων και τον γνωστό πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού με ένα πολυώνυμο είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

3. Έστω
$$\begin{array}{c}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\
\cdots \qquad \cdots \\
\alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu}x_\nu = \beta_\mu
\end{array}$$
ένα μή-ομογενές γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους με πραγματικούς συντελεστές. Να δειχθεί ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος αυτού με τη γνωστή πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ενός πραγματικού αριθμού με μία λύση δεν είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος.

4. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος έπί του $\mathbb{F}$. Να δειχθεί ότι:
   - $i)$ Αν $u, v \in V$ και $u + v = 0_V$ τότε $u = -v$
   - $ii)$ $(-1)v = -v$ για κάθε $v \in V$
   - $iii)$ Αν $u, v, w \in V$ και $u + v = u + w$, τότε $v = w$.
   - $iv)$ Αν $u, v \in V$ και $\lambda u = \lambda v$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$ με $\lambda \neq 0_{\mathbb{F}}$ τότε $u = v$.

3.2 ΥΠΟΧΩΡΟΙ

Ορισμός 3.2.1 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Ένα υποσύνολο A του V λέγεται* **υπόχωρος του** V *, αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $0_V \in A$

(ii) *Αν α και β είναι δύο στοιχεία του A, τότε και το άθροισμά τους $\alpha + \beta$ είναι ένα στοιχείο του A.*

(iii) *Αν α είναι ένα στοιχείο του A και λ ένα στοιχείο του $\mathbb{F}$ τότε και το $\lambda\alpha$ είναι στοιχείο του A.*

Παρατηρήσεις 3.2.2 *Αν για ένα υποσύνολο A ενός διανυσματικού χώρου V ισχύουν τα (i), (ii) και (iii) του πιο πάνω ορισμού, τότε ο A κληρονομεί από τον V όλες τις άλλες ιδιότητες $(1), (2), \cdots, (8)$ του ορισμού 3.1.1 , που απαιτούνται για τον ορισμό του διανυσματικού χώρου. Δηλαδή, ο A είναι και αυτός ένας διανυσματικός χώρος ως πρός την ίδια πρόσθεση και πολλαπλασιασμό στοιχείου του $\mathbb{F}$ με στοιχείο του A, που θεωρήθηκε για τον ορισμό του V.*

Συμβολισμός: Αν ο A είναι υπόχωρος του V, τότε γράφουμε $A \leqq V$

Παράδειγμα 3.2.3 *Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$. Το υποσύνολο $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι:*

(i) $0_{\mathbb{R}^2} \in A$

(ii) *Αν $\alpha, \beta \in A$, τότε $\alpha = (x_1, 0)$ και $\beta = (x_2, 0)$ για κάποια $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και έτσι $\alpha + \beta = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \in A$*

(iii) *Αν $\alpha \in A$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\alpha = (x_1, 0)$ για κάποιο $x_1 \in \mathbb{R}$*

και $\lambda\alpha = (\lambda x_1, 0) \in A$.

Το υποσύνολο $B = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \geq 0\}$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.
Πράγματι το $v = (1, 0) \in B$ αλλά $(-1)v = (-1, 0) \notin B$.

Παράδειγμα 3.2.4 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Είναι προφανές ότι ο V είναι υπόχωρος του εαυτού του. Επίσης το σύνολο $\{0_V\}$ είναι υπόχωρος του V.*

Παράδειγμα 3.2.5 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και α ένα στοιχείο του συνόλου V.*

Το σύνολο $\langle\alpha\rangle = \{\lambda\alpha \in V \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$ είναι ένας υπόχωρος του V.

Παράδειγμα 3.2.6 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και α, β δύο στοιχεία του. Το σύνολο $\langle\alpha, \beta\rangle = \{\lambda\alpha + \mu\beta \in V \mid \lambda, \mu \in \mathbb{F}\}$ είναι ένας υπόχωρος του V.*

Παράδειγμα 3.2.7 *Στο παράδειγμα αυτό θα δούμε ποιοί είναι οι υπόχωροι του Δ^2.*
Ένας υπόχωρος είναι το σύνολο $\{0_{\Delta^2}\}$.
Ενας άλλος υπόχωρος είναι όλος ο χώρος Δ^2.
Έστω τώρα $A \leq \Delta^2$, διαφορετικός υπόχωρος από τους παραπάνω. και $\overrightarrow{OA} \in A$ με $\overrightarrow{OA} \neq 0_{\Delta^2}$. Υπάρχουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

1. *Για κάθε $\overrightarrow{OB} \in A$, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{\alpha}$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι ο υπόχωρος A έχει την μορφή $A = \{\lambda\overrightarrow{OA} \in \Delta^2 | \lambda \in \mathbb{R}\}$.*

2. *Υπάρχει $\overrightarrow{OB} \in A$, έτσι ώστε $\overrightarrow{OB} \neq \lambda\overrightarrow{OA}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\overrightarrow{O\Gamma} \in \Delta^2$, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα*

$$\overrightarrow{O\Gamma} = \lambda_1\overrightarrow{OA} + \lambda_2\overrightarrow{OB}.$$

Άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε $A = \Delta^2$.

«Γεωμετρικά» εξετάζοντας το παραπάνω παράδειγμα, βλέπουμε ότι οι υπόχωροι του Δ^2 είναι όλος ο χώρος, κάθε «ευθεία » που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το συνολο που περιέχει μόνο την αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα 3.2.8 *Έστω $Tr^\alpha(\nu, \mathbb{F})$ το σύνολο των άνω τριγωνικών $\nu \times \nu$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι το σύνολο αυτό είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.*

Παράδειγμα 3.2.9 *Εύκολα ελέγχουμε ότι αν Λ είναι το σύνολο λύσεων ενός ομογενούς συστήματος*

$$\begin{array}{c} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}x_\nu = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu}x_\nu = 0 \\ \cdots \qquad \cdots \\ \alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu}x_\nu = 0 \end{array}$$

με συντελεστές στο F τότε το Λ είναι υπόχωρος του $F^{\nu\times 1}$

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A,B δύο υπόχωροί του. Δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσουμε ότι το σύνολο $A \cap B$ είναι ένας υπόχωρος του V. Γενικότερα ισχύει:

Πρόταση 3.2.10 *Έστω Y ένα μη κενό σύνολο υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου V. Τότε η τομή των υπόχωρων αυτών είναι ένας υπόχωρος του V.*

Απόδειξη. Έστω A η τομή των υπόχωρων που ανήκουν στο σύνολο Y. Κάθε υπόχωρος του V, επομένως και κάθε υπόχωρος που ανήκει στο σύνολο Y περιέχει το 0_V. Έτσι το 0_V θα βρίσκεται στην τομή A . Έστω x, ψ δύο στοιχεία του συνόλου A. Τα στοιχεία αυτά θα είναι στοιχεία κάθε υποχώρου, που ανήκει στο Y. Άρα το άθροισμα $x + \psi$ θα βρίσκεται σε κάθε υπόχωρο, που ανήκει στο Y και επομένως στην τομή τους A. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι αν $\lambda \in \mathbb{F}$ και $x \in A$, τότε το στοιχείο λx ανήκει στο A. Άρα το σύνολο A είναι ένας υπόχωρος του χώρου V.

Είδαμε ότι αν A, B είναι υπόχωροι του V, τότε ο $A \cap B$ είναι ένας υπόχωρος του V.
Μπορούμε επίσης να πάρουμε ακόμη ένα υπόχωρο του V από τους A, B ως εξής:
Θεωρούμε το σύνολο $\{\omega \in V \mid \omega = \alpha + \beta, \alpha \in A.\beta \in B\}$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι αυτό το σύνολο είναι ένας υπόχωρος του V, ο οποίος λέγεται **το άθροισμα των A και B** και συμβολίζεται με $A + B$.

Γενικότερα, αν $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V τότε εύκολα επαληθεύουμε ότι το σύνολο $\{\omega \in V \mid \omega = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu, \alpha_i \in A_i, 1 \leq i \leq \nu\}$, είναι ένας υπόχωρος του V, ο οποίος λέγεται *το άθροισμα των* $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ και συμβολίζουμε με $A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu$ ή με $\sum_{i=1}^{\nu} A_i$.

Παραδείγματα 3.2.11

(1) Έστω $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ο διανυσματικός χώρος των $\nu \times \nu$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$.

Αν $Tr^\alpha(\nu, \mathbb{F})$ (αντίστοιχα $Tr^\kappa(\nu, \mathbb{F})$) είναι ο υπόχωρος των άνω (αντίστοιχα κάτω) τριγωνικών $\nu \times \nu$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$, τότε η τομή $Tr^\alpha(\nu, \mathbb{F}) \cap Tr^\kappa(\nu, \mathbb{F})$ είναι το σύνολο των διαγωνίων πινάκων του $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ και $Tr^\alpha(\nu, \mathbb{F}) + Tr^\kappa(\nu, \mathbb{F}) = \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.

(2) Έστω $\mathbb{R}^2$ ο διανυσματικός χώρος των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών.

*Αν $X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ και $Y = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$, τότε οι **X,Y** είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ και $X \cap Y = 0_{\mathbb{R}^2}, X + Y = \mathbb{R}^2$*

Παρατηρούμε ότι ο X (αντίστοιχα ο Y) είναι ο « άξονας των x » (αντίστοιχα «ο άξονας των y ») στο καρτεσιανό επίπεδο $\mathbb{R}^2$.

(3) Έστω $\mathbb{R}^3$ ο διανυσματικός χώρος των διατεταγμένων τριάδων πραγματικών αριθμών.

Αν $X = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}, Y = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}$ και $Z = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$, τότε οι X, Y, Z είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και $X + Y + Z = \mathbb{R}^3$.

Ορισμός 3.2.12 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A, B δύο υπόχωροι αυτού. Αν $V = A + B$ και $A \cap B = \{0_V\}$, τότε ο V λέγεται* **το ευθύ άθροισμα** *των υπόχωρων του A και B και γράφουμε $V = A \oplus B$.*

Πρόταση 3.2.13 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A, B δύο υπόχωροί του.Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1) $V = A \oplus B$

2) Κάθε στοιχείο ω του V γράφεται με μοναδικό τρόπο ως

$\omega = \alpha + \beta, \alpha \in A, \beta \in B$.

Δηλαδή αν $\omega = \alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ με $\alpha, \alpha' \in A$ και $\beta, \beta' \in B$, τότε $\alpha = \alpha'$ και $\beta = \beta'$.

Απόδειξη. Έστω ότι $V = A \oplus B$. Από τον ορισμό προκύπτει ότι αν ω είναι ένα στοιχείο του V, τότε το ω γράφεται ως άθροισμα ω=α+β, $\alpha \in A$ και $\beta \in B$. Έστω ότι υπάρχει και μία δεύτερη γραφή αυτού του τύπου, δηλαδή ότι $\omega = \beta + \delta$, όπου γ είναι ένα στοιχείο του A και δ είναι ένα στοιχείο του B. Εξισώνοντας έχουμε ότι $\alpha + \beta = \gamma = \delta$ άρα $\alpha - \gamma = \delta - \beta$. Το στοιχείο $\alpha - \gamma = \delta - \beta$ ανήκει ταυτόχρονα και στον υπόχωρο A και στον υπόχωρο B, δηλαδή το $\alpha - \gamma = \beta - \delta$ ανήκει στο $A \cap B$. Αλλά $A \cap B = \{0_V\}$, αφού $V = A \oplus B$, άρα έχουμε ότι $\alpha - \gamma = \delta - \beta = 0_V$. Συνεπώς $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.

Αντίστροφα τώρα, υποθέτουμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου V γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\alpha + \beta$ όπου $\alpha \in A$ και $\beta \in B$. Έστω επίσης ω ένα στοιχείο της τομής $A \cap B$. Τότε το ω γράφεται $\omega = \omega + 0_B = 0_A + \omega$. (Βέβαια ξέρουμε ότι $0_B = 0_A = 0_V$). Από τη μοναδικότητα της γραφής, που υποθέσαμε, έχουμε ότι $\omega = 0_A = 0_V$.

Παραδείγματα 3.2.14 *Στα παραδείγματα 3.2.11 παρατηρούμε ότι*

1. *Ο* $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ *δεν είναι το ευθύ άθροισμα των* $Tr^{\alpha}(\nu,\mathbb{F}), Tr^{\kappa}(\nu,\mathbb{F})$,
   αφού $Tr^{\alpha}(\nu,\mathbb{F}) \cap Tr^{\kappa}(\nu,\mathbb{F}) \neq \{0_{\mathbb{F}^{\nu\times\nu}}\}$
2. *Ο* $\mathbb{R}^2$ *είναι το ευθύ άθροισμα των* X, Y, *αφού* $\mathbb{R}^2 = X + Y$ *και* $X \cap Y = 0_{\mathbb{R}^2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $\mathbb{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, το σύνολο των παραγωγισίμων πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής.Δείξτε ότι το σύνολο αυτό είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. Έστω A=$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + 4z = 0\}$. Δείξτε ότι το σύνολο A είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

3. Να εξετασθεί αν τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^{3\times3}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^{3\times3}$.

   (i) $M = \{A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid \alpha_{11} = 1\}$

   (ii) $N = \{A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid \alpha_{22} = 0\}$

   (iii) Το σύνολο των συμμετρικών 3×3 πινάκων

   (vi) Το σύνολο των αντιστρεψίμων 3×3 πινάκων

4. Να εξετασθεί αν τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^4$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$:

   (i) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, x_3 = x_4\}$

   (ii) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0_{\mathbb{R}^4}\}$

   (iii) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1x_4 = x_2x_3\}$

5. Έστω A και B δύο υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V. Δείξτε ότι η ένωση $A \cup B$ είναι υπόχωρος του V, αν και μόνο αν ένα από τα παρακάτω ισχύει:

   1) $A \subseteq B$ ή 2) $B \subseteq A$.

6. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A,B υπόχωροι του V. Να δειχθεί ότι

   (i) $A \leq A+B$, $B \leq A+B$

   (ii) Αν $\Gamma \leq V$ με $A \leq \Gamma$ και $B \leq \Gamma$ τότε $A+B \leq \Gamma$

7. Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ και $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+4z=0\}$, $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ δύο υποσύνολά του. Δείξτε ότι:

   (i) Τα υποσύνολα A και B είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$.

   (ii) Το άθροισμα A+B είναι ίσο με $\mathbb{R}^3$.

   Να εξετάσετε αν $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$

8. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A,B υπόχωροί του. Να δειχθεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

   (i) $V = A \oplus B$

   (ii) $V = A+B$ και αν $0_V = \alpha+\beta$ με $\alpha \in A, \beta \in B$, τότε $\alpha = 0_A, \beta = 0_B$ (Ξέρουμε βέβαια ότι $0_A = 0_V = 0_B$).

9. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A, B, Γ υπόχωροί του. Να δειχθεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

   (i) Κάθε στοιχείο w του V γράφεται με μοναδικό τρόπο ως

   $$w = \alpha+\beta+\gamma,\ \ \alpha \in A,\ \ \beta \in B,\ \ \gamma \in \Gamma.$$

   Δηλαδή αν $w = \alpha+\beta+\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma'$ με $\alpha, \alpha' \in A$, $\beta, \beta' \in B$, και $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ τότε $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$ και $\gamma = \gamma'$.

   (ii) $V = A+B+\Gamma$ και αν $0_V = \alpha+\beta+\gamma$ με $\alpha \in A, \beta \in B, \gamma \in \Gamma$, τότε $\alpha = \beta = \gamma = 0_V$

   (iii) $V = A+B+\Gamma$ και $A \cap (B \cap \Gamma) = B \cap (A+\Gamma) = \Gamma \cap (A+B) = \{0_V\}$.

3.3 ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Ορισμός 3.3.1 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και K ένα μή κενό υποσύνολό του. Το στοιχείο α του V θα λέγεται* **γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του K**, *αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$ και $x_1, x_2, \cdots, x_\nu \in K$ με*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Υπάρχει περίπτωση ένα στοιχείο α του διανυσματικού χώρου V να γράφεται με πολλούς τρόπους ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του Κ. Για παράδειγμα αν Κ είναι το $\{(0,1),(1,0),(1,1)\}$, τότε το στοιχείο (2,2) μπορεί να γραφεί είτε ως (2,2)=2(0,1) +2(1,0) +0(1,1) είτε ως (2,2)=0(0,1) +0(1,0) +2(1,1).

Από το επόμενο θεώρημα έπεται ότι το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών ενός μη κενού υποσυνόλου ενός διανυσματικού χώρου V έχει και αυτό την δομή ενός υπόχωρου του V.

Θεώρημα 3.3.2 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και K ένα μη κενό υποσύνολό του. Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του K είναι ένας υπόχωρος του V.*

Απόδειξη. Ας συμβολίσουμε με $\langle K\rangle$ το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του Κ. Επειδή $K\neq\emptyset$, υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο α στο Κ. Τότε $0_{\mathbb{F}}\alpha\in<K>$. Αλλά $0_{\mathbb{F}}\alpha=0_V$, άρα $0_V\in<K>$ Έστω τώρα $\omega_1,\omega_2\in<K>$. Τότε υπάρχουν $\lambda_i,\xi_j\in\mathbb{F}$ και $x_i,\psi_j\in K, i\leq i\leq\nu, 1\leq j\leq\mu$ με $\omega_1=\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i x_i$ και $\omega_2=\sum_{j=1}^{\mu}\xi_j\psi_j$. Τότε το άθροισμα $\omega_1+\omega_2=\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i x_i+\sum_{j=1}^{\mu}\xi_j\psi_j$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του Κ. Αν τώρα $\lambda\in\mathbb{F}$ τότε $\lambda\omega_1=\lambda(\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i x_i)=\sum_{i=1}^{\nu}\lambda\lambda_i x_i$ είναι πάλι ένας γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του Κ. Άρα το σύνολο $<K>$ των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του Κ είναι ένας υπόχωρος του V.

Ορισμός 3.3.3 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και K ένα μή κενό υποσύνολό του. Το σύνολο $\langle K\rangle$ των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του K λέγεται ο* **υπόχωρος του V που παράγεται από το K** *ή* **η γραμμική θήκη του K στον V .**

Αν $\langle K\rangle=V$, τότε λέμε ότι το σύνολο K **παράγει** *τον χώρο V ή ότι το σύνολο K είναι ένα* **σύνολο γεννητόρων** *του χώρου V.*

Ορισμός 3.3.4 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και έστω ότι υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο του V, το K, το οποίο παράγει τον V. Τότε ο V λέγεται **Πεπερασμένα Παραγόμενος** διανυσματικός χώρος.*

Παραδείγματα 3.3.5

1. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

   (i) *Αν $K=\{\alpha\}\subseteq V$, τότε $<K>=\{w\in V\mid w=\lambda\alpha,\lambda\in\mathbb{F}\}=<\alpha>$*

   (ii) *Αν $K=\{\alpha,\beta\}\subseteq V$, τότε $<K>=\{w\in V\mid w=\lambda\alpha+\mu\beta,\lambda,\mu\in\mathbb{F}\}=<\alpha,\beta>$*

   (iii) *Αν $K=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu\}$ τότε $<K>=\{w\in V\mid w=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_\nu\alpha_\nu,\lambda_i\in\mathbb{F},1\leq i\leq\nu\}$*

2. *Έστω $K=\{(1,0,0),(0,0,1)\}\subseteq\mathbb{R}^3$.*

   Τότε $<K>=\{(x_1,0,x_3)\in\mathbb{R}^3\mid x_1,x_3\in\mathbb{R}\}$

3. (i) Ας εξετάσουμε αν το (1,2,3) ανήκει στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από το σύνολο $K = \{(1,0,1), (-1,1,1)\}$.

Το στοιχείο (1,2,3) ανήκει στον $< K >$ αν και μόνο αν υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $(1,2,3) = \lambda(1,0,1) + \mu(-1,1,1)) = (\lambda - \mu, \mu, \lambda + \mu)$. Δηλαδή αν και μόνο αν το ακόλουθο σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda - \mu &= 1 \\ \mu &= 2 \\ \lambda + \mu &= 3 \end{aligned}$$

έχει λύση.

Παρατηρούμε ότι το σύστημα δεν έχει λύση, άρα $(1,2,3) \notin < K >$

(ii) Ας εξετάσουμε αν το σύνολο $K = \{(1,1,1), (0,1,1), (-1,0,-1)\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{R}^3$. Το K είναι ένα σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{R}^3$ αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του K, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ υπάρχουν $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ με

$$(x,y,z) = \lambda(1,1,1) + \mu(0,1,1) + \nu(-1,0,-1) = (\lambda - \nu, \lambda + \mu, \lambda + \mu - \nu)$$

Συνεπώς αν και μόνο αν το ακόλουθο σύστημα

$$\begin{aligned} x &= \lambda - \nu \\ y &= \lambda + \mu \\ z &= \lambda + \mu - \nu \end{aligned}$$

έχει λύση.

Το σύστημα έχει λύση, $\lambda = x + y - z, \mu = z - x, \nu = y - z$ άρα το K παράγει τον $\mathbb{R}^3$.

4. Έστω το ακόλουθο σύστημα δύο εξισώσεων με τρείς αγνώστους και συντελεστές πραγματικούς αριθμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss βρίσκουμε ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι

$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} -3x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}$, το οποίο είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

Παρατηρούμε ότι

$\Lambda = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}$, δηλαδή το σύνολο $K = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, παράγει τον Λ, $\Lambda =< \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} >$

5. *Έστω το ακόλουθο σύστημα τριών εξισώσεων με πέντε αγνώστους και συντελεστές πραγματικούς αριθμούς:*

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 5x_5 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss βρίσκουμε ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι

$$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} -3x_2 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 \\ (1/3)x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 1} \mid x_1, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

το οποίο είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^{5\times 1}$ *Παρατηρούμε ότι*

$$\Lambda = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 1} \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Αν

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{5\times 1}$$

τότε το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του K είναι το σύνολο των λύσεων του συστήματος, δηλαδή $\langle K \rangle = \Lambda$.

Συνεπώς το K είναι ένα σύνολο γεννητόρων του χώρου Λ.

Παράδειγμα 3.3.6 *Το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές στο* $\mathbb{F}$*, δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος. (Γιατί;)*

Σημείωση Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $K = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\} \subseteq V$ τότε πολλές φορές συμβολίζουμε τον $< K >$ με $< \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu >$.

Μπορούμε να δούμε τον υπόχωρο $< K >$ του V, που μελετήσαμε πιό πάνω και με διαφορετικό τρόπο ως εξής:

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και K ένα υποσύνολο του V. Θεωρούμε το σύνολο όλων των υπόχωρων του V που περιέχουν το K, $S_K = \{A \in \mathcal{P}(V) \mid A \leq V$ και $K \subseteq A\}$.

Τότε το $S_K \neq \emptyset$ αφού $V \in S_K$.

Ορίζουμε $K^\star = \bigcap_{A\in S_K} A$, δηλαδή το $K^\star$ είναι η τομή όλων των υπόχωρων του V που περιέχουν το K. Από την πρόταση 3.2.10 έπεται ότι το $K^\star$ είναι ένας υπόχωρος του V.

Στην ακόλουθη πρόταση θα δείξουμε ότι αν $K \neq \emptyset$, τότε $< K >= K^\star$

Πρόταση 3.3.7 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και K ένα μη κενό υποσύνολό του. Τότε $< K >= K^\star$*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $< K >\subseteq K^\star$ και $< K >\supseteq K^\star$.

Έστω $w \in< K >$. Τότε $w = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i$ με $\lambda_i \in \mathbb{F}, x_i \in K, 1 \leq i \leq \nu$. Επειδή $x_i \in K, 1 \leq i \leq \nu$ έπεται ότι $x_i \in K^\star, 1 \leq i \leq \nu$ και επειδή ο $K^\star$ είναι ένας υπόχωρος του V έπεται ότι $\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i \in K^\star$, άρα $w \in K^\star$ και δείξαμε ότι $< K >\subseteq K^\star$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $K^\star \subseteq< K >$. Είναι σαφές από τον ορισμό του $< K >$ ότι $K \subseteq< K >$, αφού αν $x \in K$ τότε $x = 1_{\mathbb{F}}x$, άρα ο $< K >$ είναι ένας υπόχωρος του V που περιέχει το σύνολο K. Δηλαδή $\langle K\rangle \in S_K$. Συνεπώς $K^\star \subseteq< K >$.

Από τον ορισμό του $K^\star$ έπεται ότι αν $K = \emptyset$ τότε $K^\star = \{0_V\}$.

Ορισμός 3.3.8 *Ορίζουμε ως υπόχωρο του V που παράγεται από το $\emptyset$ τον $\{0_V\}$, δηλαδή $< \emptyset >= \{0_V\}$.*

Τώρα από τον προηγούμενο ορισμό και την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $K^\star =< K >$ για κάθε υποσύνολο K του V.

Πρόταση 3.3.9 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $w_1, w_2, \cdots, w_\mu$ στοιχεία του V. Τότε*

1. $< w_1, \cdots, w_i, \cdots, w_j, \cdots, w_\mu >=< w_1, \cdots, w_j, \cdots, w_i, \cdots, w_\mu >$
2. $< w_1, \cdots, w_i, \cdots, \cdots, w_\mu >=< w_1, \cdots, \rho w_i, \cdots, \cdots, w_\mu >, \rho \in \mathbb{F}, \rho \neq 0_{\mathbb{F}}$
3. $< w_1, \cdots, w_i, \cdots, w_j, \cdots, w_\mu >=< w_1, \cdots, w_i, \cdots, \underbrace{\tau w_i + w_j}_{j\text{-θέση}}, \cdots, w_\mu >$, $\tau \in \mathbb{F}$, $i \neq j$.

Απόδειξη.

1. Η απόδειξη είναι άμεση
2. Έστω $\Lambda =< w_1, \cdots, w_i, \cdots, \cdots, w_\mu >$ και $M =< w_1, \cdots, \rho w_i, \cdots, \cdots, w_\mu >$. Θα δείξουμε ότι $\Lambda \subseteq M$ και $M \subseteq \Lambda$.

   Έστω $x \in \Lambda$, τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\mu \in \mathbb{F}$ με $x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i w_i = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_\mu w_\mu = \lambda_1 w_1 + \cdots + \frac{\lambda_i}{\rho}(\rho w_i) + \cdots + \lambda_\mu w_\mu$, άρα $x \in M$.

   Αν τώρα $y \in M$ τότε υπάρχουν $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\mu \in \mathbb{F}$ με $y = \sigma_1 w_1 + \cdots + \sigma_i(\rho w_i) + \cdots + \rho_\mu w_\mu = \sigma_1 w_1 + \cdots + (\sigma_i \rho) w_i + \cdots + \rho_\mu w_\mu$ άρα $y \in \Lambda$.

3. Έστω $\Lambda =< w_1, \cdots, w_i, \cdots, w_j, \cdots, w_\mu >$ και $M =< w_1, \cdots, w_i, \cdots, w_j, \cdots, w_\mu >$ Θα δείξουμε ότι $\Lambda \subseteq M$ και $M \subseteq \Lambda$. Έστω $x \in \Lambda$ τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\mu \in \mathbb{F}$ με
$$x = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_i w_i + \cdots + \lambda_j w_j + \cdots + \lambda_\mu w_\mu$$
$$= \lambda_1 w_1 + \cdots + (\lambda_i - \lambda_j \tau) w_i + \cdots + \lambda_j (\tau w_i + w_j) + \cdots + \lambda_\mu w_\mu$$
Άρα $x \in M$.

Έστω $y \in M$ τότε υπάρχουν $\sigma_1, \cdots, \sigma_\mu \in \mathbb{F}$ με $y = \sigma_1 w_1 + \cdots + \sigma_i w_i + \cdots + \sigma_j (\tau w_i + w_j) + \cdots + \sigma_\mu w_\mu = \sigma_1 w_1 + \cdots + (\sigma_i + \sigma_j \tau) w_i + \cdots + \sigma_j w_j + \cdots + \sigma_\mu w_\mu$ άρα $y \in \Lambda$.

Πόρισμα 3.3.10 *Έστω* $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{\mu\nu} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$

και $B = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha'_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha'_{\mu 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha'_{\mu\nu} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$
ένας πίνακας που προκύπτει από τον A μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

Τότε ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{1\times\nu}$ που παράγεται από τις γραμμές του A ισούται με τον υπόχωρο του $\mathbb{F}^{1\times\nu}$ που παράγεται από τις γραμμές του B.

Απόδειξη. Αν ο B προκύπτει από τον A μέσω ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών, τότε το ζητούμενο έπεται από την προηγούμενη πρόταση. Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται με επαγωγή και αφήνεται σαν άσκηση.

Παράδειγμα 3.3.11 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$
$$\xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} = B_1$$
$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 5 & -10 \end{pmatrix} = B_2$$
$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -8 \end{pmatrix} = B_3$$
Ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^{1\times 5}$ που παράγεται από τις γραμμές του A ισούται με τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^{1\times 5}$ που παράγεται από τις γραμμές του $B_i, i = 1, 2, 3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετασθεί αν το $K = \{1+x, 1+2x, 1+x^2, 1+2x^2\}$ παράγει το χώρο $\mathbb{R}_2[x]$.

   Υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του K που παράγει το $\mathbb{R}_2[x]$;

2. Έστω D το σύνολο των 3×3 διαγωνίων πινάκων με στοιχεία πραγματικούς.

   (i) Να δειχθεί ότι $\mathcal{D} \leq \mathbb{R}^{3\times 3}$

   (ii) Να εξετασθεί αν το
   $$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$
   παράγει τον $\mathcal{D}$.

3. Να εξετασθεί αν το (1, -1,0,3) ανήκει στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από το σύνολο $K = \{(1,0,1,7), (-1,1,0,-3)\}$

4. Να εξετασθεί αν το σύνολο $K = \{(1,0,-1), (-1,1,1)\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{R}^3$.

5. Να βρεθεί ένα σύνολο γεννητόρων του χώρου των λύσεων του ακόλουθου συστήματος με πραγματικούς συντελεστές:
   $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

6. Να δειχθεί ότι $\mathbb{R} = \langle \alpha \rangle$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$. Έστω $\beta \in \mathbb{C}$ με $\beta \neq 0$. Αληθεύει ότι $\mathbb{C} =< \beta >$ ως διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$; Επί του $\mathbb{C}$;

7. Έστω $x_1, x_2, \cdots, x_\nu, y$ στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V επί του $\mathbb{F}$.

   Να δειχθεί ότι $\langle x_1, x_2, \cdots, x_\nu, y \rangle = \langle x_1, x_2, \cdots, x_\nu \rangle$ αν και μόνο αν το y είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$.

3.4 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $K = \{w_1, w_2, \cdots, w_\nu\}$ ένα σύνολο γεννητόρων του V. Έστω ότι το w_ν είναι γραμμικός συνδυασμός των $w_1, w_2, \cdots, w_{\nu-1}$ με $w_\nu = \sum_{j=1}^{\nu-1} \mu_j w_j, \mu_j \in F, 1 \leq j \leq \nu - 1$. Αν $x \in V$ τότε επειδή $V =< w_1, w_2, \cdots, w_\nu >$, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu \in F$ με $x = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{\nu-1} w_{\nu-1} + \lambda_\nu w_\nu$. Θέτοντας όπου w_ν το $\sum_{j=1}^{\nu-1} \mu_j w_j$, έχουμε ότι $x = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{\nu-1} + \lambda_\nu (\sum_{j=1}^{\nu-1} \mu_j w_j) = (\lambda_1 + \lambda_\nu \mu_1) w_1 + \cdots + (\lambda_{\nu-1} + \lambda_\nu \mu_{\nu-1}) w_{\nu-1}$.

Δηλαδή το x, ένα τυχαίο στοιχείο του V, είναι γραμμικός συνδυασμός των $w_1, w_2, \cdots, w_{\nu-1}$. Άρα $V =< w_1, w_2, \cdots, w_{\nu-1} >$

Η περιγραφή των στοιχείων του V ως γραμμικός συνδυασμός των $w_1, w_2, \cdots, w_\nu$ θα ήταν πιο χρήσιμη αν για την περιγραφή ήταν απαραίτητα όλα τα $w_1, w_2, \cdots, w_\nu$.

Όπως είδαμε πιό πάνω αν ένα από τα $w_i, 1 \leq i \leq \nu$, είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τότε αυτό δεν χρειάζεται για την περιγραφή των στοιχείων του V.

Πρόταση 3.4.1 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $w_1, w_2, \cdots, w_\nu$ στοιχεία του $V, \nu \geq 2$. Τότε ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων αν και μόνο αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδέν, έτσι ώστε*

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_\nu w_\nu = 0_V$$

Απόδειξη. Έστω ότι ένα από τα $w_1, w_2, \cdots, w_\nu$, ας πούμε το w_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, δηλαδή

$$w_i = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_{i-1} w_{i-1} + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \cdots + \lambda_\nu w_\nu$$

Τότε $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_{i-1} w_{i-1} + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \cdots + \lambda_\nu w_\nu - w_i = 0_V$. Δείξαμε έτσι το ζητούμενο, αφού οι συντελεστές των $w_1, w_2, \cdots, w_\nu$ δεν είναι όλοι μηδέν, ο συντελεστής του w_i είναι -1.

Έστω τώρα ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu$ όχι όλα μηδέν με
$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_\nu w_\nu = 0_V$

Από την υπόθεση, υπάρχει $i \in \{1, 2, \cdots, \nu\}$ με $\lambda_i \neq 0_{\mathbb{F}}$, άρα $-\lambda_i w_i = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{i-1} w_{i-1} + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \cdots \lambda_\nu w_\nu$.

Επειδή $\lambda_i \neq 0_{\mathbb{F}}$ έχουμε ότι

$$w_i = (\lambda_1/-\lambda_i) w_1 + (\lambda_2/-\lambda_i) w_2 + \cdots + (\lambda_{i-1}/-\lambda_i) w_{i-1} + (\lambda_{i+1}/-\lambda_i) w_{i+1} + \cdots + (\lambda_\nu/-\lambda_i) w_\nu$$

Άρα το w_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Η παραπάνω πρόταση οδηγεί στην ακόλουθη έννοια:

Ορισμός 3.4.2 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $w_1, w_2, \cdots, w_\nu$ στοιχεία του V. Τα $w_1, w_2, \cdots, w_\nu$ λέγονται* **γραμμικά εξαρτημένα** *αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδέν, έτσι ώστε*

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_\nu w_\nu = 0_V$$

Ορισμός 3.4.3 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $w_1, w_2, \cdots, w_\nu$ στοιχεία του V. Τα $w_1, w_2, \cdots, w_\nu$ λέγονται* **γραμμικά ανεξάρτητα** *αν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

Δηλαδή, τα $w_1, w_2, \cdots, w_\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν κάθε σχέση της μορφής $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_\nu w_\nu = 0_V, \lambda_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq \nu$ συνεπάγεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_\nu = 0_{\mathbb{F}}$.

Παραδείγματα 3.4.4

1. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

   (i) *Αν $\alpha \in V$ τότε ξέρουμε ότι για $\lambda \in \mathbb{F}$, έχουμε ότι $\lambda\alpha = 0_V$ αν και μόνο αν $\lambda = 0_{\mathbb{F}}$ ή $\alpha = 0_V$. Άρα αν $\alpha \neq 0_V$ η σχέση $\lambda\alpha = 0_V$ συνεπάγεται ότι $\lambda = 0_{\mathbb{F}}$ συνεπώς το α είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Τώρα επειδή $1 \cdot 0_V = 0_V$ έπεται ότι το 0_V είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

(ii) Έστω $x, y \in V$ με x, y γραμμικά εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν λ_1, λ_2, όχι όλα μηδέν, δηλαδή $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$ με $\lambda_1 x + \lambda_2 y = 0_V$. Αν π.χ. $\lambda_1 \neq 0_{\mathbb{F}}$, τότε $x = (-\lambda_2/\lambda_1)y$.

(iii) Έστω $x_1, x_2, \cdots, x_\kappa$ στοιχεία του V με $x_i = 0_V$, για κάποιο $i \in \{1, 2 \cdots, \kappa\}$. Τότε τα $x_1, x_2, \cdots, x_\kappa$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι

$$0_V = 0_{\mathbb{F}} x_1 + 0_{\mathbb{F}} x_2 + \cdots + 0_{\mathbb{F}} x_{i-1} + 1x_i + 0_{\mathbb{F}} x_{i+1} + \cdots + 0_{\mathbb{F}} x_\kappa.$$

2. Ας εξετάσουμε αν τα στοιχεία

$x+1, x+2, x^2-1$ του $\mathbb{R}_3[x]$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Θα πρέπει να ελέγξουμε αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε

$$(\star) \qquad \lambda_1(x+1) + \lambda_2(x+2) + \lambda_3(x^2-1) = 0_{\mathbb{R}_3[x]} = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

Η $(\star)$ είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Αλλά αυτό το σύστημα έχει μόνο μία λύση, την τετριμμένη, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, άρα η $(\star)$ συνεπάγεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ άρα τα $x+1, x+2, x^2-1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

3. Ας εξετάσουμε αν τα στοιχεία

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

του $\mathbb{R}^{2\times 1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πάλι, όπως πρίν θεωρούμε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$(\star) \qquad \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Η $(\star)$ είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{aligned} -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Αυτό το σύστημα έχει μή μηδενικές λύσεις, δηλαδή υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, όχι όλα μηδέν, που ικανοποιούν το σύστημα άρα την $(\star)$, συνεπώς τα

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικά εξαρτημένα.

4. Ας εξετάσουμε αν τα στοιχεία

$(1,-2,1)(2,1,-7), (7,-4,1)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Θεωρούμε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε*

$$\lambda_1(1,-2,1) + \lambda_2(2,1,-7) + \lambda_3(7,-4,1) = 0 \qquad (\star)$$

Η $(\star)$ *είναι ισοδύναμη με το σύστημα*

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - 7\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα βλέπουμε ότι έχει μή μηδενικές λύσεις, δηλαδή υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, *όχι όλα μηδέν, που ικανοποιούν την* $(\star)$. *Συνεπώς τα διανύσματα* $(1,-2,1), (2,1,-7), (7,-4,1)$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

Παρατήρηση 3.4.5 *Έστω* $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 4}$
με $\alpha_{ii} \neq 0,\ 1 \leq i \leq 3$

Τότε οι γραμμές του A, A_1, A_2, A_3 *είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του* $\mathbb{R}^{1\times 4}$.

Πράγματι αν $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0$, *τότε έχουμε* $\lambda_1(\alpha_{11}\ \alpha_{12}\ \alpha_{13}\ \alpha_{14}) + \lambda_2(0\ \alpha_{22}\ \alpha_{23}\ \alpha_{24}) + \lambda_3(0\ 0\ \alpha_{33}\ \alpha_{34}) = (0\ 0\ 0\ 0)$ *Άρα*

$(\lambda_1\alpha_{11}, \lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\alpha_{22}, \lambda_1\alpha_{13} + \lambda_2\alpha_{23} + \lambda_3\alpha_{33}, \lambda_1\alpha_{14} + \lambda_2\alpha_{24} + \lambda_3\alpha_{34}) = (0,0,0,0)$ *Συνεπώς*

$$\begin{aligned} \lambda_1\alpha_{11} &= 0 \\ \lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\alpha_{22} &= 0 \\ \lambda_1\alpha_{13} + \lambda_2\alpha_{23} + \lambda_3\alpha_{33} &= 0 \\ \lambda_1\alpha_{14} + \lambda_2\alpha_{24} + \lambda_3\alpha_{34} &= 0 \end{aligned}$$

Επειδή $\alpha_{11} \neq 0, \alpha_{22} \neq 0, \alpha_{33} \neq 0$, *έπεται ότι* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Γενικά ισχύει ότι:

Αν $A \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$, *είναι ένας πίνακας της μορφής*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1j_1} & \cdots & & & & & & \alpha_{1\nu} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdot & \cdots & 0 & \alpha_{2j_2} & & \cdots & & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & & & & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdot & \cdots & 0 & \cdot & \cdots & 0 & \alpha_{\kappa j_\kappa} \cdots & \alpha_{\kappa j} \\ \vdots & & \vdots & & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & & & & & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

με $\alpha_{ij_i} \neq 0$, $1 \leq i \leq \kappa$.

Τότε οι μή μηδενικές γραμμές του A, *οι* $A_1, A_2, \cdots, A_\kappa$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του* $\mathbb{R}^{1\times\nu}$.

Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.

Παρατήρηση 3.4.6 *Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία $w_1, w_2, \cdots, w_\nu$ ενός διανυσματικού χώρου V επί του $\mathbb{F}$, είναι γραμμικά εξαρτημένα αν το μηδενικό στοιχείο του V, το 0_V μπορεί να γραφεί ως ένας μή τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $w_1, w_2, \cdots, w_\nu$.*

Τα στοιχεία $w_1, w_2, \cdots, w_\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν το 0_V, ως γραμμικός συνδυασμός των $w_1, w_2, \cdots, w_\nu$, μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο, τον τετριμμένο.

Ορισμός 3.4.7 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

Ένα πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_\kappa\}$ του V λέγεται γραμμικά εξαρτημένο (αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητο) αν τα $s_1, s_2, \cdots, s_\kappa$ είναι γραμμικά εξαρτημένα (αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα .)

Ένα άπειρο υποσύνολο X του V, λέγεται γραμμικά εξαρτημένο αν υπάρχει γραμμικά εξαρτημένο πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο του X. Αν το X δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο τότε λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο, δηλαδή το X είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν κάθε πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο του X είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Το κενό σύνολο $\emptyset$ το θεωρούμε εξ' ορισμού γραμμικά ανεξάρτητο.

Πρόταση 3.4.8 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A, B δύο πεπερασμένα μη κενά υποσύνολα του V με $B \subseteq A$.*

1. *Αν το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, τότε και το B θα είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

2. *Αν το B είναι γραμμικά εξαρτημένο σύνολο, τότε και το A είναι γραμμικά εξαρτημένο .*

Απόδειξη. Έστω $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa\}$ και $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa, \cdots, \alpha_\nu\}$.

1. Έστω ότι το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θα δείξουμε ότι και το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω ότι το B είναι γραμμικά εξαρτημένο και έστω

$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_\kappa\alpha_\kappa = 0_V$ με $\lambda_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq \nu$ και ένα τουλάχιστον από τα $\lambda_i, 1 \leq i \leq \nu$ διαφορετικό από το $0_\mathbb{F}$. Τότε όμως έχουμε

$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_\kappa\alpha_\kappa + 0_\mathbb{F}\alpha_{\kappa+1} + 0_\mathbb{F}\alpha_{\kappa+2} + \cdots + 0_\mathbb{F}\alpha_\nu = 0_V$ με ένα τουλάχιστον από τα $\lambda_i, 1 \leq i \leq \kappa$ διαφορετικό από το $0_\mathbb{F}$. Άρα το A είναι γραμμικά εξαρτημένο, άτοπο.

2. Έστω ότι το σύνολο A είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Τότε από τήν προηγούμενη απόδειξη, έχουμε ότι και το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άτοπο.

Ορισμός 3.4.9 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και B ένα υποσύνολό του. Το B θα λέγεται μία* **βάση** *του V , αν:*

1. *Το σύνολο B είναι γραμμικά ανεξάρτητο*

2. *Το σύνολο B παράγει τον χώρο V , δηλαδή $\langle B \rangle = V$.*

Θεώρημα 3.4.10 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και B ένα πεπερασμένο μη κενό υποσύνολό του. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύνολο B είναι μία βάση του V.*

2. *Κάθε στοιχείο ω του V γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του B.*

Απόδειξη. Έστω ότι $B = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu\}$.

Έστω τώρα ότι ισχύει το 1. Αν ω είναι ένα στοιχείο του διανυσματικού χώρου V, τότε επειδή $V = \langle \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu \rangle$, υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq \nu$ με

$$\omega = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \cdots + \lambda_\nu\beta_\nu.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το ω γράφεται και ως

$$\omega = \mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2 + \cdots + \mu_\nu\beta_\nu, \;\; \mu_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq \nu.$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των παραπάνω σχέσεων έχουμε

$$\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \cdots + \lambda_\nu\beta_\nu - \mu_1\beta_1 - \mu_2\beta_2 - \cdots - \mu_\nu\beta_\nu = 0_V, \;\; \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{F}, , 1 \leq i \leq \nu.$$

Καταλήγουμε στη σχέση

$$(\lambda_1 - \mu_1)\beta_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\beta_2 + \cdots + (\lambda_\nu - \mu_\nu)\beta_\nu = 0_V.$$

Επειδή το σύνολο B είναι γραμμικά ανεξάρτητο, όλοι οι συντελεστές των β_i στην τελευταία σχέση είναι μηδέν και έτσι $\lambda_i = \mu_i, 1 \leq i \leq \nu$.

Έστω ότι ισχύει το 2. Από υπόθεση έχουμε ότι το σύνολο B παράγει το χώρο V. Μένει να αποδείξουμε ότι το B είναι και γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Θεωρούμε λοιπόν, ένα γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του B ίσο με το 0_V :

$$\xi_1\beta_1 + \xi_2\beta_2 + \cdots + \xi_\nu\beta_\nu = 0_V, \xi_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq \nu.$$

Το 0_V όμως, γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός και κατά τετριμμένο τρόπο ως εξής:

$$0_{\mathbb{F}}\beta_1 + 0_{\mathbb{F}}\beta_2 + \cdots + 0_{\mathbb{F}}\beta_\nu = 0_V.$$

Η μοναδικότητα της γραφής κάθε στοιχείου του χώρου V, όπως έχουμε υποθέσει, οδηγεί στο συμπέρασμα $\xi_i = 0_{\mathbb{F}}, 1 \leq i \leq \nu$.

Παραδείγματα 3.4.11

1. *Έστω τα στοιχεία* $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ *του* $\mathbb{F}^3$. *Τότε αν* $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}^3$ *έχουμε ότι* $(x_1, x_2, x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, *δηλαδή* $\mathbb{F}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$.

   Επιπλέον εύκολα βλέπουμε ότι τα e_1, e_2, e_3 *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα το σύνολο* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *είναι μία βάση του* $\mathbb{F}^3$ *και συνήθως λέγεται* **η κανονική βάση του** $\mathbb{F}^3$ **.**

   Ανάλογα μπορούμε να δείξουμε ότι τα στοιχεία του $\mathbb{F}^\nu$, $e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0,$
   $\cdots, 0), \cdots, e_\nu = (0, 0, 0, \cdots, 1)$ *παράγουν τον* $\mathbb{F}^\nu$ *και είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα το* $\{e_1, e_2, \cdots, e_\nu\}$ *είναι μία βάση του* $\mathbb{F}^\nu$. *Όπως και πρίν η βάση αυτή θα λέγεται η κανονική βάση του* $\mathbb{F}^\nu$.

2. (i) *Θα δείξουμε ότι το σύνολο* $\{(1,1),(1,-1)\}$ *είναι μία βάση του* $\mathbb{R}^2$.

   Πράγματι αν $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ *τότε* $(x_1,x_2)=\lambda_1(1,1)+\lambda_2(1,-1)$, *όπου* $\lambda_1=\frac{x_1+x_2}{2}$ *και* $\lambda_2=\frac{x_1-x_2}{2}$ *Άρα* $\mathbb{R}^2=\langle(1,1),(1,-1)\rangle$. *Τώρα αν* $\lambda_1(1,1)+\lambda_2(1,-1)=(0,0)$ *τότε*

   $$\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1-\lambda_2=0\end{array},$$

   άρα $\lambda_1=\lambda_2=0$ *συνεπώς τα* $(1,1)(1,-1)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

   (ii) *Θα δείξουμε ότι το σύνολο* $\{(1,-1),(2,-3)\}$ *είναι μία βάση του* $\mathbb{R}^2$.

   Πράγματι αν $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ *τότε* $(x_1,x_2)=\lambda_1(1,-1)+\lambda_2(2,-3)$, *όπου* $\lambda_1=3x_1+2x_2$ *και* $\lambda_2=-(x_2+x_1)$. *Άρα* $\mathbb{R}^2=\langle(1,-1),(2,-3)\rangle$. *Τώρα αν* $\lambda_1(1,-1)+\lambda_2(2,-3)=(0,0)$ *τότε*

   $$\begin{array}{r}\lambda_1+2\lambda_2=0\\ -\lambda_1-3\lambda_2=0\end{array}$$

   άρα $\lambda_1=\lambda_2=0$. *Συνεπώς τα* $(1,-1),(2,-3)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

   Παρατηρούμε ότι και οι τρείς βάσεις του $\mathbb{R}^2$ *που βρήκαμε δηλαδή οι*

   $\{(1,0),(0,1)\},\{(1,1),(1,-1)\},\{(1,-1),(2,-3)\}$ *έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.*

   Αργότερα θα δείξουμε ότι αν μία βάση ενός διανυσματικού χώρου V *έχει* ν *στοιχεία, τότε και κάθε άλλη βάση του* V *έχει* ν *στοιχεία.*

3. *Έστω τα στοιχεία*

   $$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},E_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

   $$E_{21}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},E_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

   του $\mathbb{R}^{2\times3}$.

   Αν $A=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times3}$ *τότε*

   $$A=\alpha_{11}E_{11}+\alpha_{12}E_{12}+\alpha_{13}E_{13}+\alpha_{21}E_{21}+\alpha_{22}E_{22}+\alpha_{23}E_{23}$$

   Άρα $\mathbb{R}^{2\times3}=\langle E_{11},E_{12},E_{13},E_{21},E_{22},E_{23}\rangle$.

   Επιπλέον εύκολα βλέπουμε ότι τα $E_{11},E_{12},E_{13},E_{21},E_{22},E_{23}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

   Άρα το σύνολο $\{E_{11},E_{12},E_{13},E_{21},E_{22},E_{23}\}$ *είναι μία βάση του* $\mathbb{R}^{2\times3}$. *Συνήθως δε λέγεται η κανονική βάση του* $\mathbb{R}^{2\times3}$.

   Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι το υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\mu\times\nu}$

   $$\mathcal{E}=\left\{E_{pq}\in\mathbb{R}^{\mu\times\nu}\mid E_{pq}=(\epsilon_{ij})=\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{αν } i=p,j=q\\ 0 & \text{διαφορετικά}\end{array}\right.\right\}$$

   είναι μία βάση του $\mathbb{R}^{\mu\times\nu}$. *Συνήθως δε λέγεται* **η κανονική βάση του** $\mathbb{R}^{\mu\times\nu}$.

4. *Στο παράδειγμα 4 του 3.3.5 βλέπουμε ότι το σύνολο*

$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 1}$ *είναι μία βάση του χώρου λύσεων του συστήματος.*

Στο παράδειγμα 5 του 3.3.5 βλέπουμε ότι το σύνολο

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{5\times 1}$$

είναι μία βάση του χώρου λύσεων του συστήματος.

5. *Έστω* $\mathbb{R}[x]$ *ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές και έστω το υποσύνολο* $B = \{1, x, x^2, \cdots, x^\nu, \cdots,\}$ *του* $\mathbb{R}[x]$

   Είναι σαφές ότι $\langle B\rangle = \mathbb{R}[x]$.

   Επιπλέον το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο αφού για κάθε φυσικό αριθμό ν *η σχέση* $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_\nu x^\nu = 0, \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq \nu$ *συνεπάγεται ότι* $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_\nu = 0$.

   Συνεπώς ο $\mathbb{R}[x]$ *είναι ένας διανυσματικός χώρος που έχει μία βάση με άπειρο πλήθος στοιχείων.*

Παραδείγματα 3.4.12

1. *Έστω* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$

   Θα βρούμε μία βάση για τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^{1\times 5}$ *που παράγεται από τις γραμμές του A.*

   Μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 3r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = B$$

   Από το πόρισμα 3.3.10 έπεται ότι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^{1\times 5}$ *που παράγεται από τις γραμμές του A ισούται με τον υπόχωρο του* $\mathbb{R}^{1\times 5}$ *που παράγεται από τις γραμμές του B. Άρα οι γραμμές του B είναι ένα σύνολο γεννητόρων του υποχώρου του* $\mathbb{R}^{1\times 5}$ *που παράγεται από τις γραμμές του A. Από την παρατήρηση 3.4.5 έπεται ότι οι γραμμές του B είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του* $\mathbb{R}^{1\times 5}$. *Άρα οι γραμμές του B είναι μία βάση του υποχώρου του* $\mathbb{R}^{1\times 5}$ *που παράγεται από τις γραμμές του A, δηλαδή το* $\{(1\,2\,1\,2\,1), (0\,0\,2\,4\,2), (0\,0\,0\,-3\,2)\}$ *είναι μία βάση του υπόχωρου* $\langle(1\,2\,1\,2\,1), (2\,4\,4\,8\,4), (3\,6\,5\,7\,7)\rangle$ *του* $\mathbb{R}^{1\times 5}$.

2. *Έστω* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$

Θα βρούμε μία βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^{1\times 4}$ που παράγεται από τις γραμμές του A.

Μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 + r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Άρα από το πόρισμα 3.3.10 και την παρατήρηση 3.4.5 έπεται ότι το σύνολο $\{(1\,3\,3\,2), (0\,0\,3\,1)\}$ *είναι μία βάση του υπόχωρου*

$\langle (1\,3\,3\,2), (2\,6\,9\,5), (-1\;-3\,3\,0) \rangle$ *του* $\mathbb{R}^{1\times 4}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετασθεί ποιά από τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Γι αυτά που είναι γραμμικά εξαρτημένα να βρεθεί ένα στοιχείο που να είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

   (i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

   (ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

2. Να εξετασθεί ποιά από τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}_3[x]$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Γι αυτά που είναι γραμμικά εξαρτημένα να βρεθεί ένα στοιχείο που να είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

   (i) $\{x, 3 + x^3, x + 2x^2\}$

   (ii) $\{-2 + x, 3 + x, 1 + x^2, 5 - x + 4x^2\}$

   (iii) $\{3 - 2x + 4x^2 + x^3, 4 - x + 6x^2 + x^3, 7 - 8x + 8x^2 + 3x^3\}$

3. Να δειχθεί ότι τα στοιχεία $f(x) = e^{2x}, g(x) = x^2, h(x) = x$ του διανυσματικού χώρου των πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

4. Έστω w_1, w_2, w_3 γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου επί του $\mathbb{F}$. Να δειχθεί ότι τα στοιχεία

   $w_1 + w_2, w_1 - w_2, w_1 - 2w_2 + w_3$ του V είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

5. (i) Να δειχθεί ότι τα στοιχεία $(1 + i, 2i), (1, 1 + i)$ του πραγματικού διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

   (ii) Να δειχθεί ότι τα στοιχεία $(1 + i, 2i), (1, 1 + i)$ του μιγαδικού διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}^2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

6. Να δειχθεί ότι αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ τότε το $\{\alpha\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{R}$.

7. Δίνεται το σύνολο $B = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (0, \beta_2, \beta_3), (0, 0, \gamma_3)\}$ με $B \subseteq \mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι το B είναι μία βάση του $\mathbb{R}^3$ αν και μόνο αν $\alpha_1\beta_2\gamma_3 \neq 0$.

8. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^{3\times3}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^{3\times3}$ και να βρείτε μία βάση τους:

   (i) $V_1 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid A \quad \text{διαγώνιος}\ \}$

   (ii) $V_2 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid A \quad \text{συμμετρικός}\ \}$

   (iii) $V_3 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33}\}$

9. Να βρεθεί μία βάση του χώρου των λύσεων του ακολούθου γραμμικού συστήματος με πραγματικούς συντελεστές:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 - 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 7x_4 - 3x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 - 7x_4 - 8x_5 &= 0 \end{aligned}$$

10. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ και $\Delta = \{\Gamma \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid A\Gamma = \Gamma A\}$. να δειχθεί ότι ο Δ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^{3\times3}$ και να βρεθεί μία βάση του.

11. Έστω $\{A_1, A_2, \cdots, A_\mu\}$ ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ και έστω ότι υπάρχει $X \in \mathbb{R}^{\nu\times1}$ με $X \neq 0_{\mathbb{R}^{\nu\times1}}$ και $A_1X = A_2X = \cdots = A_\mu X = 0_{\mathbb{R}^{\nu\times1}}$. Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{A_1, A_2, \cdots, A_\mu\}$ δεν είναι μία βάση του $\mathbb{R}^{\nu\times\nu}$.

12. (i) Να βρεθεί μία βάση για τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^{1\times6}$ που παράγεται από τις γραμμές του $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -8 & -5 & 8 \end{pmatrix}$

    (ii) Να βρεθεί μία βάση για τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^{1\times4}$ που παράγεται από τις γραμμές του $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

13. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και B ένα υποσύνολο του V. Να δειχθεί ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

    (i) Το σύνολο B είναι μία βάση του V.

    (ii) Κάθε στοιχείο του V γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του B.

14. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του F και A, B δύο υποσύνολα του V με $B \subseteq A$.

    Να δειχθεί

    (i) Αν το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε και το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

    (ii) Αν το B είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε και το A είναι γραμμικά εξαρτημένο.

3.5 ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Το ακόλουθο θεώρημα είναι ένα κεντρικό θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας.

Απ' αυτό έπεται ότι• κάθε διανυσματικός χώρος πεπερασμένα παραγόμενος έχει μία βάση. Επιπλέον, απ' αυτό έπεται ότι αν ένας διανυσματικός χώρος έχει μία πεπερασμένη βάση με ν στοιχεία, τότε και κάθε άλλη βάση του είναι πεπερασμένη και έχει ν στοιχεία.

Θεώρημα 3.5.1 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και ν, μ φυσικοί αριθμοί. Αν ν γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του V ανήκουν σε ένα υπόχωρο του V που παράγεται από μ στοιχεία, τότε $\nu \leq \mu$.*

Απόδειξη. Με επαγωγή ως πρός ν

Για $\nu = 1$. Έστω α_1 ένα γραμμικά ανεξάρτητο στοιχείο του V και έστω ότι $\alpha_1 \in W$ όπου W ένας υπόχωρος του V που παράγεται από μ στοιχεία. Επειδή το α_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητο έπεται ότι $\alpha_1 \neq 0_V$, άρα $W \neq \{0_V\}$ συνεπώς $\mu \geq 1$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\nu > 1$ και ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε γραμμικά ανεξάρτητα $\nu - 1$ στοιχεία του V.

Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του V και έστω ότι

$\alpha_i \in W, 1 \leq i \leq \nu$, όπου W ένας υπόχωρος του V που παράγεται από μ στοιχεία, $W = \langle \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu \rangle$.

Θα δείξουμε ότι $\nu \leq \mu$.

Επειδή $\alpha_i \in W = \langle \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu \rangle, 1 \leq i \leq \nu$ έχουμε ότι

$$(\star) \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 = \lambda_{11}\beta_1 + \lambda_{12}\beta_2 + \cdots + \lambda_{1\mu}\beta_\mu \\ \alpha_2 = \lambda_{21}\beta_1 + \lambda_{22}\beta_2 + \cdots + \lambda_{2\mu}\beta_\mu \\ \cdots \quad \cdots \\ \alpha_\nu = \lambda_{\nu 1}\beta_1 + \lambda_{\nu 2}\beta_2 + \cdots + \lambda_{\nu\mu}\beta_\mu \end{array}$$

όπου $\lambda_{ij} \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq \nu, 1 \leq j \leq \mu$.

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

1) $\lambda_{i\mu} = 0_{\mathbb{F}}, 1 \leq i \leq \nu$. Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι αν K είναι ο υπόχωρος του V που παράγεται από τα $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{\mu-1}, K = \langle \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{\mu-1} \rangle$, τότε $\alpha_i \in K, 1 \leq i \leq \nu$

Τα $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\nu-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και

$\alpha_i \in K = \langle \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{\mu-1} \rangle, 1 \leq i \leq \nu - 1$ άρα από την υπόθεση επαγωγής έπεται ότι $\nu - 1 \leq \mu - 1$

άρα $\nu \leq \mu$.

2) $\lambda_{i\mu} \neq 0_{\mathbb{F}}$ για τουλάχιστον ένα $i, 1 \leq i \leq \nu$. Μπορούμε, αλλάζοντας τη σειρά των εξισώσεων, αν χρειάζεται, να υποθέσουμε ότι $i = \nu$. Έτσι $\lambda_{\nu\mu} \neq 0_{\mathbb{F}}$. Θεωρούμε τώρα τα στοιχεία

$$(\star\star) \qquad \gamma_i = \alpha_i - (\lambda_{i\mu}/\lambda_{\nu\mu})\alpha_\nu, \quad 1 \leq i \leq \nu - 1$$

Θα αποδείξουμε ότι τα $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{\nu-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό

$$\xi_1\gamma_1 + \xi_2\gamma_2 + \cdots + \xi_{\nu-1}\gamma_{\nu-1} = 0_{\mathbb{F}}, \;\; \mu\epsilon \;\; \xi_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq \nu - 1$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση κάθε γ_i με $\alpha_i - (\lambda_{i\mu}/\lambda_{\nu\mu})\alpha_\nu$ έχουμε

$\xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \cdots + \xi_{\nu-1}\alpha_{\nu-1}$

$-\left((\xi_1\lambda_{1\mu}/\lambda_{\nu\mu}) + (\xi_2\lambda_{2\mu}/\lambda_{\nu\mu}) + \cdots + (\xi_{\nu-1}\lambda_{\nu-1\mu}/\lambda_{\nu\mu})\right)\alpha_\nu = 0_{\mathbb{F}}.$

Από την υπόθεση έχουμε ότι τα $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_{\nu-1} = 0_{\mathbb{F}}$. Άρα τα $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{\nu-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παρατηρούμε ότι από την $(\star)$ και από την $(\star\star)$ έχουμε:

$$\gamma_1 = \alpha_1 - (\lambda_{1\mu}/\lambda_{\nu\mu})\alpha_\nu = \lambda_{11}\beta_1 + \lambda_{12}\beta_2 + \cdots + \lambda_{1\mu}\beta_\mu - (\lambda_{1\mu}/\lambda_{\nu\mu})\alpha_\nu =$$
$$\lambda_{11}\beta_1 + \lambda_{12}\beta_2 + \cdots + \lambda_{1\mu}\beta_\mu - (\lambda_{1\mu}/\lambda_{\nu\mu})\left(\lambda_{\nu1}\beta_1 + \lambda_{\nu2}\beta_2 + \cdots + \lambda_{\nu\mu}\beta_\mu\right) =$$

Άρα $\gamma_1 \in \langle \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{\mu-1} \rangle$ και γενικά

$$\gamma_i = \alpha_i - (\lambda_{i\mu}/\lambda_{\nu\mu})\alpha_\nu = \lambda_{i1}\beta_1 + \lambda_{i2}\beta_2 + \cdots + \lambda_{i\mu}\beta_\mu - (\lambda_{i\mu}/\lambda_{\nu\mu})\alpha_\nu =$$
$$\lambda_{i1}\beta_1 + \lambda_{i2}\beta_2 + \cdots + \lambda_{i\mu}\beta_\mu - (\lambda_{i\mu}/\lambda_{\nu\mu})\left(\lambda_{\nu1}\beta_1 + \lambda_{\nu2}\beta_2 + \cdots + \lambda_{\nu\mu}\beta_\mu\right) =$$
$$= \left(\lambda_{i1} - \frac{\lambda_{i\mu}}{\lambda_{\nu\mu}}\lambda_{\nu1}\right)\beta_1 + \cdots + \left(\lambda_{i\mu-1} - \frac{\lambda_{i\mu}}{\lambda_{\nu\mu}}\lambda_{\nu\mu-1}\right)\beta_{\mu-1}, \quad 1 \leq i \leq \mu - 1$$

Συνεπώς $\gamma_i \in \langle \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{\mu-1} \rangle, 1 \leq i \leq \nu - 1$.

Άρα τα $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{\nu-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ανήκουν στον υπόχωρο του V που παράγεται από τα $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{\mu-1}$. Από την υπόθεση επαγωγής έχουμε ότι $\nu - 1 \leq \mu - 1$ άρα $\nu \leq \mu$.

Ένα άμεσο πόρισμα του θεωρήματος 3.5.1 είναι το ακόλουθο:

Πόρισμα 3.5.2 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$, ο οποίος παράγεται από μ στοιχεία, δηλαδή $V = \langle \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu \rangle$. Τότε κάθε υποσύνολο του V, το οποίο περιέχει τουλάχιστον μ+1 στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

Πόρισμα 3.5.3 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και ν ένας φυσικός αριθμός. Αν ο V έχει μία πεπερασμένη βάση με ν στοιχεία, τότε κάθε βάση του V είναι πεπερασμένη και έχει ν στοιχεία.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_1, x_2, \cdots, x_\nu\}$ μία βάση του V. Τότε $V = \langle x_1, x_2, \cdots, x_\nu\rangle$. Αν Γ είναι μία βάση του V με άπειρο πλήθος στοιχείων, τότε υπάρχουν υποσύνολα του Γ με πλήθος στοιχείων μεγαλύτερο από το ν. Αλλά κάθε υποσύνολο του Γ είναι γραμμικά ανεξάρτητο επειδή το Γ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Συνεπώς υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του V με πλήθος στοιχείων μεγαλύτερο από το ν, άτοπο από το πόρισμα 3.5.2 . Άρα κάθε βάση του V είναι πεπερασμένη. Έστω $\{y_1, y_2, \cdots, y_\lambda\}$ μία βάση του V. Επειδή $V = \langle x_1, x_2, \cdots, x_\nu\rangle$ και $y_1, y_2, \cdots, y_\lambda$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα από το θεώρημα 3.5.1 έπεται ότι $\lambda \leq \nu$. Ανάλογα επειδή $V = \langle y_1, y_2, \cdots, y_\lambda\rangle$ και τα $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι $\nu \leq \lambda$. Άρα $\lambda = \nu$.

ΣΧΟΛΙΟ. Στην περίπτωση που ένας διανυσματικός χώρος V έχει μία βάση με πλήθος στοιχείων 0, τότε $V =< \emptyset >= \{0_V\}$.

Πόρισμα 3.5.4 *Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και B_0 ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολό του. Τότε υπάρχει μία πεπερασμένη βάση B του V με $B_0 \subseteq B$*

Απόδειξη. Η περίπτωση που ο χώρος έχει μόνο ένα στοιχείο, το μηδενικό, είναι απλή και παραλείπεται. Έστω ότι $V \neq \{\mathbb{O}_V\}$ και έστω $V = \langle \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\rho\rangle$ και $B_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\lambda\}$. Από το θεώρημα 3.5.1 έχουμε ότι $\lambda \leq \rho$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{A}$ όλων των υποσυνόλων του χώρου V, τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα και περιέχουν το B_0, δηλαδή $\mathcal{A} = \{K \subseteq V \mid B_0 \subseteq K$ και K γραμμικά ανεξάρτητο $\}$. Το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι μη κενό διότι περιέχει από τον ορισμό του το B_0. Επίσης από το θεώρημα 3.5.1, έχουμε ότι κάθε σύνολο K, που ανήκει στο $\mathcal{A}$, έχει το πολύ ρ στοιχεία, δηλαδή $\mid K \mid \leq \rho$. Άρα υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $\mid K \mid \leq \mid B \mid$ για κάθε $K \in \mathcal{A}$. Έστω ότι $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\lambda, \gamma_{\lambda+1}, \gamma_{\lambda+2}, \cdots, \gamma_\xi\}$.

Θα δείξουμε ότι το σύνολο B είναι μία βάση του χώρου V. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει το χώρο. Το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο από τον ορισμό του. Θα δείξουμε ότι $\langle B\rangle = V$. Έστω ω ένα στοιχείο του V με $\omega \notin B$. Τότε ένα από τα ακόλουθα ισχύει:

1. Το σύνολο $B \cup \{\omega\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αυτό είναι άτοπο από τον ορισμό του B , διότι τότε θα υπήρχε ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, που ανήκει στο $\mathcal{A}$ και έχει περισσότερα στοιχεία από το B.

2. Το σύνολο $B \cup \{\omega\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Έτσι υπάρχουν

   $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\lambda, \delta_{\lambda+1}, \cdots, \delta_\xi, \delta_{\xi+1} \in \mathbb{F}$ με

   $$\delta_1\alpha_1 + \delta_2\alpha_2 + \cdots + \delta_\lambda\alpha_\lambda + \delta_{\lambda+1}\alpha_{\lambda+1} + \cdots + \delta_\xi\alpha_\xi + \delta_{\xi+1}\omega = 0_{\mathbb{F}}$$

   και ένα τουλάχιστον από τα $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\lambda, \delta_{\lambda+1}, \cdots, \delta_\xi, \delta_{\xi+1}$, είναι διαφορετικό από το $0_{\mathbb{F}}$. Λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας του συνόλου B, έχουμε ότι αν $\delta_{\xi+1} = 0_{\mathbb{F}}$, τότε και τα υπόλοιπα $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\xi$ θα είναι ίσα με $0_{\mathbb{F}}$, άτοπο. Άρα $\delta_{\xi+1} \neq 0_{\mathbb{F}}$. Το τελευταίο μας δίνει τη δυνατότητα να λύσουμε ως πρός ω και να βρούμε ότι το ω ανήκει στον υπόχωρο $\langle B\rangle$. Συνεπώς το B είναι μία βάση του V.

Θεώρημα 3.5.5 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένα παραγόμενος επί του $\mathbb{F}$. Τότε ο χώρος V έχει τουλάχιστον μία πεπερασμένη βάση.*

Απόδειξη. Αν $V \neq \{0_V\}$ τότε υπάρχει $\alpha \in V$ με $\alpha \neq 0_V$. Άρα το α είναι γραμμικά ανεξάρτητο και από το πόρισμα 3.5.4 υπάρχει μία πεπερασένη βάση B του V με $\alpha \in B$.

Αν $V = \{0_V\}$ τότε θεωρούμε ως βάση του V το κενό σύνολο.

Παρατήρηση 3.5.6 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένα παραγόμενος επί του $\mathbb{F}$ με $V \neq \{0_V\}$ και $K = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ ένα σύνολο γεννητόρων του V, $V = \langle K \rangle$. Ένας τρόπος να* **βρούμε** *μία βάση του V, που μάλιστα είναι υποσύνολο του K, είναι ο ακόλουθος:*

Αν το σύνολο K είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε θα είναι μία βάση, διότι έχουμε την υπόθεση ότι παράγει το χώρο.

Αν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε κάποιο διάνυσμα του συνόλου K θα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$\alpha_\nu = \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \cdots + \xi_{\nu-1}\alpha_{\nu-1}, \xi_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq \nu - 1.$

Στήν περίπτωση αυτή έχουμε ότι $V = \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\nu-1} \rangle$. Τώρα αν το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\nu-1}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο θα είναι και βάση, ενώ αν είναι γραμμικά εξαρτημένο, μπορούμε να αφαιρέσουμε ένα ακόμη στοιχείο και να έχουμε και πάλι ένα σύνολο γεννητόρων.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο θα φθάσουμε μετά από $\nu - 1$ το πολύ βήματα σε ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του K, το οποίο προφανώς αποτελεί μία βάση του χώρου.

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ πεπερασμένα παραγόμενος. Τότε από το θεώρημα 3.5.5 έπεται ότι ο V έχει τουλάχιστον μία πεπερασμένη βάση. Από το πόρισμα 3.5.3 προκύπτει ότι κάθε βάση του V είναι πεπερασμένη και ότι κάθε δύο βάσεις του V έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Άρα το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης του V δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη βάση αλλά από το χώρο V. Συνεπώς μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.5.7 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$, πεπερασμένα παραγόμενος. Ο αριθμός των στοιχείων μιας οποισδήποτε βάσης του , λέγεται* **διάσταση** *του χώρου και συμβολίζεται με $dim_{\mathbb{F}}V$.*

Παράδειγμα 3.5.8 *Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^\nu$. Θεωρούμε τα παρακάτω διανύσματα:*

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_\nu = (0, 0, \cdots, 0, 1)$$

Τα διανύσματα αυτά αποτελούν ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο και παράγουν τον χώρο. Έτσι έχουμε ότι $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^\nu = \nu$.

Η παραπάνω βάση λέγεται, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, *κανονική βάση* του χώρου $\mathbb{R}^\nu$.

Παράδειγμα 3.5.9 *Έστω $\mathbb{R}_\nu[x]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ ν. Θεωρούμε τα παρακάτω πολυώνυμα:*

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, \cdots, f_\nu(x) = x^\nu.$$

Τα πολυώνυμα αυτά αποτελούν ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο και παράγουν τον χώρο. Έτσι έχουμε ότι $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_\nu[x] = \nu + 1$

Παράδειγμα 3.5.10 *Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ως διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{R}$. Μία βάση του χώρου αυτού είναι το σύνολο $\{1, i\}$. Έτσι η διάσταση του χώρου αυτού είναι 2, δηλαδή $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$.*

Αν το παραπάνω σύνολο το θεωρήσουμε ως διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{C}$, τότε μία βάση του χώρου αυτού είναι το σύνολο { 1 } και έτσι η διάσταση του χώρου αυτού είναι1, δηλαδή $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$.

Αξίζει εδώ να παρατηρήσουμε ότι το παραπάνω παράδειγμα δείχνει ότι η διάσταση δεν παραμένει αναγκαστικά η ίδια, αν το σύνολο συντελεστων $\mathbb{F}$ αλλάζει.

Παρατήρηση 3.5.11 *Είδαμε ότι υπάρχουν διανυσματικοί χώροι που δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενοι (3.4.11 Παράδειγμα 5 .) Να σημειώσουμε ότι και αυτοί οι χώροι έχουν βάση και ότι ορίζεται και γι αυτούς διάσταση του χώρου. Αυτά τα αποτελέσματα δεν θα τα αποδείξουμε εδώ επειδή απαιτείται πιο προχωρημένη θεωρία συνόλων από αυτή που ξέρουμε.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \alpha_{12} = \alpha_{21} \right\}$

   (i) Να δειχθεί ότι $K \leq \mathbb{R}^{2\times 2}$

   (ii) Να βρεθεί μία βάση του Κ.

   (iii) Να βρεθεί η $dim_{\mathbb{R}}K$

2. Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του χώρου λύσεων των ακολούθων ομογενών συστημάτων με πραγματικούς συντελεστές:

   $$(i)\quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{array}$$

   $$(ii)\quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{array}$$

3. Έστω $B = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = 0\}$.

   (i) Να δειχθεί ότι $B \leq \mathbb{R}_3[x]$

(ii) Να βρεθεί μία βάση του Β και η $dim_{\mathbb{R}}B$.

4. Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του υπόχωρου του $\mathbb{C}^3$ που παράγεται από το σύνολο

   $\{(3-i, 2+2i, 4), (2, 2+4i, 3), (1-i, -2i, -1)\}$

5. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ πεπερασμένα παραγόμενος.

   Να δειχθεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες για ένα υποσύνολο S του V.

   (i) Το S είναι μία βάση του V.

   (ii) Αν I είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V και $S \subseteq I$ τότε $S = I$.

   (iii) Αν Κ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του V και $K \subseteq S$ τότε $K = S$.

3.6 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΒΑΣΕΩΝ

Πρόταση 3.6.1 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και ν ένας φυσικός αριθμός. Τότε κάθε δύο από τις παρακάτω προτάσεις συνεπάγονται την τρίτη*

1. *Η διάσταση του χώρου V είναι ν.*

2. *Το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ παράγει το χώρο.*

3. *Το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V.*

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύουν τα 1. και 2. και ότι το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Τότε ένα από τα διανύσματα του συνόλου αυτού είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Έτσι ο χώρος παράγεται από το πολύ $\nu - 1$ διανύσματα. Από το 3.5.1 η διάσταση του χώρου είναι το πολύ $\nu - 1$, άτοπο.

Έστω ότι ισχύουν τα 1. και 3. Από το πόρισμα 3.5.4 υπάρχει μία βάση Β του V με $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\} \subseteq B$. Αλλά $\mid B \mid = \nu$, αφού $dim_{\mathbb{F}}V = \nu$.

Άρα $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ άρα ισχύει η 2.

Έστω ότι ισχύουν τα 2. και 3. Τότε από τον ορισμό, το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ είναι μία βάση του χώρου, αρα η διάσταση του χώρου είναι ν.

Παράδειγμα 3.6.2 *Είναι γνωστο ότι ο πραγματικός διανυσματικός χώρος των τριωνύμων $\mathbb{R}_2[x]$ έχει διάσταση 3. Για παράδειγμα το σύνολο $\{f_1(x) = x^2, f_2(x) = x, f_3(x) = 1\}$ είναι μία βάση του. Θεωρούμε το σύνολο $\{g_1(x) = x^2 + 5x + 6, g_2(x) = x^2 + 1, g_3(x) = x\}$. Θεωρούμε επίσης ένα γραμμικό συνδυασμό τους ίσο με μηδέν, δηλαδή*

$$\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = 0, \;\; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

Τότε έχουμε ότι $\lambda_1 + \lambda_2 = 0, 5\lambda_1 + \lambda_3 = 0, 6\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ και εύκολα καταλήγουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Έτσι το σύνολο $\{g_1(x) = x^2 + 5x + 6, g_2(x) = x^2 + 1, g_3(x) = x\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι το σύνολο αυτό παράγει τον χώρο $\mathbb{R}_2[x]$.

Πρόταση 3.6.3 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί $\mathbb{F}$ πεπερασμένης διάστασης και A ένας υπόχωρός του. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. $dim_{\mathbb{F}}A \leq dim_{\mathbb{F}}V$.
2. $A = V$ *αν και μόνο αν* $dim_{\mathbb{F}}A = dim_{\mathbb{F}}V$.

Απόδειξη.
1. Έστω B_0 μία βάση του A. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5.4 υπάρχει μία βάση B του χώρου V με $B_0 \subseteq B$. Άρα $dim_{\mathbb{F}}A \leq dim_{\mathbb{F}}V$.
2. Αν $A = V$ τότε είναι προφανές ότι $dim_{\mathbb{F}}A = dim_{\mathbb{F}}V$.

Έστω ότι $dim_{\mathbb{F}}A = dim_{\mathbb{F}}V$. Θεωρούμε μία βάση B_0 του A. Από το πόρισμα 3.5.4 έπεται ότι υπάρχει μία βάση B του V με $B_0 \subseteq B$. Αλλά οι B_0, B έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, ν. Άρα $B_0 = B$ και συνεπώς $A = V$

Το ακόλουθο θεώρημα μας δείχνει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της διάστασης του αθροίσματος δύο υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου και του αθροίσματος των διαστάσεων των υποχώρων.

Θεώρημα 3.6.4 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και A, B δύο υπόχωροί του πεπερασμένης διάστασης. Τότε*

1. *Ο υπόχωρος A+B έχει πεπερασμένη διάσταση*
2. $dim_{\mathbb{F}}(A+B) = dim_{\mathbb{F}}A + dim_{\mathbb{F}}B - dim_{\mathbb{F}}(A \cap B)$.

Απόδειξη. Επειδή η τομή $A \cap B$ είναι ένας υπόχωρος του A και ο A είναι πεπερασμένης διάστασης, θα έχουμε από το 3.6.3 ότι και ο $A \cap B$ έχει πεπερασμένη διάσταση. Θεωρούμε, λοιπόν, μία βάση $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ του $A \cap B$. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5.4 η βάση αυτή επεκτείνεται σε μία βάση $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu\}$ του A και σε μία βάση $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\xi\}$ του B. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\xi\}$ είναι μία βάση του A+B. Έστω ω ένα στοιχείο του A+B. Το στοιχείο αυτό γράφεται ως άθροισμα

$\omega = \alpha + \beta, \alpha \in A, \beta \in B$.

Έχουμε τα εξής :

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_\nu\alpha_\nu + \delta_1\beta_1 + \delta_2\beta_2 + \cdots + \delta_\mu\beta_\mu \\ \beta &= \epsilon_1\alpha_1 + \epsilon_2\alpha_2 + \cdots + \epsilon_\nu\alpha_\nu + \zeta_1\gamma_1 + \zeta_2\gamma_2 + \cdots + \zeta_{xi}\gamma_\xi \end{aligned}$$

με $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\mu, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_\nu, \zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_\xi \in \mathbb{F}$

Προσθέτοντας έχουμε

$$\begin{gathered} \omega = \alpha + \beta = (\lambda_1 + \epsilon_1)\alpha_1 + (\lambda_2 + \epsilon_2)\alpha_2 + \cdots + (\lambda_\nu + \epsilon_\nu)\alpha_\nu + \\ \delta_1\beta_1 + \delta_2\beta_2 + \cdots + \delta_\mu\beta_\mu + \zeta_1\gamma_1 + \zeta_2\gamma_2 + \cdots + \zeta_\xi\gamma_\xi \end{gathered}$$

Έτσι το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\xi\}$ παράγει τον A+B, δηλαδή A+B= $\langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\xi \rangle$. Μένει να αποδείξουμε τη γραμμική ανεξαρτησία του συνόλου αυτού. Θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό ίσο με 0_V τον

$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_\nu\alpha_\nu + \delta_1\beta_1 + \delta_2\beta_2 + \cdots + \delta_\mu\beta_\mu + \zeta_1\gamma_1 + \zeta_2\gamma_2 + \cdots + \zeta_\xi\gamma_\xi = 0_V$. Από τη σχέση αυτή έχουμε

$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_\nu\alpha_\nu + \delta_1\beta_1 + \delta_2\beta_2 + \cdots + \delta_\mu\beta_\mu = -\zeta_1\gamma_1 - \zeta_2\gamma_2 - \cdots - \zeta_\xi\gamma_\xi = x$

Το στοιχείο x, όπως φαίνεται ανήκει και στον υπόχωρο Α και στον υπόχωρο Β, άρα και στην τομή $A \cap B$. Έτσι έχουμε ότι:

$x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_\nu\alpha_\nu + \delta_1\beta_1 + \delta_2\beta_2 + \cdots + \delta_\mu\beta_\mu = -\zeta_1\gamma_1 - \zeta_2\gamma_2 - \cdots - \zeta_\xi\gamma_\xi = \kappa_1\alpha_1 + \kappa_2\alpha_2 + \cdots + \kappa_\nu\alpha_\nu$, άρα $-\zeta_1\gamma_1 - \zeta_2\gamma_2 - \cdots - \zeta_\xi\gamma_\xi = \kappa_1\alpha_1 + \kappa_2\alpha_2 + \cdots + \kappa_\nu\alpha_\nu$, άρα

$\zeta_1\gamma_1 + \zeta_2\gamma_2 + \cdots + \zeta_\xi\gamma_\xi + \kappa_1\alpha_1 + \kappa_2\alpha_2 + \cdots + \kappa_\nu\alpha_\nu = 0_V$.

Όμως το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\xi\}$ ειναι μία βάση του υπόχωρου Β, άρα $\zeta_1 = \zeta_2 = \cdots = \zeta_\xi = \kappa_1 = \kappa_2 = \cdots = \kappa_\nu = 0_{\mathbb{F}}$

Άρα δείξαμε ότι το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\xi\}$ είναι μία βάση του Α+Β. Είναι τώρα φανερό ότι ισχύει

$dim_{\mathbb{F}}(A + B) = dim_{\mathbb{F}}A + dim_{\mathbb{F}}B - dim_{\mathbb{F}}(A \cap B)$.

Συνεπώς δείξαμε τα 1. και 2.

Παράδειγμα 3.6.5 *Έστω A και B υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ με $A =< (1, 2, 0), (2, 3, 1) >$ και $B =< (0, 0, 1), (3, 0, 1) >$. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα διανύσματα (1,2,0), (2,3,1) είναι γραμμικά εξαρτημένα. Το ίδιο και τα διανύσματα (0,0,1), (3,0,1) . Έτσι $dim_{\mathbb{R}}A = 2$ και $dim_{\mathbb{R}}B = 2$ Παρατηρούμε επίσης ότι το διάνυσμα (0,0,1) του B δεν ανήκει στον υπόχωρο A, διότι αν ανήκε θα υπήρχαν $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ με $(0, 0, 1) = \mu_1(1, 2, 0) + \mu_2(2, 3, 1)$. Καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα*

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_1 + 2\mu_2 \\ 0 &= 2\mu_1 + 3\mu_2 \\ 1 &= \mu_2 \end{aligned}$$

το οποίο εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι αδύνατο. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο υπόχωρος $A + B$ έχει διάσταση τουλάχιστον 3 και επειδή είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ θα έχουμε ότι $dim_{\mathbb{R}}(A + B) = 3$. Τελικά $A + B = \mathbb{R}^3$ από γνωστό θεώρημα. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $dim_{\mathbb{R}}(A \cap B) = 1$.

Θεώρημα 3.6.6 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu\}$ ένα σύνολο γεννητόρων του V. Αν $A_\rho = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\rho\}$, είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, τότε υπάρχει ένα υποσύνολο B_ρ του $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu\}$ με $\mu - \rho$ στοιχεία, έτσι ώστε $V = \langle B_\rho \cup A_\rho\rangle$.*

Επιπλέον αν το σύνολο $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu\}$ είναι μία βάση του V, τότε και το σύνολο $B_\rho \cup A_\rho$ είναι μία βάση του V .

Απόδειξη. Από το θεώρημα 3.5.1 έχουμε ότι $\rho \leq \mu$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο ρ. Για $\rho = 1$, έχουμε ότι $A_1 = \{\alpha_1\}$. Το A_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα $\alpha_1 \neq 0_V$. Επειδή ότι το σύνολο $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu\}$ παράγει το χώρο, θα υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\mu \in \mathbb{F}$ με

$$\alpha_1 = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \cdots + \lambda_\mu\beta_\mu$$

Αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_\mu = 0_{\mathbb{F}}$, τότε $\alpha_1 = 0_V$, άτοπο. Άρα κάποιος συντελεστής θα είναι διάφορος του μηδενός. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_1 \neq 0_{\mathbb{F}}$. Τότε μπορούμε να λύσουμε ως πρός β_1 και να έχουμε τη σχέση:

$$\beta_1 = (1/\lambda_1)\alpha_1 - (\lambda_2/\lambda_1)\beta_2 - \cdots - (\lambda_\mu/\lambda_1)\beta_\mu$$

και τελικά $V = \langle\{\alpha_1\} \cup \{\beta_2, \cdots, \beta_\mu\}\rangle = \langle A_1 \cup \{\beta_2, \cdots, \beta_\mu\}\rangle$. Έστω ότι $\rho > 1$ και υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για $\rho - 1$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για ρ.

Από υπόθεση επαγωγής έχουμε ότι υπάρχει $B_{\rho-1} \subseteq \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu\}$ με
$B_{\rho-1} = \{\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_{\mu-(\rho-1)}\}$ και
$V = \langle\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\rho-1}\} \cap \{\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_{\mu-(\rho-1)}\}\rangle$.

Άρα επειδή $\alpha_\rho \in V$ έχουμε
$\alpha_\rho = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_{\rho-1}\alpha_{\rho-1} + \sigma_1\beta'_1 + \sigma_2\beta'_2 + \cdots + \sigma_{\mu-(\rho-1)}\beta'_{\mu-(\rho-1)}$

Αν $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_{\mu-(\rho-1)} = 0$, τότε έπεται ότι τα $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\rho-1}, \alpha_\rho$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, άτοπο. Άρα υπάρχει $i \in \{1, 2, \cdots, \mu - (\rho - 1)\}$ με $\sigma_i \neq 0$.

Τότε μπορούμε να λύσουμε ως προς β'_i και έχουμε
$\beta'_i = (1/\sigma_i)\big(\alpha_\rho - \lambda - 1\alpha_1 - \cdots - \lambda_{\rho-1}\alpha_{\rho-1} - \sigma_1\beta'_1 - \cdots - \sigma_{i-1}\beta'_{i-1} - \sigma_{i+1}\beta'_{i+1} - \cdots - \sigma_{\mu-(\rho-1)}\beta'_{\mu-(\rho-1)}\big)$

Άρα $V = \langle\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\rho\} \cap \{\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_{\mu-(\rho-1)}\}\rangle$ και το θεώρημα αποδείχθηκε.

Αν $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu\}$ είναι μία βάση του V τότε από την πρόταση 3.6.1 έπεται ότι το σύνολο $B_\rho \cup A_\rho$ είναι μία βάση του V.

Παράδειγμα 3.6.7 *Να βρεθεί μία βάση του $\mathbb{R}^3$ που να περιέχει τα $x = (1, -1, 0)$ και $y = (0, 1, 1)$.*

Θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος.

Θεωρούμε μία βάση του $\mathbb{R}^3$, έστω την κανονική $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$.

Τότε $x = (1, -1, 0) = e_1 - e_2$ άρα $e_2 = e_1 - x$. Συνεπώς $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, x, e_2\rangle$.

Τώρα $y \in \langle e_1, x, e_2\rangle$ και $y = e_1 - x + e_3$, άρα $e_1 = y + x - e_3$. Άρα $\mathbb{R}^3 = \langle y, x, e_3\rangle$

Συνεπώς το $\{y, x, e_3\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει το x και το y.

Πρόταση 3.6.8 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_\mu\}$ μία βάση του V. Αν $K \subseteq B$ και $\Lambda = B \backslash K$ τότε $V = \langle K\rangle \oplus \langle\Lambda\rangle$*

Απόδειξη. Είναι άμεση από τους ορισμούς και αφήνεται σαν άσκηση.

Παρατήρηση 3.6.9 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ πεπερασμένα παραγόμενος και W ένας υπόχωρος του V. Η απόδειξη του θεωρήματος 3.6.6 μας δίνει ένα τρόπο να βρούμε ένα υπόχωρο Z του V, με $V = W \oplus Z$.*

Πράγματι έστω $\{v'_1, v'_2, \cdots, v'_\mu\}$ μία βάση του V και $\{w_1, w_2, \cdots, w_\rho\}$ μία βάση του W. Τότε από το θεώρημα 3.6.6 έπεται ότι μπορούμε να βρούμε μία βάση B του V με $\{w_1, w_2, \cdots, w_\rho\} \subseteq B$ και $B\backslash\{w_1, w_2, \cdots, w_\rho\} \subseteq \{v'_1, v'_2, \cdots, v'_\mu\}$.

Αν τώρα $Z = \langle B\backslash\{w_1, w_2, \cdots, w_\rho\}\rangle$, τότε από την πρόταση 3.6.8 έχουμε ότι $V = W \oplus Z$.

Παράδειγμα 3.6.10 *Έστω $x = (1, 0, -2) \in \mathbb{R}^3$ και $W = \langle x\rangle \leq \mathbb{R}^3$. Θα βρούμε ένα υπόχωρο Z του $\mathbb{R}^3$ με $W \oplus Z = \mathbb{R}^3$.*

Έστω e_1, e_2, e_3 η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Τότε

$$(\star) \qquad x = (1, 0, -2) = e_1 + 0e_2 - 2e_3$$

και επομένως $e_1 = x + 2e_3$ συνεπώς $\mathbb{R}^3 = \langle x, e_2, e_3\rangle$. Άρα αν $Z = \langle e_2, e_3\rangle$, τότε $\mathbb{R}^3 = \langle x\rangle \oplus \langle e_2, e_3\rangle = W \oplus Z$.

Παρατηρούμε ότι από την $(\star)$ *έπεται ότι* $e_3 = 1/2e_1 - 1/2x$ *άρα* $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, x\rangle$.
Συνεπώς αν $Z' = \langle e_1, e_2\rangle$ *τότε* $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, x\rangle = \langle x\rangle \oplus \langle e_1, e_2\rangle = W \oplus Z'$.
δηλαδή έχουμε ότι
$\mathbb{R}^3 = W \oplus Z = W \oplus Z'$
με $Z = \{(0, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \neq Z' = \{(\rho, \sigma, 0) \in \mathbb{R}^3, \rho, \sigma \in \mathbb{R}\}$.

Η ΣΤΗΛΗ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ διάστασης ν και έστω $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ μία βάση του.

Έστω τώρα $w \in V$. Τότε το w γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$

$$w = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_\nu\alpha_\nu$$

Επομένως δοθείσης της $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ σε κάθε $w \in V$ αντιστοιχεί ένας πίνακαςστήλη

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}.$$

Για να ορίζεται απεικόνιση, δηλαδή για να αντιστοιχεί ακριβώς ένας πίνακας στήλη στο w, θα πρέπει να θεωρήσουμε μία διατεταγμένη βάση του V, γιατί αν

$w = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_\nu\alpha_\nu = \lambda_2\alpha_2 + \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_\nu\alpha_\nu$ τότε μέσω της πρώτης γραφής του w παίρνουμε τον πίνακα-στήλη

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$$

και μέσω της δεύτερης γραφής του w τον πίνακα-στήλη

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$$

Ορισμός 3.6.11 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ διάστασης ν. Μία διατεταγμένη βάση του V, είναι μία διατεταγμένη ν-άδα στοιχείων του V, $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu)$ έτσι ώστε το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ να είναι μία βάση του V.*

Έστω τώρα V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ διάστασης ν και $\widehat{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu)$ μία διατεταγμένη βάση του.

Τότε ορίζεται μία απεικόνιση

$$[\ ]_{\widehat{\alpha}} : V \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1} \ \text{ με } \ w \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$$

όπου $w = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_\nu\alpha_\nu$

Ο πίνακας-στήλη $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$ λέγεται **η στήλη των συντελεστών** του w ως προς τη διατεταγμένη βάση $\widehat{\alpha}$ και συμβολίζεται με $[w]_{\widehat{\alpha}}$.

Παραδείγματα 3.6.12 *Έστω $w = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$.*
Θεωρούμε τις ακόλουθες διατεταγμένες βάσεις του $\mathbb{R}^3$
$\widehat{e} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ *και* $\widehat{\alpha} = ((1,1,1),(1,0,1),(0,-1,1))$
τότε $w = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1)$ *άρα*
$[w]_{\widehat{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Δηλαδή η στήλη των συντελεστών του w ως προς τη διατεταγμένη βάση $\widehat{e}$ είναι η* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Τώρα $w = 4(1,1,1) - 3(1,0,1) + 2(0,-1,1)$
άρα $[w]_{\widehat{\alpha}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Δηλαδή η στήλη των συντελεστών του w ως προς τη διατεταγμένη βάση $\widehat{\alpha}$ είναι η* $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (i) Να δειχθεί ότι τα $p(x) = 1 + x + x^2, q(x) = x - x^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}_3[x]$.

   (ii) Να βρεθεί μία βάση B του $\mathbb{R}_3[x]$ με $\{p(x), q(x)\} \subseteq B$.

2. Να βρεθούν δύο βάσεις B_1, B_2 του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ με
   $B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq B_i, i = 1,2$ και $B_1 \neq B_2$.

3. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$, έστω
   $A = \langle (1,0,2,-1), (-1,1,1,1) \rangle$ και

$B = \langle (-1,-3,0,1), (5,0,3,0,-1) \rangle$

Να βρεθεί η $dim_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.

4. Έστω K το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathbb{R}^4$

   $K = \{(3,2,2,1), (2,1,2,1), (2,2,1,3), (7,5,5,5)\}$

   Να βρεθεί μία βάση B_0 του $\langle K \rangle$ και μία βάση B του $\mathbb{R}^4$ με $B_0 \subseteq B$.

5. Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης ν και $\widehat{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu)$ μία διατεταγμένη βάση του.

   Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

   $$[\ \ ]_{\widehat{\alpha}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^{\nu \times 1} \ \text{ με } \ x \longmapsto [x]_{\widehat{\alpha}}$$

   είναι $1-1$ και επί.

6. (i) Έστω $B = \{p(x), q(x), \sigma(x), r(x)\}$ η βάση του $\mathbb{R}_3[x]$ που βρέθηκε στην άσκηση 1.
   Αν $A = \langle p(x), q(x) \rangle, B = \langle \sigma(x), r(x) \rangle$
   να δειχθεί ότι $\mathbb{R}_3[x] = A \oplus B$

   (ii) Έστω $B_1 = B_0 \cup \{\alpha\}$ και $B_2 = B_0 \cup \{\beta\}$
   οι βάσεις του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ που βρέθηκαν στην άσκηση 2.
   Αν $A = \langle \alpha \rangle$ και $B = \langle \beta \rangle$ να δειχθεί ότι
   $\mathbb{R}^{2\times 2} = \langle B_0 \rangle \oplus A = \langle B_0 \rangle \oplus B$

7. Έστω A,B υπόχωροι του $\mathbb{R}_6[x]$ με $dim_{\mathbb{R}}A = 4$ και $dim_{\mathbb{R}}B = 5$

   Να δειχθεί ότι $dim_{\mathbb{R}}(A \cap B) \geq 2$

   Να βρεθούν A_0, B_0 υπόχωροι του $\mathbb{R}_6[x]$ με $dim_{\mathbb{R}}A_0 = 4, dim_{\mathbb{R}}B_0 = 5$ και $dim_{\mathbb{R}}(A_0 \cap B_0) = 2$

8. Να βρεθούν διακεκριμένοι υπόχωροι Α,Β,Γ του $\mathbb{R}^3$ με

   $\mathbb{R}^3 = A \oplus B = A \oplus \Gamma$

9. Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ και $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ οι ακόλουθες διατεταγμένες βάσεις του:

   $\widehat{\alpha} = ((1,0,0), (1,1,1), (0,-1,1))$ και $\widehat{\beta} = ((1,1,1), (0,-2,-1), (0,0,-1))$

   Αν $x = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ να βρεθούν οι $[x]_{\widehat{\alpha}}$ και $[x]_{\widehat{\beta}}$

10. Έστω W ο υπόχωρος του $\mathbb{R}_3[x]$ που παράγεται από τα $1+2x, -3x+5x^2$.

    Να βρεθούν υπόχωροι Z_1, Z_2 του $\mathbb{R}_3[x]$ έτσι ώστε

    $$\mathbb{R}_3[x] = W \oplus Z_1 = W \oplus Z_2, \ \ \kappa\alpha\iota \ \ Z_1 \neq Z_2$$

11. Έστω W ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ που παράγεται από τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

    Να βρεθούν διακεκριμένοι υπόχωροι Z_1, Z_2, Z_3 του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ έτσι ώστε

$$\mathbb{R}^{2\times 2} = W \oplus Z_1 = W \oplus Z_2 = W \oplus Z_3$$

12. (i) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του χώρου Σ των συμμετρικών $\nu \times \nu$ πραγματικών πινάκων.

    (ii) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του χώρου M των αντισυμμετρικών $\nu \times \nu$ πραγματικών πινάκων.

    (iii) Να δειχθεί ότι $\mathbb{R}^{\nu\times\nu} = \Sigma \oplus M$.

Κεφάλαιο 4

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Για να συγκρίνουμε δύο διανυσματικούς χώρους επί του F ή να μελετήσουμε ιδιότητες ενός διανυσματικού χώρου επί του F χρησιμοποιούμε γραμμικές απεικονίσεις. Οι γραμμικές απεικονίσεις είναι απεικονίσεις μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων επί του F, οι οποίες διατηρούν τη δομή των χώρων.

4.1 ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ορισμός 4.1.1 *Έστω V και W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Μία απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$, θα λέγεται* **γραμμική απεικόνιση** *αν ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $f(x + \psi) = f(x) + f(\psi)$, *για κάθε* $x, \psi \in V$.
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{F}$ *και* $x \in V$.

Παρατηρήσεις 4.1.2

$\alpha)$ *Το σύμβολο* $+$ *στο πρώτο μέλος της ιδιότητας* $1.$ *του ορισμού είναι το σύμβολο της πρόσθεσης στον* V *ενώ το* $+$ *στο δεύτερο μέλος είναι το σύμβολο της πρόσθεσης στον* W. *Ανάλογη παρατήρηση ισχύει και για την ιδιότητα* $2.$ *του ορισμού.*

$\beta)$ *Μερικές φορές αντί για τον όρο γραμμική απεικόνιση, χρησιμοποιούμε τον όρο* **γραμμικός μετασχηματισμός**

Παραδείγματα 4.1.3

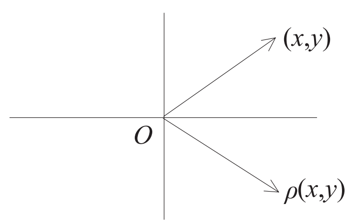
1. *Θεωρούμε την απεικόνιση* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *με* $f(x, \psi) = (x, 0)$. *Διαπιστώνουμε εύκολα ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι γραμμική.*
2. *Η απεικόνιση* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *με* $f(x, \psi) = (x^2, 0)$ *δεν είναι γραμμική γιατί αν* $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *τότε* $f(\lambda w) = f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda^2 x^2, 0)$, *ενώ* $\lambda f(w) = (\lambda x^2, 0)$.

3. *Η απεικόνιση* $d : \mathbb{R}_\nu[x] \longrightarrow \mathbb{R}_\nu[x]$ *με* $d(f(x)) = f'(x)$, *είναι γραμμική όπως προκύπτει από τις ιδιότητες των παραγώγων.*

4. *Έστω* $I : \mathbb{R}_\nu[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ *η απεικόνιση που ορίζεται ως* $I(f(x)) = \int_0^1 f(x)dx$. *Η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική όπως προκύπτει από τις ιδιότητες της ολοκλήρωσης συναρτήσεων.*

5. *Έστω* α *ένας πραγματικός αριθμός,* $\alpha \neq 0$ *και* $T : \mathbb{R}^\nu \longrightarrow \mathbb{R}^\nu$ *η απεικόνιση που ορίζεται ως* $T(x) = \alpha x$. *Εύκολα και εδώ διαπιστώνουμε ότι η T είναι μία γραμμική απεικόνιση.*

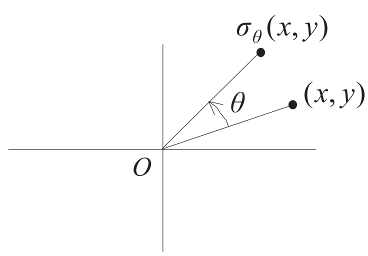
6. *Η απεικόνιση* $\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *με* $(x, y) \longrightarrow (x, -y)$ *είναι γραμμική απεικόνιση και λέγεται ανάκλαση ως πρός τον υπόχωρο* $\langle(1, 0)\rangle$.



7. *Έστω* θ *μία γωνία. Η απεικόνιση*

   $\sigma_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *με* $(x, y) \longrightarrow (x\sigma\upsilon\nu\theta - y\eta\mu\theta, x\eta\mu\theta + y\sigma\upsilon\nu\theta)$

   είναι γραμμική και λέγεται στροφή κατά γωνία θ.



8. *Έστω* $A \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ *ένας πίνακας. Ορίζουμε την απεικόνιση:*

$$\gamma_A : \mathbb{F}^{\nu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu\times 1} \ \ \text{με} \ \ \gamma_A(X) = AX.$$

   Η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική όπως εύκολα προκύπτει από τις ιδιότητες των πινάκων. Η γ_A *εμφανίζεται συχνά παρακάτω.*

9. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ ένας πίνακας. Ορίζουμε την απεικόνιση:*

$$\Delta_A : \mathbb{R}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{R}^{\nu\times\nu} \ \ \mu\varepsilon \ \ \Delta_A(X) = AX.$$

   Η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική, όπως εύκολα προκύπτει από τις ιδιότητες πινάκων.

10. *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ ένας πίνακας. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η απεικόνιση*

$$t : \mathbb{F}^{\nu\times\mu} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu\times\nu} \ \ \mu\epsilon \ \ A \longmapsto A^t$$

   είναι γραμμική.

11. *Αν V, W είναι διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ τότε η απεικόνιση $V \longrightarrow W$ με $x \longmapsto 0_W$ είναι γραμμική απεικόνιση και συμβολίζεται με $\mathbf{0}_{V,W}$ ή $\mathbf{0}$.*

12. *Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ τότε η ταυτοτική $1_V : V \longrightarrow V$ με $x \longmapsto x$ είναι επίσης μία γραμμική απεικόνιση*

Οι δύο συνθήκες 1. και 2. του ορισμού της γραμμικής απεικόνισης μπορούν να αντικατασταθούν από μία:

Πρόταση 4.1.4 *Μία απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ είναι γραμμική αν και μόνο αν $f(\lambda_1 x + \lambda_2 \psi) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(\psi)$ για κάθε $x, \psi \in V$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$.*

Απόδειξη. Αν $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, τότε έχουμε την πρώτη ιδιότητα για να είναι η f γραμμική. Αν τώρα θέσουμε $\lambda_2 = 0$, τότε έχουμε τη δεύτερη ιδιότητα για να είναι η f γραμμική . Αντίστροφα αν η f είναι γραμμική, $x, \psi \in V$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$, τότε έχουμε $f(\lambda_1 x + \lambda_2 \psi) = f(\lambda_1 x) + f(\lambda_2 \psi) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(\psi)$

Παρατήρηση 4.1.5 *Με επαγωγή αποδεικνύεται εύκολα ότι αν $f : V \longrightarrow W$ είναι μία γραμμική απεικόνιση, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\mu \in \mathbb{F}$ και $x_1, x_2, \cdots, x_\mu \in V$, τότε*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_\mu x_\mu) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_\mu f(x_\mu).$$

Πρόταση 4.1.6 *Έστω $f : V \longrightarrow W$ μία γραμμική απεικόνιση. Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $f(0_V) = 0_W$.

2. *Για κάθε $x \in V$ έχουμε ότι $f(-x) = -f(x)$*

Απόδειξη. 1. $f(0_V) = f(0_{\mathbb{F}} \cdot 0_V) = 0_{\mathbb{F}} \cdot f(0_V) = 0_W$.
Η 2. αφήνεται σαν άσκηση.

Ορισμός 4.1.7 *Έστω V και W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μία γραμμική απεικόνιση.*

(i) *Εάν η f είναι 1-1, τότε η γραμμική απεικόνιση f, θα λέγεται και* **μονομορφισμός.**

(ii) *Εάν η f είναι επί, δηλαδή $f(V) = W$, τότε η γραμμική απεικόνιση f, θα λέγεται και* **επιμορφισμός.**

(iii) *Εάν η f είναι ταυτόχρονα μονομορφισμός και επιμορφισμός θα λέγεται* **ισομορφισμός.**

Παρατήρηση Εύκολα επαληθεύουμε ότι στα Παραδείγματα 4.1.3:
η f του 1. είναι μονομορφισμός και όχι επιμορφισμός,
η d του 3. δεν είναι μονομορφισμός ούτε επιμορφισμός,
η I του 4. είναι επιμορφισμός αλλά όχι μονομορφισμός,
οι T του 5., ρ του 6. και σ_θ του 7. είναι ισομορφισμοί.

Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ ένας ισομορφισμός. Δηλαδή, η f είναι μία γραμμική απεικόνιση, η οποία είναι 1-1 και επί.

Επειδή η f είναι 1-1 και επί. ορίζεται η αντίστροφή της, $f^{-1} : V \longrightarrow W$, η οποία είναι επίσης 1-1 και επί.

Θα δείξουμε ότι η f^{-1} είναι γραμμική.

Έστω $y_1, y_2 \in V$. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(y_1 + y_2) = f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$.

Έστω $f^{-1}(y_1) = x_1$ και $f^{-1}(y_2) = x_2$ Από τον ορισμό της f^{-1} έπεται ότι $f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$. Τώρα $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = y_1 + y_2$, επειδή η f είναι γραμμική. Από τον ορισμό της f^{-1} έπεται ότι $f^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 = f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$.

Ανάλογα δείχνουμε ότι αν $\lambda \in \mathbb{F}$ και $y \in W$, τότε $f^{-1}(\lambda y) = \lambda f^{-1}(y)$. Άρα η f^{-1} είναι γραμμική.

Συνεπώς δείξαμε ότι αν $f : V \longrightarrow W$ είναι ισομορφισμός, τότε ορίζεται η $f^{-1} : W \longrightarrow V$, η οποία είναι επίσης ισομορφισμός. Άρα υπάρχει ένας ισομορφισμός από τον V στον W αν και μόνο αν υπάρχει ένας ισομορφισμός από το W στο V.

Ορισμός 4.1.8 *Δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$, V και W, λέγονται ισόμορφοι αν υπάρχει ένας ισομορφισμός από τον ένα στον άλλο. Αν οι V και W είναι ισόμορφοι, τότε γράφουμε $V \simeq W$*

Παρατήρηση Αν δύο διανυσματικοί χώροι είναι ισόμορφοι, τότε έχουν την ίδια δομή ως διανυσματικοί χώροι. Κάθε ιδιότητα του ενός, που αφορά στη δομή του ως διανυσματικό χώρο μεταφέρεται μέσω ενός ισομορφισμού σε αντίστοιχη ιδιότητα του άλλου.

Παραδείγματα 4.1.9

1. *Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ με $(r_1, r_2, r_3) \longrightarrow r_1 + r_2 x + r_3 x^2$*

   Εύκολα επαληθεύουμε ότι η f είναι μία γραμμική απεικόνιση, η οποία είναι 1-1 και επί. Δηλαδή η f είναι ένας ισομορφισμός, άρα $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}_2[x]$.

2. *Έστω $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $(r_1, r_2, r_3, r_4) \longrightarrow \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix}$*

   Εύκολα επαληθεύουμε ότι η f είναι μία γραμμική απεικόνιση, η οποία είναι 1-1 και επί. Δηλαδή η f είναι ένας ισομορφισμός. Άρα $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^{2\times 2}$.

3. *Έστω* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *με* $(r_1, r_2, r_3) \longrightarrow (r_1 + r_2, r_3)$

   Εύκολα επαληθεύουμε ότι η f *είναι μία γραμμική απεικόνιση. Η* f *είναι επί. Πράγματι, αν* $w \in \mathbb{R}^2$ *με* $w = (\sigma_1, \sigma_2)$ *τότε* $f((\sigma_1, 0, \sigma_2)) = w$. *Η* f *δεν είναι* $1-1$. *Πράγματι,* $f((5,0,1)) = f((2,3,1)) = (5,1)$. *Άρα η* f *δεν είναι ισομορφισμός.*

4. *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ *με* A *αντιστρέψιμο. Τότε η γραμμική απεικόνιση* $\gamma_A : \mathbb{R}^{\nu\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{\nu\times 1}$ *με* $X \longrightarrow AX$ *είναι ισομορφισμός.*

   Πράγματι η γ_A *είναι 1-1, γιατί αν* $\gamma_A(X) = \gamma_A(Y)$ *τότε* $AX = AY$, *δηλαδή* $A(X - Y) = 0$. *Όμως ο* A *είναι αντιστρέψιμος, άρα* $X - Y = 0$, *συνεπώς* $X = Y$. *Επιπλέον αν* $Y \in \mathbb{R}^{\nu\times 1}$, *τότε* $\gamma_A(A^{-1}Y) = A(A^{-1}Y) = (AA^{-1})Y = I_\nu Y = Y$, *άρα η* γ_A *είναι επί.*

Παράδειγμα 4.1.10 *Έστω* V *ένας διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$ *διάστασης* ν *και* $\widehat{B} = (w_1, w_2, \cdots, w_\nu)$ *μία διατεταγμένη βάση του. Τότε η απεικόνιση*
$[\ ]_{\widehat{B}} : V \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ *είναι ισομορφισμός.*

Θα δούμε ότι η $[\ ]_{\widehat{B}}$ *είναι γραμμική, 1-1 και επί.*

Έστω $v_1, v_2 \in V$ *και έστω ότι* $v_1 = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_\nu w_\nu$ *και* $v_2 = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_\nu w_\nu$. *Άρα*
$[v_1]_{\widehat{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$ *και* $[v_2]_{\widehat{B}} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_\nu \end{pmatrix}$. *Τώρα* $v_1 + v_2 = (\lambda_1 + \mu_1)w_1 + \cdots + (\lambda_\nu + \mu_\nu$, *άρα*

$$[v_1 + v_2]_{\widehat{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_\nu + \mu_\nu \end{pmatrix}$$

Συνεπώς $[v_1 + v_2]_{\widehat{B}} = [v_1]_{\widehat{B}} + [v_2]_{\widehat{B}}$

Ανάλογα βλέπουμε ότι αν $\lambda \in \mathbb{F}$ *και* $v \in V$ *τότε*
$[\lambda v]_{\widehat{B}} = \lambda [v]_{\widehat{B}}$, *άρα η* $[\ ]_{\widehat{B}}$ *είναι γραμμική.*

Η απεικόνιση $[\ ]_{\widehat{B}}$ *είναι επί. Πράγματι, αν* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ *τότε θεωρούμε το στοιχείο* $v \in V$ *με* $v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_\nu w_\nu$. *Τότε* $[v]_{\widehat{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}$

Η $[\ ]_{\widehat{B}}$ *είναι 1-1. Πράγματι, έστω* $v_1, v_2 \in V$ *με* $[v_1]_{\widehat{B}} = [v_2]_{\widehat{B}}$, *δηλαδή αν* $v_1 = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_\nu w_\nu$ *και* $v_2 = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_\nu w_\nu$ *τότε* $[v_1]_{\widehat{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_\nu \end{pmatrix} = [v_2]_{\widehat{B}} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_\nu \end{pmatrix}$.

Άρα $\lambda_i = \mu_i, 1 \le i \le \nu$, *συνεπώς* $v_1 = v_2$.

Συνεπώς δείξαμε ότι αν V **είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του** $\mathbb{F}$ **διάστασης** ν **τότε** $V \simeq \mathbb{F}^{\nu\times 1}$.

Θεώρημα 4.1.11 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$, $f : V \longrightarrow W$ μία γραμμική απεικόνιση και κ ένας φυσικός αριθμός.*

1. *Αν $v_1, v_2, \cdots, v_\kappa$ είναι γραμμικά εξαρτημένα στοιχεία του V, τότε $f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_\kappa)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα στοιχεία του W.*

2. *Αν η f είναι 1-1 και $v_1, v_2, \cdots, v_\kappa$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του V τότε $f(v_1)$,*
   $f(v_2), \cdots, f(v_\kappa)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του W.

3. *Αν η f είναι επί και $V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_\kappa \rangle$ τότε $W = \langle f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_\kappa) \rangle$.*

4. *Αν η f είναι ισομορφισμός τότε το $\{v_1, v_2, \cdots, v_\kappa\}$ είναι μία βάση του V αν και μόνο αν το $\{f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_\kappa)\}$ είναι μία βάση του W.*

Απόδειξη.

1. Επειδή $v_1, v_2, \cdots, v_\kappa$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\kappa \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδέν με $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\kappa v_\kappa = 0_V$.
Άρα $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\kappa v_\kappa) = f(0_V) = 0_W$ αλλά η f είναι γραμμική άρα $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\kappa v_\kappa) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \cdots + \lambda_\kappa f(v_\kappa) = 0_W$, άρα τα $f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_\kappa)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

2. Έστω $\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \cdots + \lambda_\kappa f(v_\kappa) = 0_W$. Επειδή η f είναι γραμμική έχουμε ότι $\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \cdots + \lambda_\kappa f(v_\kappa) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\kappa v_\kappa) = 0_W = f(0_V)$.
Επειδή η f είναι 1-1 έπεται ότι $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\kappa v_\kappa = 0_V$ αλλά $v_1, v_2, \cdots, v_\kappa$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς από $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\kappa v_\kappa = 0_V$ συνεπάγεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_\kappa = 0_{\mathbb{F}}$. Άρα τα $f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_\kappa)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

3. Έστω $x \in W$. Επειδή η f είναι επί, υπάρχει $y \in V$ με $f(y) = x$. Επειδή $V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_\kappa \rangle$, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\kappa \in \mathbb{F}$ με $y = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\kappa v_\kappa$. Τώρα η f είναι γραμμική, άρα $f(y) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\kappa v_\kappa) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_\kappa f(v_\kappa)$. Δηλαδή το $x = f(y)$, ένα τυχαίο στοιχείο του W είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_\kappa)$. Άρα $W = \langle f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_\kappa) \rangle$.

4. Αφήνεται σαν άσκηση.

Παράδειγμα Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x, y) = (x, 0)$. Παρατηρούμε ότι $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αλλά $f(e_1) = (1, 0)$, $f(e_2) = (0, 0)$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετασθεί ποιές από τις ακόλουθες απεικονίσεις $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικές:

   (i) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, 0)$

   (ii) $f(x_1, x_2, x_3) = (\mid x_1 \mid, -x_2, 0)$

   (iii) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1, x_1, x_2)$

   (iv) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2 - 2, 4x_2)$

2. Να εξετασθεί ποιές από τις ακόλουθες απεικονίσεις είναι γραμμικές:

   (i) $\mathbb{R}_\nu[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\nu+1}[x]$ με $p(x) \longmapsto p(0) + xp(x)$

   (ii) $\mathbb{R}_\nu[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\nu+1}[x]$ με $p(x) \longmapsto 1 + xp(x)$

3. Να εξετασθεί αν η ακόλουθη απεικόνιση f είναι επιμορφισμός:
   $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + 3x_3)$

4. Να δειχθεί ότι η $\mathbb{F}^{\mu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ με $A \longmapsto A^t$ είναι ισομορφισμός.

5. Έστω V_1, V_2, V_3 διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και
   $f : V_1 \longrightarrow V_2,\ \ \varrho : V_2 \longrightarrow V_3$ γραμμικές απεικονίσεις.

   (i) Να δειχθεί ότι η $\varrho \circ f : V_1 \longrightarrow V_3$ είναι γραμμική απεικόνιση.

   (ii) Αν f, ϱ είναι μονομορφισμοί, τότε και η $\varrho \circ f$ είναι μονομορφισμός.

   (iii) Αν f, ϱ είναι επιμορφισμοί, τότε και η $\varrho \circ f$ είναι επιμορφισμός.

   (iv) Αν f, ϱ είναι ισομορφισμοί, τότε και η $\varrho \circ f$ είναι ισομορφισμός.

6. Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ διάστασης ν. Να δειχθεί ότι $V \simeq W$.
   Υπόδειξη: Παράδειγμα 4.1.10 και Άσκηση $6.(iv)$

7. (i) Είναι οι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ ισόμορφοι;

   (ii) Είναι οι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι $\mathbb{R}_1[x]$ και $\mathbb{C}$ ισόμορφοι;

8. Θεωρείστε την γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ της άσκησης 4.
   Να εξετάσετε αν τα $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

4.2 ΠΥΡΗΝΑΣ ΚΑΙ ΕΙΚΟΝΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ

Θεώρημα 4.2.1 *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μία γραμμική απεικόνιση, A ένας υπόχωρος του V και B ένας υπόχωρος του W. Τότε το σύνολο $f(A) = \{w \in W \mid w = f(x), x \in A\}$ είναι ένας υπόχωρος του W και το σύνολο $f^{-1}(B) = \{x \in V \mid f(x) \in B\}$ είναι ένας υπόχωρος του V.*

Απόδειξη. Κατ' αρχήν $f(0_V) = 0_W$. Έτσι $0_V \in f(A)$. Έστω $\omega_1, \omega_2 \in f(A)$. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με την ιδιότητα $f(x_1) = \omega_1, f(x_2) = \omega_2$. Τότε $\omega_1 + \omega_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in f(A)$. Αν τώρα $\omega \in f(A)$, υπάρχει $x \in A$ με $f(x) = \omega$. Δεδομένου ενός $\lambda \in F$, έχουμε $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda\omega$. Έτσι $\lambda\omega \in f(A)$. Τελικά το σύνολο $f(A)$ είναι ένας υπόχωρος του W.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το σύνολο $f^{-1}(B)$ είναι ένας υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V. Κατ' αρχήν $f(0_V) = 0_W$, άρα $0_V \in f^{-1}(B)$. Θεωρούμε δύο στοιχεία $x_1, x_2 \in f^{-1}(B)$. Έχουμε $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \in B$. Άρα $x_1 + x_2 \in f^{-1}(B)$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε επίσης ότι αν $x \in f^{-1}(B)$ και $\lambda \in F$, τότε $\lambda x \in f^{-1}(B)$, φτάνοντας τελικά στην απόδειξη ότι το σύνολο $f^{-1}(B)$ είναι ένας υπόχωρος του V.

Ορισμός 4.2.2 *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μία γραμμική απεικόνιση.*

1. *Το σύνολο $f^{-1}(\{0_W\}) = \{x \in V \mid f(x) = 0_W\}$ λέγεται* **πυρήνας** *της γραμμικής απεικόνισης f και συμβολίζεται με $kerf$.*
2. *Το σύνολο $f(V) = \{w \in W \mid w = f(x), x \in V\}$ λέγεται* **εικόνα** *της γραμμικής απεικόνισης f και συμβολίζεται με Imf.*

Παρατήρηση 4.2.3

1. *Ο πυρήνας $Kerf$ της γραμμικής απεικόνισης $f : V \longrightarrow W$ είναι υπόχωρος του V. Αυτό είναι άμεσο από το προηγούμενο θεώρημα για B=$\{0_W\}$*
2. *Η εικόνα Imf της γραμμικής απεικόνισης $f : V \longrightarrow W$ είναι υπόχωρος του W. Αυτό είναι άμεσο από το προηγούμενο θεώρημα για A=V.*

Παραδείγματα 4.2.4

1. *Έστω η $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, 0)$*

   Εύκολα βλέπουμε ότι η f είναι γραμμική και ότι

   $kerf = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\} = \{(0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

   $Imf = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\} = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \in \mathbb{R}\}$.

   Είναι προφανές ότι $Imf \subsetneqq \mathbb{R}^2$

2. *Έστω η $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $(x, y) \longmapsto (x - y, y - x)$*

   Πάλι εύκολα βλέπουμε ότι η f είναι γραμμική και

   $kerf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$

   $Imf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\} = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$

   Είναι προφανές ότι $Imf \subsetneqq \mathbb{R}^2$

3. *Έστω $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ με $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \longmapsto p'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$*

   Εύκολα βλέπουμε ότι η f είναι γραμμική και

   $kerf = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0\} = \{\alpha_0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 | \alpha_0 \in \mathbb{R}\}$

   $Imf = \{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid \beta_3 = 0\} = \{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + 0x^3 \in \mathbb{R}_3[x] | \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\}$

Θεώρημα 4.2.5 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μία γραμμική απεικόνιση. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *Η γραμμική απεικόνιση f είναι $1 - 1$.*
2. $Kerf = \{0_V\}$.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι $1-1$ και $\alpha \in kerf$. Έχουμε ότι $f(\alpha) = 0_W$ και $f(0_V) = 0_W$. Άρα $f(\alpha) = f(0_V)$. Επειδή η f είναι 1-1, έχουμε ότι $\alpha = 0_V$. Έτσι $Kerf = \{0_V\}$.

Έστω τώρα ότι $Kerf = \{0_V\}$ και $f(x) = f(\psi)$. Έχουμε ότι $f(x) - f(\psi) = 0_W \Longrightarrow f(x-\psi) = 0_W \Longrightarrow (x-\psi) \in Kerf$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $x - \psi = 0_V$, άρα $x = \psi$ και έτσι η f είναι 1-1 .

Πρόταση 4.2.6 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μία γραμμική απεικόνιση. Αν $V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_\kappa \rangle$, τότε*
$f(V) = \langle f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_\kappa) \rangle$

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Σύγκρινε με το θεώρημα 4.1.11 3.

Παράδειγμα 4.2.7 *Έστω A=* $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$\gamma_A : \mathbb{F}^{\nu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu\times 1} \quad \mu\epsilon \quad \gamma_A(X) = AX.$$

Παρατηρούμε ότι ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης γ_A είναι το σύνολο :

$$Ker\gamma_A = \{X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1} \mid AX = 0_{\mathbb{F}^{\mu\times 1}}\}.$$

Δηλαδή,

$$Ker\gamma_A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu\times 1} \;\; \mu\epsilon \;\; \begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1\nu}x_\nu & = 0 \\ \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2\nu}x_\nu & = 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ \alpha_{\mu 1}x_1 & + & \alpha_{\mu 2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{\mu\nu}x_\nu & = 0 \end{array} \right\}$$

Συνεπώς ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης γ_A είναι το σύνολο λύσεων του γραμμικού συστήματος $AX = 0$

Το υποσύνολο

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ *του* $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$

είναι ένα σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$. Άρα από την πρόταση 4.2.6 έπεται ότι $Im\gamma_A$ ισούται με τον υπόχωρο του $\mathbb{F}^{\mu\times 1}$ που παράγεται από τα

$$\gamma_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \gamma_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\gamma_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \longleftarrow i \ \ \textit{θέση} \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \longleftarrow i \ \ \textit{θέση} \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{\mu i} \end{pmatrix} = i\text{-}\textit{στήλη του } A.$$

Άρα $Im\gamma_A$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\mu\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες του A. Δηλαδή

$$Im\gamma_A = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{\mu 1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{\mu 2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{2\nu} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{\mu\nu} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Για παράδειγμα, έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$

Τότε η απεικόνιση

$$\gamma_A : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{4\times 1} \ \textit{με} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

έχει $ker\gamma_A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ = *το σύνολο λύσεων του συστήματος*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}.$$

Επίσης $Im\gamma_A$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^{4\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες του A .

Δηλαδή $Im\gamma_A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι μία γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ καθορίζεται πλήρως από τις εικόνες των στοιχείων ενός συνόλου γεννητόρων του V. Δηλαδή αν K είναι ένα σύνολο γεννητόρων του V και $f, g : V \longrightarrow W$ γραμμικές απεικονίσεις με $f(\kappa) = g(\kappa)$ για κάθε $\kappa \in K$, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in V$, δηλαδή $f = g$.

Θεώρημα 4.2.8 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και έστω $f, g : V \longrightarrow W$ δύο γραμμικές απεικονίσεις. Αν $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mu\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του V*

και $f(\alpha_1) = g(\alpha_1), f(\alpha_2) = g(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_\mu) = g(\alpha_\mu)$*, τότε* $f(x) = g(x)$ *για κάθε* $x \in V$*. Δηλαδή* $f = g$*.*

Απόδειξη. Έστω $x \in V$. Επειδή το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mu\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του V, έχουμε ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\mu \in F$ έτσι ώστε $x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha_\mu$. Άρα $f(x) = f(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha_\mu) = \lambda_1 f(\alpha_1) + \lambda_2 f(\alpha_2) + \cdots + \lambda_\mu f(\alpha_\mu) = \lambda_1 g(\alpha_1) + \lambda_2 g(\alpha_2) + \cdots + \lambda_\mu g(\alpha_\mu) = g(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha_\mu) = g(x)$.

Δείξαμε ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in V$. Άρα $f = g$.

Θεώρημα 4.2.9 *Έστω* V, W *δύο διανυσματικοί χώροι επί του* $\mathbb{F}$ *και* $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu)$ *μία διατεταγμένη βάση του* V *και* $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu)$ *μία διατεταγμένη* ν*-άδα στοιχείων του* W*. Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση* $f : V \longrightarrow W$ *με την ιδιότητα* $f(\alpha_1) = \beta_1, f(\alpha_2) = \beta_2, \cdots, f(\alpha_\nu) = \beta_\nu$.

Απόδειξη.

1. *Ύπαρξη :* Θα ορίσουμε μία απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ έτσι ώστε η f να είναι γραμμική και $f(\alpha_i) = \beta_i, i = 1, 2, \cdots, \nu$.

   Έστω $x \in V$, τότε επειδή $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ είναι μία βάση του V το x γράφεται με μοναδικό τρόπο ως

   $$x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_\nu\alpha_\nu$$

   Δηλαδή σε κάθε $x \in V$ αντιστοιχεί ακριβώς μία διατεταγμένη $\nu-$άδα στοιχείων του $\mathbb{F}$, $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu)$. Συνεπώς ο κανόνας που αντιστοιχίζει στο $x \in V$ το $\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \cdots + \lambda_\nu\beta_\nu \in W$ είναι μία απεικόνιση από το V στο W, που συμβολίζουμε με $f : V \longrightarrow W$. Εύκολα βλέπουμε ότι η f είναι γραμμική. Τώρα $\alpha_1 = 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \cdots 0 \cdot \alpha_\nu$ Άρα $f(\alpha_1) = \beta_1$. Ανάλογα έχουμε ότι $f(\alpha_i) = \beta_i, i = 1, 2, \cdots, \nu$.

2. *Μοναδικότητα :* Έστω $f, g : V \longrightarrow W$ γραμμικές απεικονίσεις με την ιδιότητα $f(\alpha_1) = g(\alpha_1), f(\alpha_2) = g(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_\nu) = g(\alpha_\nu)$. Από το θεώρημα 4.2.8 έπεται ότι $f = g$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_3)$

   $\alpha)$ Να δειχθεί ότι η f είναι γραμμική

   $\beta)$ Να βρεθεί μία βάση για την Imf και τον $Kerf$

2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x_1, x_2) = (x_2, 0)$

   να δειχθεί ότι η f είναι γραμμική και $Imf = Kerf$.

3. Έστω $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ με

   $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_3 + 3x_4 - x_5, x_1 + 2x_4 - x_5, 2x_1 - x_3 + 5x_4 - x_5, -x_3 + x_4)$

   Να δειχθεί ότι η f είναι γραμμική και να βρεθεί μία βάση για την Imf και τον $Kerf$.

4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ η γραμμική απεικόνιση με
$$f(3,1) = (1,2) \ \ \kappa\alpha\iota \ \ f((-1,0)) = (1,1).$$
Να υπολογισθεί το $f(1,2)$.

5. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $f((x_1,x_2,x_3)) = (x_1,x_2)$

   $\alpha)$ να βρεθεί μία βάση για την Imf και τον $Kerf$.

   $\beta)$ Ποιά στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ έχουν την ίδια εικόνα μέσω της f με το $(-1,1,3)$;

6. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ -4 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

   Να βρεθεί μία βάση για τους υπόχωρους $Im\gamma_A$ και $Ker\gamma_A$.

7. Έστω ο υπόχωρος $\mathcal{A}$ του $\mathbb{R}^4$ με

   $\mathcal{A} = \{(x,0,z,o), x,z \in \mathbb{R}\}$

   $i)$ Να βρεθεί μία γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ με $Imf = \mathcal{A}$.

   $i)$ Να βρεθεί μία γραμμική απεικόνιση $\varrho : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ με $Ker\varrho = \mathcal{A}$

8. Να βρεθεί μία γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow V$ με $Imf \cap Kerf \neq \{0_V\}$

4.3 ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Το ακόλουθο Θεώρημα μας δίνει ένα κριτήριο για το πότε δύο διανυσματικοί χώροι επί του F πεπερασμένης διάστασης, V,W είναι ισόμορφοι. Θα δείξουμε ότι οι V,W είναι ισόμορφοι εαν και μόνο αν έχουν την ίδια διάσταση.

Θεώρημα 4.3.1 *Έστω V,W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ πεπερασμένης διάστασης. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *Οι χώροι V και W είναι ισόμορφοι.*

2. $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W$.

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει το 1. , δηλαδή ότι οι V,W είναι ισόμορφοι και έστω $f : V \longrightarrow W$ ένας ισομορφισμός.

Επειδή η f είναι 1-1 και επί έπεται ότι ή $V = \{0_V\}$ και $W = \{0_W\}$ ή $V \neq \{0_V\}$ και $W \neq \{0_W\}$. Αν $V = \{0_V\}$ και $W = \{0_W\}$ τότε $dim_{\mathbb{F}}V = 0 = dim_{\mathbb{F}}W$.

Έστω ότι $V \neq \{0_V\}$ και $W \neq \{0_W\}$. Τότε από το θεώρημα 4.1.11 έπεται ότι αν $\{v_1,v_2,\cdots,v_\kappa\}$ είναι μία βάση του V, τότε το $f(v_1),f(v_2)\}$ είναι μία βάση του W.

Άρα $dim_{\mathbb{F}}V = dim_{\mathbb{F}}W$.

Έστω τώρα ότι ισχύει το 2. δηλαδή ότι $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W$. Αν $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W = 0$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. Αν $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W = \mu \neq 0$, τότε διαλέγουμε δύο βάσεις, την $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mu\}$ για το χώρο V και την $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu\}$ για το χώρο W. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.2.9 έχουμε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow S$ με $f(\alpha_1) = \beta_1, f(\alpha_2) = \beta_2, \cdots, f(\alpha_\mu) = \beta_\mu$. Θα αποδείξουμε ότι η f είναι ισομορφισμός . Έστω $x, \psi \in V$ με $f(x) = f(\psi)$. Αν $x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha_\mu$ και $\psi = \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \cdots + \xi_\mu\alpha_\mu$, τότε $f(x) = f(\psi) = f(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha_\mu) = f(\xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \cdots + \xi_\mu\alpha_\mu)$. Άρα $(\lambda_1 - \xi_1)f(\alpha_1) + (\lambda_2 - \xi_2)f(\alpha_2) + \cdots + (\lambda_\mu - \xi_\mu)f(\alpha_\mu) = 0_W = (\lambda_1 - \xi_1)\beta_1 + (\lambda_2 - \xi_2)\beta_2 + \cdots + (\lambda_\mu - \xi_\mu)\beta_\mu$. Όμως το σύνολο $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα $\lambda_1 = \xi_1, \lambda_2 = \xi_2, \cdots, \lambda_\mu = \xi_\mu$ και έτσι $x = \psi$, άρα η f είναι 1-1. Αν $\omega \in W$, τότε $\omega = \rho_1\beta_1 + \rho_2\beta_2 + \cdots + \rho_\mu\beta_\mu,\ \rho_i \in \mathbb{F}, i = 1, 2, \cdots, \mu$. Θεωρούμε το στοιχείο $x \in V$ με $x = \rho_1\alpha_1 + \rho_2\alpha_2 + \cdots + \rho_\mu\alpha_\mu,\ \rho_i \in \mathbb{F}, i = 1, 2, \cdots, \mu$. Τότε $f(x) = \omega$ και έτσι η f είναι επί. Συνεπώς η f είναι ισομορφισμός.

Παρατήρηση Είδαμε στο Παράδειγμα 4.1.10 ότι αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του F διάστασης μ τότε $V \simeq F^{\mu\times 1}$.
Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του F με $\dim_F V = \dim_F W = \mu$. Τότε $V \simeq F^{\mu\times 1}$ και $W \simeq F^{\mu\times 1}$. Έστω $\rho : V \longrightarrow F^{\mu\times 1}$ και $\sigma : W \longrightarrow F^{\mu\times 1}$ ισομορφισμοί. Τότε ο $\sigma^{-1} : F^{\mu\times 1} \longrightarrow W$ είναι ισομορφισμός και $\sigma^{-1}o\rho : V \longrightarrow W$ είναι ισομορφισμός ως σύνθεση ισομορφισμών. Άρα $V \simeq W$.
Έτσι παίρνουμε μια άλλη απόδειξη του 2.⇒1. του προηγούμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 4.3.2 *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$, με V πεπερασμένης διάστασης. Αν $f : V \longrightarrow W$ είναι μία γραμμική απεικόνιση τότε*

$$dim_{\mathbb{F}}V = dim_{\mathbb{F}}(Kerf) + dim_{\mathbb{F}}(Imf)$$

Απόδειξη. Αν $V = \{0_V\}$ τότε $Kerf = \{0_V\}, Imf = \{0_W\}$ και το ζητούμενο ισχύει.

Αν $Kerf = \{0_V\}$ τότε η f είναι 1-1 άρα οι διανυσματικοί χώροι V, Imf είναι ισόμορφοι, συνεπώς έχουν την ίδια διάσταση και το ζητούμενο ισχύει.

Έχει μείνει η περίπτωση που $Kerf \neq \{0_V\}$ και $Imf \neq \{0_W\}$.

Έστω $\{v_1, v_2, \cdots, v_\sigma\}$ μία βάση του $Kerf$ και $\{w_1, w_2, \cdots, w_\rho\}$ μία βάση της Imf και έστω $x_1, x_2, \cdots, x_\rho \in V$ με $f(x_i) = w_i, i = 1, 2, \cdots \rho$

Θα δείξουμε ότι τα στοιχεία $v_1, v_2, \cdots, v_\sigma, x_1, x_2, \cdots, x_\rho$ αποτελούν μία βάση του V.

Πρώτα θα δείξουμε ότι $V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_\sigma, x_1, x_2, \cdots, x_\rho\rangle$.

Έστω $v \in V$. Επειδή $Imf = \langle w_1, w_2, \cdots, w_\rho\rangle$, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\rho \in \mathbb{F}$ με $f(v) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_\rho w_\rho = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_\rho f(x_\rho = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_\rho x_\rho)$

Άρα $f(v-(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_\rho x_\rho)) = 0_W$ συνεπώς $v-(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_\rho x_\rho) \in Kerf$. Επειδή $Kerf = \langle v_1, v_2, \cdots, v_\sigma\rangle$, υπάρχουν $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\sigma \in \mathbb{F}$ με $v - (\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_\rho x_\rho) = \mu_1v_1 + \mu_2v_2 + \cdots + \mu_\sigma v_\sigma$.

Άρα $v = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_\rho x_\rho + \mu_1v_1 + \mu_2v_2 + \cdots + \mu_\sigma v_\sigma$.

Δείξαμε ότι $V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_\sigma, x_1, x_2, \cdots, x_\rho\rangle$.

Τώρα θα δείξουμε ότι τα $v_1, v_2, \cdots, v_\sigma, x_1, x_2, \cdots, x_\rho$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Έστω

(1) $\quad \delta_1v_1 + \delta_2v_2 + \cdots + \delta_\sigma v_\sigma + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \cdots + \gamma_\rho x_\rho = 0_V$

με $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\sigma, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\rho \in \mathbb{F}$

Τότε $f(\delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \cdots + \delta_\sigma v_\sigma + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_\rho x_\rho) = 0_W$

Δηλαδή,

$f(\delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \cdots + \delta_\sigma v_\sigma) + f(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_\rho x_\rho) = 0_W + \gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \cdots + \gamma_\rho f(x_\rho) = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \cdots + \gamma_\rho w_\rho = 0_W$. Επειδή τα $w_1, w_2, \cdots, w_\rho$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, παίρνουμε ότι $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_\rho = 0$ Αλλά τότε η (1) μας δίνει

$\delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \cdots + \delta_\sigma v_\sigma = 0$. Επειδή τα $v_1, v_2, \cdots, v_\sigma$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_\sigma = 0$.

Συνεπώς δείξαμε ότι τα $v_1, v_2, \cdots, v_\sigma, x_1, x_2, \cdots, x_\rho$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άρα το $\{v_1, v_2, \cdots, v_\sigma, x_1, x_2, \cdots, x_\rho\}$ είναι μία βάση του V.

Επομένως

$$dim_{\mathbb{F}} V = \sigma + \rho = \dim_{\mathbb{F}}(Kerf) + dim_{\mathbb{F}}(Imf)$$

Θεώρημα 4.3.3 *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow W$ μία γραμμική απεικόνιση. Αν $dimV = dimW = \mu$ τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *Η γραμμική απεικόνιση f είναι 1-1.*

2. *Η γραμμική απεικόνιση f είναι επί.*

3. *Η γραμμική απεικόνιση f είναι 1-1 και επί.*

4. *Η γραμμική απεικόνιση f απεικονίζει βάσεις σε βάσεις, δηλαδή αν $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mu\}$ είναι μία βάση του V , τότε και το σύνολο $\{f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_\mu)\}$ είναι μία βάση του W.*

Απόδειξη. $1) \Longrightarrow 2)$. Έστω ότι η γραμμική απεικόνιση f είναι 1-1. Τότε $Kerf = \{0_V\}$. Άρα $dimKerf = 0$. Από τη σχέση $dimV = dimKerf + dim(Imf)$ έχουμε ότι $dimV = dim(Imf) = \mu = dimW$. Επειδή $Imf \leq W$ και $dim_{\mathbb{F}}(Imf) = dim_{\mathbb{F}} W$ έχουμε ότι $Imf = W$ και η f είναι επί.

$2) \Longrightarrow 3)$. Αφού η f είναι επί έχουμε ότι $Imf = W$. Άρα $dim(Imf) = dimW = \mu$. Από τη σχέση $dimV = dim(Kerf) + dim(Imf)$ έχουμε ότι $dim(Kerf) = 0$. Άρα $Kerf = \{0_V\}$ και επομένως σύμφωνα με το 4.2.5 η γραμμική απεικόνιση f είναι 1-1. Τελικά η f είναι $1-1$ και επί.

$3) \Longrightarrow 4)$. Αυτό έπεται από το θεώρημα 4.1.11

$4) \Longrightarrow 1)$ Αφού η γραμμική απεικόνιση f απεικονίζει βάσεις σε βάσεις, έχουμε ότι $dim(Imf) = \mu$. Άρα από τη σχέση $dimV = dim(Kerf) + dim(Imf)$ έχουμε ότι $dim(Kerf) = 0$, άρα $Kerf = \{0_V\}$ και επομένως η f είναι 1-1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$, πεπερασμένης διάστασης και $f : V \longrightarrow W$ μία γραμμική απεικόνιση. Να δειχθεί ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

   (i) Η f είναι ισομορφισμός.

(ii) Υπάρχει μία βάση $\{v_1, v_2, \cdots, v_\kappa\}$ του V τέτοια ώστε $\{f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_\kappa)\}$ είναι μία βάση του W.

2. Έστω οι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[x]$.
   Να βρεθούν δύο ισομορφισμοί $f, g : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $f \neq g$.

3. Να εξετασθεί αν οι ακόλουθοι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι είναι ισόμορφοι:
   (i) $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^{2\times 2}$
   (ii) $\mathbb{C}, \mathbb{R}_2[x]$
   (iii) $\mathbb{R}, \mathbb{R}_1[x]$
   (iv) $\mathbb{R}$, $\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$.

4. Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ πεπερασμένης διάστασης και $f : W \longrightarrow V$ ένας ισομορφισμός. Να δειχθεί ότι
   (i) Αν $K \leq W$ τότε $dim_{\mathbb{F}} K = dim_{\mathbb{F}} f(K)$
   (ii) Αν $\Lambda \leq V$ τότε $dim_{\mathbb{F}} V = dim_{\mathbb{F}} f^{-1}(\Lambda)$
   (iii) Έστω $Y_\mu = \{K \leq W \mid dim_{\mathbb{F}} K = \mu\}$ και
   $Y'_\mu = \{\Lambda \leq V \mid dim_{\mathbb{F}} \Lambda = \mu\}$
   Να δειχθεί ότι υπάρχει μία αντιστοιχία 1-1 και επί από το Y_μ στο Y'_μ.

5. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ η γραμμική απεικόνιση με
   $f(1,0,0) = 2x + x^3$
   $f(0,1,0) = -2x + x^2$
   $f(0,0,1) = x^2 + x^3$
   (i) Να βρεθεί μία βάση για τον $Kerf$
   (ii) Να επεκταθεί η βάση του $Kerf$ του παραπάνω ερωτήματος σε μία βάση του $\mathbb{R}^3$
   (iii) Να βρεθεί υπόχωρος W του $\mathbb{R}^3$ με $\mathbb{R}^3 = Kerf \oplus W$

6. Να εξετασθεί αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $Kerf = Imf$.

4.4 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathcal{L}(V,W)$ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΟΝ V ΣΤΟΝ W

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη δομή του συνόλου $\mathcal{L}(V,W)$ των γραμμικών απεικονίσεων από τον διανυσματικό χώρο V στον διανυσματικό χώρο W. Το κύριο αποτέλεσμα εδώ είναι ότι το σύνολο $\mathcal{L}(V,W)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$

Ορισμοί 4.4.1 *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$.*

1. *Αν $f, g : V \longrightarrow W$ είναι απεικονίσεις τότε ορίζεται μία απεικόνιση*
   $V \longrightarrow W$ *με* $x \longmapsto f(x) + g(x)$
   η οποία καλείται το άθροισμα των f και g και συμβολίζεται με $f + g$.

2. *Αν $f : V \longrightarrow W$ μία απεικόνιση και $\lambda \in \mathbb{F}$ τότε ορίζεται μία απεικόνιση:*
   $V \longrightarrow W$ *με* $x \longmapsto \lambda f(x)$
   η οποία καλείται το γινόμενο του λ με την f και συμβολίζεται με λf

Πρόταση 4.4.2 *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f, g : V \longrightarrow W$ γραμμικές απεικονίσεις και $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε*

(i) *Η $f + g : V \longrightarrow W$ είναι γραμμική*

(ii) *Η $\lambda f : V \longrightarrow W$ είναι γραμμική.*

Απόδειξη.

(i) Πρέπει να δείξουμε ότι

(α) $(f + g)(x + y) = (f + g)(x) + (f + g)(y)$ για κάθε $x, y \in V$ και

(β) $(f + g)(\kappa x) = \kappa(f + g)(x)$ για κάθε $x \in V$ και $\kappa \in \mathbb{F}$.

Πράγματι, επειδή οι f, g είναι γραμμικές έχουμε:

(α) $(f+g)(x+y) = f(x+y)+g(x+y) = f(x)+f(y)+g(x)+g(y) = f(x)+g(x)+f(y)+g(y) = (f+g)(x)+(f+g)(y)$

(β) $(f + g)(\kappa x) = f(\kappa x) + g(\kappa x) = \kappa f(x) + \kappa g(x) = \kappa(f(x) + g(x)) = \kappa(f + g)(x)$

(ii) Πρέπει να δείξουμε ότι:

(α) $(\lambda f)(x + y) = (\lambda f)(x) + (\lambda f)(y)$ για κάθε $x, y \in V$

(β) $(\lambda f)(\kappa x) = \kappa(\lambda f)(x)$ για κάθε $x \in V$ και $\kappa \in \mathbb{F}$

Πάλι, επειδή η f είναι γραμμική έχουμε

(α) $(\lambda f)(x+y) = \lambda f(x+y) = \lambda(f(x)+f(y)) = \lambda(f(x))+\lambda(f(y)) = (\lambda f)(x)+(\lambda f)(y)$

(β) $(\lambda f)(\kappa x) = \lambda f(\kappa x) = \lambda\kappa f(x) = \kappa\lambda f(x) = \kappa(\lambda f)(x)$

Πρόταση 4.4.3 *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $\mathcal{L}(V, W)$ το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από το V στο W. Τότε:*

(i) $\mathcal{L}(V, W) \neq \emptyset$

(ii) *Το σύνολο $\mathcal{L}(V, W)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με άθροισμα δύο στοιχείων $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ την $f + g$ και γινόμενο ενός στοιχείου λ του $\mathbb{F}$ με ένα στοιχείο f του $\mathcal{L}(V, W)$ την λf.*

Απόδειξη.

(i) $\mathcal{L}(V,W) \neq \emptyset$, αφού η $\mathbf{0}_{V,W} \in \mathcal{L}(V,W)$, όπου
$\mathbf{0}_{V,W} : V \longrightarrow V$ με $x \longmapsto 0$.

(ii) Αφήνεται σαν άσκηση.

Παρατήρηση 4.4.4 *Έστω V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $f, g, h \in \mathcal{L}(V,V)$. Τότε εύκολα επαληθεύουμε ότι*

(i) $f \circ (g+h) = (f \circ g) + (f \circ h)$, $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$

(ii) $f \circ (\lambda g) = \lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{F}$.

Ορισμός 4.4.5 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του F και $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση.*

Τότε ορίζουμε το σύμβολο f^ν όπου ν φυσικός αριθμός, επαγαγωγικά ως εξής:
$f^1 = f$
$f^{\nu+1} = f^\nu \circ f$.
Ως f^0 θεωρούμε την 1_V.

Παραδείγματα 4.4.6

1. *Έστω οι γραμμικές απεικονίσεις $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με*

   $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *με* $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 - x_2, x_2, x_3)$

   και

   $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *με* $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (0, -x_2, -x_3)$

   Τότε $(f+g)(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) + g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2, x_3) + (0, -x_2, -x_3) = (x_1 - x_2, 0, 0)$

   Εύκολα βλέπουμε ότι $Imf = \mathbb{R}^3$, $Img = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$ *και* $Im(f+g) = \langle (1,0,0) \rangle$.

2. *Έστω V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow V$ μία 1-1 γραμμική απεικόνιση με την ιδιότητα $f \circ f = f$. Θα δείξουμε ότι $f = 1_V$.*

   Πράγματι, $f \circ f - f = \mathbf{0}$, *άρα* $f \circ f - f \circ 1_V = 0$, *συνεπώς* $f \circ (f - 1_V) = \mathbf{0}$. *Αυτό συνεπάγεται ότι* $Im(f - 1_V) \subseteq Kerf$.

   Επειδή η f είναι $1-1$ έχουμε ότι, $kerf = \{0_V\}$. *Άρα έχουμε ότι* $Im(f - 1_V) = 0$, *συνεπώς* $(f - 1_V)(x) = 0_V$ *για κάθε* $x \in V$. *Δηλαδή* $f(x) - x = 0_V$ *για κάθε* $x \in V$. *Άρα* $f(x) = x$ *για κάθε* $x \in V$.

Παράδειγμα 4.4.7 *Θα δείξουμε ότι οι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι $\mathcal{L}(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R})$ και $\mathbb{R}^\nu$ είναι ισόμορφοι.*

Έστω $\{e_1, e_2, \cdots, e_\nu\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^\nu$.

Αν $f : \mathbb{R}^\nu \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μία γραμμική απεικόνιση, τότε η f καθορίζεται από τη διατεταγμένη $\nu-$άδα : $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_\nu))$, γιατί αν $x \in \mathbb{R}^\nu$ τότε $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_\nu e_\nu$ και $f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_\nu e_\nu) = \lambda f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_\nu f(e_\nu)$.

Δηλαδή, αν ξέρουμε τις εικόνες των $e_i, i = 1, 2, \cdots, \nu$ *μέσω της* f*, τότε ξέρουμε την εικόνα κάθε* $x \in \mathbb{R}^\nu$ *μέσω της* f.

Θεωρούμε, λοιπόν, την απεικόνιση:

$$\theta : \mathcal{L}(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^\nu \;\; \mu\varepsilon \;\; f \longmapsto (f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_\nu))$$

1. *Η* θ *είναι* $1-1$

   Αν $\theta(f) = \theta(g)$, *δηλαδή* $f(e_1) = g(e_1), f(e_2) = g(e_2), \cdots, f(e_\nu) = g(e_\nu)$ *τότε για* $x \in \mathbb{R}^\nu$ *με* $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_\nu e_\nu$ *έχουμε ότι* $f(x) = \lambda f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_\nu f(e_\nu) = \lambda g(e_1) + \lambda_2 g(e_2) + \cdots + \lambda_\nu g(e_\nu)$, *άρα* $f = g$.

2. *Η* θ *είναι επί.*

   Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu)$ *τότε από το θεώρημα 4.2.9 υπάρχει γραμμική απεικόνιση* $f : \mathbb{R}^\nu \longrightarrow \mathbb{R}$ *με* $f(e_1) = \lambda_1, f(e_2) = \lambda_2, \cdots, f(e_\nu) = \lambda_\nu$. *Άρα* $\theta(f) = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu)$.

3. *Εύκολα επαληθεύουμε ότι η* θ *είναι γραμμική.*

   Άρα η θ *είναι ισομορφισμός.*

Παρακάτω θα δούμε ότι αν V, W είναι διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ με $dim_{\mathbb{F}} V = \nu, dim_{\mathbb{F}} W = \mu$ τότε $\mathcal{L}(V, W) \simeq \mathbb{F}^{\mu \times \nu}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω οι γραμμικές απεικονίσεις $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με

   $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1 + x_2, 0, x_3 - x_2)$

   και

   $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (2x_1 - x_2, x_1 + x_2, 0)$

   Να βρεθούν βάσεις για τους παρακάτω υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$

   (i) $Im(2f - 3g)$

   (ii) $Im(f \circ (2f - g))$

   (iii) $Ker(2g \circ (3f - 7g))$

   (vi) $Im(f \circ g)$

   (v) $Im(g \circ f)$

2. Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ γραμμικές απεικονίσεις με

   $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3 - x_2)$, $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x - 2 + x_3, 0)$ και

   $h(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -2x_3, x_2 - x_1)$

   Να εξετασθεί αν οι f, g, h είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

3. Έστω V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης επί του $\mathbb{F}$.

   Αν $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ τότε να δειχεί ότι:

$$dim_{\mathbb{F}}\left(Im(f+g)\right) \leq dim_{\mathbb{F}}(Imf) + dim_{\mathbb{F}}(Img)$$

4. Έστω V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και $f : V \longrightarrow V$ μία γραμμική απεικόνιση με $f^3 = \mathbf{0}$

   Να δειχθεί ότι η $1_V - f$ είναι ισομορφισμός.

   Υπόδειξη: Εξετάστε αν η $1_V + f + f^2$ είναι η αντίστροφη της $1_V - f$.

5. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και $f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $x \longmapsto \alpha x$

   Να δειχθεί ότι η f_α είναι γραμμική απεικόνιση.

   Να δειχθεί ότι $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | \alpha \in \mathbb{R}\}$

6. Έστω $e_1, e_2, \cdots, e_\nu$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^\nu$ και $f_1, f_2, \cdots, f_\nu : \mathbb{R}^\nu \longrightarrow \mathbb{R}^\nu$ οι γραμμικές απεικονίσεις που ορίζονται ως

   $f_i(e_j) = 0$ αν $i \neq j$ και $f_i(e_i) = 1$

   Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{f_1, f_2, \cdots, f_\nu\}$ είναι μία βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $\mathcal{L}(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R})$

7. Μια F-άλγεβρα είναι ένας διανυσματικός χώρος V επί του F εφοδιασμένος με μια απεικόνιση $V \times V \to V$ με $(x, y) \to xy$ που λέγεται πολλαπλασιασμός έτσι ώστε να ισχύει:

   1. $(xy)z = x(yz)$ για κάθε $x, y, z \in V$
   2. $x(y+z) = xy + xz$ και $(y+z)x = yx + zx$ για κάθε $x, y, z \in V$
   3. $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$ για κάθε $x, y \in V$ και $\lambda \in F$.

   (i) Να δειχθεί ότι αν V ένας διανυσματικός χώρος επί του F τότε ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(V, V)$ είναι μια F-άλγεβρα με πολ/σμό τη σύνθεση των απεικονίσεων.

   (ii) Να δειχθεί ότι ο διανυσματικός χώρος των $\nu \times \nu$ πινάκων με στοιχεία από το F, $F^{\nu\times\nu}$, είναι μια F-άλγεβρα με πολ/σμό τον συνήθη πολ/σμό των πινάκων.

4.5 ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΜΙΑ ΒΑΣΗ ΕΝΟΣ ΥΠΟΧΩΡΟΥ

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του F διάστασης μ και $K \leq V$ με $K =< x_1, \ldots, x_\rho >$.

Θεωρούμε μια διατεταγμένη βάση $\hat{v} = (v_1, \ldots, v_\mu)$ του V και την απεικόνιση $\sigma : V \to F^{1\times\mu}$ με $x \to [x]_{\hat{v}}^t$. Η σ είναι ισομορφισμός επειδή είναι σύνθεση δύο ισομορφισμών:

$$V \to F^{\mu\times 1} \text{ με } x \to [x]_{\hat{v}} \quad \text{και} \quad F^{\mu\times 1} \to F^{1\times\mu} \text{ με } y \to y^t.$$

Επειδή η σ είναι ισομορφισμός, έχουμε ότι $K \simeq \sigma(K)$ και $\{\kappa_1, \ldots, \kappa_\tau\}$ είναι μια βάση του K αν και μόνο αν $\{\sigma(\kappa_1), \ldots, \sigma(\kappa_\tau)\}$ είναι μια βάση του $\sigma(K)$.

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} [x_1]^t \\ [x_2]^t \\ \vdots \\ [x_\rho]^t \end{pmatrix} \in F^{\rho\times\mu}$.

Εφαρμόζουμε στον A στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών μέχρι να πάρουμε ένα πίνακα A' με

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha'_{1j_1} & \cdots & & & & & & \alpha'_{1\mu} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdot & \cdots & 0 & \alpha'_{2j_2} & & \cdots & & \alpha'_{2\mu} \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdot & \cdots & 0 & \cdot & \cdots & 0 & \alpha'_{\tau j_\tau} \cdots & \alpha'_{\tau\mu} \\ \vdots & & \vdots & & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & & & & & 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in F^{\rho\times\mu} \text{ με } \alpha'_{ij_i} \neq 0, 1 \leq i \leq \tau.$$

Τότε ξέρουμε ότι $\Gamma_A = \Gamma_{A'}$ και οι μη μηδενικές γραμμές του A' είναι μια βάση για τον Γ_A.
Αλλά $\sigma(K) = \Gamma_A = \Gamma_{A'}$. Άρα

$$\{\alpha'_{1j_1} v_{j_1} + \cdots + \alpha'_{1\mu} v_\mu, \alpha'_{2j_2} v_{j_2} + \cdots + \alpha'_{2\mu} v_\mu, \cdots, \alpha'_{\tau j_\tau} v_{j_\tau} + \cdots + \alpha'_{\tau\mu}\}$$

είναι μια βάση του K.

Παραδείγματα

1. Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3[x]$ και $K =< p(x), q(x), \phi(x) >$ όπου $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$, $q(x) = 2 - x + 2x^2 + x^3$ και $\phi(x) = 3 + 6x + 3x^2 + 4x^3$. Να βρούμε μια βάση για τον K.

   Θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $\hat{\nu} = (1, x, x^2, x^3)$ του $\mathbb{R}^3[x]$. Τότε

   $$[p(x)]_{\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [q(x)]_{\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } [\phi(x)]_{\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   Άρα

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 3r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & \end{pmatrix}$$

   $$\xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   άρα το $\{1 + x + x^2 + x^3, -3x - x^3\}$ είναι μια βάση του K.

2. Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^{2\times 2}$ και $K =< B_1, B_2, B_3, B_4 >$ με

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Να βρούμε μια βάση του K.

Έστω

$$\hat{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

η κανονική βάση του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ με τη φυσική διάταξη.
Τότε

$$[B_1]_{\hat{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [B_2]_{\hat{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ [B_3]_{\hat{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \text{και } [B_4]_{\hat{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - 2r_1 \\ r_4 \to r_4 - r_1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & -11 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 \to r_3 - 4r_2 \\ r_4 \to r_4 - r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

άρα το

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια βάση του K.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}_3[x]$ που παράγεται από τα: $p_1(x) = x^2 + 3x^3$, $p_2(x) = 3 + 5x^2 - 2x^3$ και $p_3(x) = -2 + 7x - 8x^3$.

2. Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^{3\times 2}$ που παράγεται από

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 8 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \text{και } A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 5 \\ -1 & \end{pmatrix}.$$

3. Έστω K ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^{3\times 4}$ που παράγεται από

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

και Λ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^{3\times 4}$ που παράγεται από

$$B_1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \\ 9 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ και } B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί μια βάση του $K + \Lambda$.

Κεφάλαιο 5

ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

5.1 ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ

Εδώ θα δείξουμε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση από ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης σ' ένα άλλο μπορεί ν' απαρασταθεί με ένα πίνακα. Για την αναπαράσταση αυτή χρειάζεται μια επιλογή βάσεων των δύο χώρων.

Θα δούμε ότι η αναπαράσταση αυτή είναι τέτοια ώστε ο πίνακας του αθροίσματος δύο γραμμικών απεικονίσεων ισούται με το άθροισμα των αντίστοιχων πινάκων, και ο πίνακας της σύνθεσης δύο γραμμικών απεικονίσεων ισούται με το γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων.

Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του F πεπερασμένης διάστασης και $f : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση.

Θεωρούμε μια διατεταγμένη βάση του V, $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$ και μια διατεγμένη βάση του W, $\hat{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$.

Ξέρουμε ότι η f καθορίζεται από τα $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_\mu)$.

Αν $x \in V$ και $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \alpha_i$ τότε $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i f(\alpha_i)$.

Επειδή $\{\beta_1, \ldots, \beta_\nu\}$ είναι μια βάση του W, κάθε $f(\alpha_i)$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$. Έστω

$$\begin{aligned}
f(\alpha_1) &= x_{11}\beta_1 + x_{21}\beta_2 + \ldots + x_{\nu 1}\beta_\nu \\
&\vdots \\
f(\alpha_i) &= x_{1i}\beta_1 + x_{2i}\beta_2 + \ldots + x_{\nu i}\beta_\nu \\
&\vdots \\
f(\alpha_\mu) &= x_{1\mu}\beta_1 + x_{2\mu}\beta_2 + \ldots + x_{\nu\mu}\beta_\nu.
\end{aligned}$$

Δηλαδή έχουμε $[f(\alpha_i)]_{\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{\nu i} \end{pmatrix}$.

Είναι σαφές ότι τα x_{ij}, $i = 1, \ldots, \nu$, $j = 1, \ldots, \mu$ καθορίζουν την f. Πράγματι

$$(*) \qquad \begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i f(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{\nu} x_{ij}\beta_j \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\mu} x_{1i}\lambda_i \right) \beta_1 + \left(\sum_{i=1}^{\mu} x_{2i}\lambda_i \right) \beta_2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{\mu} x_{\nu i}\lambda_i \right) \beta_\nu.
\end{aligned}$$

Ορισμός 5.1.1 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης επί του F, και $f : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$ μια διατεταγμένη βάση του V και $\hat{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$ μια διατεταγμένη βάση του W τότε ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1\mu} \\ x_{21} & \cdots & x_{2\mu} \\ \vdots & & \\ x_{i1} & \cdots & x_{i\mu} \\ \vdots & & \\ x_{\nu 1} & \cdots & x_{\nu\mu} \end{pmatrix} \in F^{\nu\times\mu}$ όπου η i-στήλη του A είναι η $\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{\nu i} \end{pmatrix}$ με $f(\alpha_i) = x_{1i}\beta_1 + x_{2i}\beta_2 + \ldots + x_{\nu i}\beta_\nu$, λέγεται ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f ως προς τις διατεταγμένες βάσεις $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$, και συμβολίζεται με $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta})$.*

Ο τρόπος που η f αναπαρίσταται από τον A, μέσω μιας επιλογής βάσεων για V και W, φαίνεται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 5.1.2 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του F πεπερασμένης διάστασης και $f : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση. Έστω $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$ μια διατεταγμένη βάση του V, $\hat{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$ μια διατεταγμένη βάση του W και $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = A$ ο πίνακας της f ως προς $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$. Τότε για κάθε στοιχείο x του V με $x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \alpha_i$ έχουμε ότι $f(x) = \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j \beta_j$ με $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_\nu \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_\mu \end{pmatrix}$. Δηλαδή, $[f(x)]_{\hat{\beta}} = A[x]_{\hat{\alpha}}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από την ιδότητα $(*)$ πριν τον ορισμό 5.1.1.

Παρατήρηση Επισημαίνουμε ότι αν $f : V \to W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση και $\dim_F V = \mu$, $\dim_F W = \nu$, τότε ο πίνακας της f ως προς κάποιες διατεταγμένες βάσεις των V και W είναι ένας $\nu \times \mu$ πίνακας.

Παραδείγματα 5.1.3

1. *Έστω η γραμμική απεικόνιση* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *με* $(x_1, x_2) \to (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_1)$. *Θεωρούμε τις ακόλουθες διατεταγμένες βάσεις των* $\mathbb{R}^2$ *και* $\mathbb{R}^3$

$$\hat{\alpha} = ((1,0),(0,1)) \text{ και } \hat{\beta} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)).$$

Τότε $A = (f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ *και*

1η-στήλη του $A = [f(1,0)]_{\hat{\beta}}$

2η-στήλη του $A = [f(0,1)]_{\hat{\beta}}$.

Έχουμε

$$f(1,0) = (1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$$
$$f(0,1) = (-1,1,0) = -1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

άρα

$$[f(1,0)]_{\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } [f(0,1)]_{\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

συνεπώς $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Αν $\hat{\beta}' = ((0,0,1),(1,0,0),(0,1,0))$ *τότε* $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Αν θεωρήσουμε τη διατεταγμένη βάση $\hat{\gamma} = ((1,1),(1,0))$ *του* $\mathbb{R}^2$ *τότε* $(f : \hat{\gamma}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. *Έστω η γραμμική απεικόνιση* $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ *με* $p(x) \to p'(x)$.
Θεωρούμε τις διατεταγμένες βάσεις: $\hat{\gamma} = (1, x, x^2, x^3)$ *για τον* $\mathbb{R}_3[x]$ *και* $\hat{\beta} = (1, x, x^2)$ *για τον* $\mathbb{R}_2[x]$.
Τότε $A = (f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ *και*

1η-στήλη του $A = [f(1)]_{\hat{\beta}}$

2η-στήλη του $A = [f(x)]_{\hat{\beta}}$

3η-στήλη του $A = [f(x^2)]_{\hat{\beta}}$

4η-στήλη του $A = [f(x^3)]_{\hat{\beta}}$.

Έχουμε

$f(1) = 0 = 0 + 0x + 0x^2$

$f(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2$ *άρα* $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$f(x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2$

$f(x^3) = 3x^2 = 0 + 0x + 3x^2$

3. *Έστω* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *η απεικόνιση που ορίζει την περιστροφή γύρω από την αρχή των αξόνων* $O = (0, 0)$ *κατά γωνία* θ.

   Τότε

   $f((1, 0)) = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$
   $f(0, 1) = (-\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$ *άρα* $(f : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{pmatrix}$

Συμβολισμός

(i) Την ακόλουθη διατεταγμένη βάση του F^ν

$$(e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad e_\nu = (0, 0, \ldots, 0, 1))$$

θα τη συμβολίζουμε με $\hat{e}$ και θα τη λέμε η κανονική βάση του F^ν με τη φυσική διάταξη.

(ii) Την ακόλουθη διατεταγμένη βάση του $F^{\nu\times 1}$

$$\left(E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

θα τη συμβολίσουμε με $\hat{E}$ και θα τη λέμε η κανονική βάση του $F^{\nu\times 1}$ με τη φυσική διάταξη.

Αν και θα χρησιμοποιήσουμε τα ίδια σύμβολα για "διαφορετικά πράγματα" για παράδειγμα

$\hat{e} = (e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ για την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ και,

$\hat{e} = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$ για την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

ή

$\hat{E} = \left(E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ για τη κανονική βάση του $F^{2\times 1}$ και

$\hat{E} = \left(E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ για τη κανονική βάση του $F^{3\times 1}$

θα είναι σαφές σε τι αναφερόμαστε κάθε φορά.

Παράδειγμα 5.1.4 *Έστω $A \in F^{\nu\times\mu}$ και $\gamma_A : F^{\mu\times 1} \to F^{\nu\times 1}$ με $X \to AX$.*
Επειδή AE_i είναι η i-στήλη του A, $1 \leq i \leq \mu$ εύκολα επαληθεύουμε ότι $(\gamma_A : \hat{E}, \hat{E}) = A$.

Παρατήρηση 5.1.5 *Υπενθυμίζουμε ότι αν $A \in F^{\nu\times\mu}$ τότε ο υπόχωρος του $F^{1\times\mu}$ που παράγεται από τις γραμμές του A συμβολίζεται με Γ_A και ο υπόχωρος του $F^{\nu\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες του A συμβολίζεται με Σ_A. Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του F και $f : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση. Έστω τώρα $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$ μια διατεταγμένη βάση του V, $\hat{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$ μια διατεταγμένη βάση του W και $A = (f : \hat{\alpha}, \hat{\beta})$. Συνεπώς η i-στήλη του A είναι $[f(\alpha_i)]_{\hat{\beta}}$, $1 \leq i \leq \mu$. Επειδή η απεικόνιση $[\ \ ]_{\hat{\beta}} : W \to F^{\nu\times 1}$ με $y \to [y]_{\hat{\beta}}$ είναι ισομορφισμός έπεται ότι*

$$< f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_\mu) > \simeq < [f(\alpha_1)]_{\hat{\beta}}, \ldots, [f(\alpha_\mu)]_{\hat{\beta}} > = \Sigma_A$$

Άρα $Imf \simeq \Sigma_A$ και αυτό συνεπάγεται ότι $\dim_F Imf = \dim_F \Sigma_A$.

Στα ακόλουθα δύο Θεωρήματα θα δούμε ότι ο πίνακας του αθροίσματος δύο γραμμικών απεικονίσεων είναι το άθροισμα των αντίστοιχων πινάκων και ο πίνακας της σύνθεσης δύο γραμμικών απεικονίσεων είναι το γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων. Θα διαπιστώσουμε ότι η απόδειξή τους είναι άμεση συνέπεια των ορισμών.

Θεώρημα 5.1.6 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του F και $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$ μια διατεταγμένη βάση του V, $\hat{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$ μια διατεταγμένη βάση του W. Αν $f, g : V \to W$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις και $\lambda \in F$, τότε*

1. $(f + g : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) + (g : \hat{\alpha}, \hat{\beta})$
2. $(\lambda f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \lambda(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta})$

Απόδειξη. Έστω

$$\begin{aligned} f(\alpha_1) &= x_{11}\beta_1 + x_{21}\beta_2 + \ldots + x_{\nu 1}\beta_\nu \\ f(\alpha_2) &= x_{12}\beta_1 + x_{22}\beta_2 + \ldots + x_{\nu 2}\beta_\nu \\ &\vdots \\ f(\alpha_\mu) &= x_{1\mu}\beta_1 + x_{2\mu}\beta_2 + \ldots + x_{\nu\mu}\beta_\nu. \end{aligned}$$

Τότε

$$(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1\mu} \\ \vdots & & & \\ x_{\nu 1} & x_{\nu 2} & \cdots & x_{\nu\mu} \end{pmatrix}.$$

Έστω

$$\begin{aligned} g(\alpha_1) &= \rho_{11}\beta_1 + \rho_{21}\beta_2 + \ldots + \rho_{\nu 1}\beta_\nu \\ g(\alpha_2) &= \rho_{12}\beta_1 + \rho_{22}\beta_2 + \ldots + \rho_{\nu 2}\beta_\nu \\ &\vdots \\ g(\alpha_\mu) &= \rho_{1\mu}\beta_1 + \rho_{2\mu}\beta_2 + \ldots + \rho_{\nu\mu}\beta_\nu. \end{aligned}$$

Τότε

$$(g : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1\mu} \\ \vdots & & \\ \rho_{\nu 1} & \cdots & \rho_{\nu\mu} \end{pmatrix}.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι $(f+g)(\alpha_i) = f(\alpha_i) + g(\alpha_i) = x_{1i}\beta_1 + x_{2i}\beta_2 + \ldots + x_{\nu i}\beta_\nu + \rho_{1i}\beta_1 + \ldots + \rho_{\nu i}\beta_\nu = (x_{1i} + \rho_{1i})\beta_1 + (x_{2i} + \rho_{2i})\beta_2 + \ldots + (x_{\nu i} + \rho_{\nu i})\beta_\nu$, για κάθε $1 \leq i \leq \mu$.
Άρα

$$(f+g : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} x_{11} + \rho_{11} & \cdots & x_{1\mu} + \rho_{1\mu} \\ \vdots & & \\ x_{\nu 1} + \rho_{\nu 1} & \cdots & x_{\nu\mu} + \rho_{\nu\mu} \end{pmatrix} = (f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) + (g : \hat{\alpha}, \hat{\beta}).$$

Άρα εδείχθει η 1.

Για την 2. έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (\lambda f)(\alpha_i) = \lambda f(\alpha_i) &= \lambda(x_{1i}\beta_1 + x_{2i}\beta_2 + \ldots + x_{\nu i}\beta_\nu) \\ &= (\lambda x_{1i})\beta_1 + (\lambda x_{2i})\beta_2 + \ldots + (\lambda x_{\nu i})\beta_\nu. \end{aligned}$$

Άρα

$$(\lambda f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} & \cdots & \lambda x_{1\mu} \\ \vdots & & & \\ \lambda x_{\nu 1} & \lambda x_{\nu 2} & \cdots & \lambda x_{\nu\mu} \end{pmatrix} = \lambda(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}).$$

Θεώρημα 5.1.7 *Έστω V, W, U τρεις διανυσματικοί χώροι επί του F και $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$ μια διατεταγμένη βάση του V, $\hat{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$ μια διατεταγμένη βάση του W και $\hat{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_\xi)$ μια διατεταγμένη βάση του U. Αν $f : V \to W$ και $g : W \to U$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις τότε*

$$(g \circ f : \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) = (g : \hat{\beta}, \hat{\gamma})(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta})$$

Απόδειξη. Έστω ότι

$$(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1\mu} \\ \vdots & & \\ x_{\nu 1} & \cdots & x_{\nu\mu} \end{pmatrix} \in F^{\nu\times\mu}.$$

Άρα $f(\alpha_\tau) = x_{1\tau}\beta_1 + x_{2\tau}\beta_2 + \ldots + x_{\nu\tau}\beta_\nu$ $1 \leq \tau \leq \mu$. Έστω

$$(g : \hat{\beta}, \hat{\gamma}) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1\nu} \\ \vdots & & \\ \rho_{\xi 1} & \cdots & \rho_{\xi\nu} \end{pmatrix} \in F^{\xi\times\nu}.$$

Άρα $g(\beta_\tau) = \rho_{1\tau}\gamma_1 + \rho_{2\tau}\gamma_2 + \ldots + \rho_{\xi\tau}\gamma_\xi$ $1 \leq \tau \leq \nu$.

Τότε το ij-στοιχείο του πίνακα $(g : \hat{\beta}, \hat{\gamma})(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ είναι το $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\nu} \rho_{i\kappa} x_{\kappa j}$.

Έστω ότι

$$(g \circ f : \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1\mu} \\ \vdots & & \\ \sigma_{\xi 1} & \cdots & \sigma_{\xi\mu} \end{pmatrix} \in F^{\xi\times\mu}.$$

Συνεπώς
$$(g \circ f)(\alpha_\tau) = \sigma_{1\tau}\gamma_1 + \sigma_{2\tau}\gamma_2 + \ldots + \sigma_{\xi\tau}\gamma_\xi \quad 1 \le \tau \le \mu.$$
Θεωρούμε το στοιχείο
$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha_j) &= g(f(\alpha_j)) = g(x_{1j}\beta_1 + x_{2j}\beta_2 + \ldots + x_{\nu j}\beta_\nu) \\ &= x_{1j}g(\beta_1) + x_{2j}g(\beta_2) + \ldots + x_{\nu j}g(\beta_\nu) \\ &= x_{1j}\left(\sum_{\lambda=1}^{\xi}\rho_{\lambda 1}\gamma_\lambda\right) + x_{2j}\left(\sum_{\lambda=2}^{\xi}\rho_{\lambda 2}\gamma_\lambda\right) + \ldots + x_{\nu j}\left(\sum_{\lambda=2}^{\xi}\rho_{\lambda\nu}\gamma_\lambda\right).\end{aligned}$$
Το ij-στοιχείο του πίνακα $(g \circ f : \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ είναι ο συντελεστής του γ_i στην ανωτέρω ισότητα. Άρα το ij-στοιχείο του $(g \circ f : \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ είναι το
$$x_{1j}\rho_{i1} + x_{2j}\rho_{i2} + \ldots + x_{\nu j}\rho_{i\nu} = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\rho_{i\kappa}x_{\kappa j}.$$
Δείξαμε ότι
$$ij\text{-στοιχείο του } (g : \hat{\beta}, \hat{\gamma})(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = ij\text{-στοιχείο του } (g \circ f : \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$$
Συνεπώς δείξαμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση
$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1 - 2x_2, x_3, x_1 + x_2)$$
και $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση
$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1 + x_2 + x_3, 0, x_1).$$
Τότε $(f : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $(g : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Άρα $(f + g : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
και $(g \circ f : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
και $(f \circ g : \hat{e}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Τώρα αν $w = (-1, 5, 2) \in \mathbb{R}^3$ τότε
$$[(f \circ g)(w)]_{\hat{e}} = (f \circ g : \hat{e}, \hat{e})[w]_{\hat{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$
και επομένως $f(w) = 6e_1 - e_2 + 6e_3 = (6, -1, 6)$.

Πρόταση 5.1.8 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του F και $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$ μια διατεταγμένη βάση του V και $\hat{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$ μια διατεταγμένη βάση του W. Έστω*

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1\mu} \\ \vdots & & \\ x_{\nu 1} & \cdots & x_{\nu\mu} \end{pmatrix} \in F^{\nu \times \mu}.$$

Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ με την ιδιότητα $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = A$.

Απόδειξη. Επειδή $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$ είναι μια διατεταγμένη βάση του V ξέρουμε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ με

$$\begin{aligned} f(\alpha_1) &= x_{11}\beta_1 + \ldots + x_{\nu 1}\beta_\nu \\ f(\alpha_2) &= x_{12}\beta_1 + \ldots + x_{\nu 2}\beta_\nu \\ &\vdots \\ f(\alpha_\mu) &= x_{1\mu}\beta_1 + \ldots + x_{\nu\mu}\beta_\nu \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = A$.

Παραδείγματα

1. Έστω οι διατεταγμένες βάσεις $\hat{\alpha} = ((1,1,1), (1,0,1), (0,0,1))$ και $\hat{e} = (e_1, e_2, e_3)$ του $\mathbb{R}^3$. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με $(f : \hat{\alpha}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix} = A$. Να υπολογισθεί το $f(-1,2,4)$.

   Από την Πρόταση 5.1.8 έχουμε ότι η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $(f : \hat{\alpha}, \hat{e}) = A$ είναι η ακόλουθη

   $$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (1,0,2) \\ f(1,0,1) &= (0,1,7) \\ f(0,0,1) &= (3,5,8). \end{aligned}$$

   Άρα, αν $x \in \mathbb{R}^3$, τότε $x = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(2,0,1) + \lambda_3(0,0,2)$ και συνεπώς

   $$\begin{aligned} f(x) &= \lambda_1 f(1,1,1) + \lambda_2 f(1,0,1) + \lambda_3 f(0,0,1) \\ &= \lambda_1(2,0,2) + \lambda_2(0,1,7) + \lambda_3(3,5,8). \end{aligned}$$

   Τώρα για $x = (-1,2,4)$ έχουμε ότι

   $$(-1,2,4) = 2(1,1,1) - 3(1,0,1) + 5(0,0,1)$$

   και άρα
   $$f(-1,2,4) = 2(1,0,2) - 3(0,1,7) + 5(3,5,8) = (17,22,23).$$

2. Έστω οι διατεταγμένες βάσεις $\hat{\alpha}, \hat{e}$ του $\mathbb{R}^3$ που δόθηκαν στο παράδειγμα 1.

   Έστω η γραμμική απεικόνιση $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $(g : \hat{e}, \hat{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$. Να υπολογισθεί το $g(-1, 0, 3)$.

   Η γραμμική απεικόνιση $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $(g : \hat{e}, \hat{\alpha}) = B$ είναι η ακόλουθη

$$\begin{aligned} g(1,0,0) &= (1,1,1) + 3(1,0,1) = (4,1,4) \\ g(0,1,0) &= -(1,1,1) + 8(1,0,1) + (0,0,1) = (7,-1,8) \\ g(0,0,1) &= 2(1,1,1) + 7(1,0,1) = (9,2,9). \end{aligned}$$

   Άρα αν $x \in \mathbb{R}^3$ τότε $[g(x)]_{\hat{\alpha}} = B[x]_{\hat{e}}$. Συνεπώς

$$[g(-1,0,3)]_{\hat{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Άρα $g(-1,0,3) = 5(1,1,1) + 18(1,0,1) + 0(0,0,1) = (23,5,23)$.

Ως Πόρισμα του 5.1.6 και 5.1.8 παίρνουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 5.1.9 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του F διάστασης μ και ν αντίστοιχα. Τότε $\mathcal{L}(V,W) \simeq F^{\nu\times\mu}$.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε μια διατεταγμένη βάση $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$ του V και μια διατεταγμένη βάση $\hat{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$ του W. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{L}(V,W) &\to F^{\nu\times\mu} \\ f &\to (f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}). \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 5.1.6 έπεται ότι η Θ είναι γραμμική και από την Πρόταση 5.1.8 έπεται ότι η Θ είναι $1-1$ και επί.

Ένα άμεσο Πόρισμα του Θεωρήματος 5.1.9 είναι το ακόλουθο.

Πόρισμα 5.1.10 *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του F, διάστασης μ και ν αντίστοιχα. Τότε $\dim_F \mathcal{L}(V,W) = \mu\nu$.*

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας δίνει ένα κριτήριο για το πότε μια γραμμική απεικόνιση είναι ισομορφισμός.

Θεώρημα 5.1.11 *Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του F διάστασης ν και $f : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε η f είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο πίνακας της f ως προς κάποια επιλογή βάσεων των V και W είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Έστω $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ μια διατεταγμένη βάση του V και $\hat{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$ μια διατεταγμένη βάση του W.
Έστω ότι η $f : V \to W$ είναι ισομορφισμός. Θα δείξουμε ότι ο $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = A$ είναι αντιστρέψιμος. Επειδή η f είναι ισομορφισμός, υπάρχει η αντίστροφη της $f^{-1} : W \to V$, η οποία είναι επίσης ισομορφισμός και $f \circ f^{-1} = 1_V$, $f^{-1} \circ f = 1_W$. Από το Θεώρημα 5.1.7 έπεται ότι

$$(1_V : \hat{\alpha}, \hat{\alpha}) = (f^{-1} \circ f : \hat{\alpha}, \hat{\alpha}) = (f^{-1} : \hat{\beta}, \hat{\alpha})(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta})$$
$$(1_W : \hat{\beta}, \hat{\beta}) = (f \circ f^{-1} : \hat{\beta}, \hat{\beta}) = (f : \hat{\alpha}, \hat{\beta})(f^{-1} : \hat{\beta}, \hat{\alpha})$$

Αλλά $(1_V : \hat{\alpha}, \hat{\alpha}) = (1_W : \hat{\beta}, \hat{\beta}) = I_\nu \in F^{\nu \times \nu}$.
Άρα, αν $B = (f^{-1} : \hat{\beta}, \hat{\alpha})$, τότε από τις παραπάνω ισότητες έχουμε ότι $BA = I_\nu = AB$.

Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = B = (f^{-1} : \hat{\beta}, \hat{\alpha})$.

Έστω τώρα ότι έχουμε μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ με $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = A$ ένα αντιστρέψιμο πίνακα. Θα δείξουμε ότι η f είναι ισομορφισμός.
Θεωρούμε τον πίνακα $A^{-1} \in F^{\nu \times \mu}$. Από την Πρόταση 5.1.8 έχουμε ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $g : W \to V$ με $(g : \hat{\beta}, \hat{\alpha}) = A^{-1}$.

Από το Θεώρημα 5.1.6 έχουμε ότι

$$(f \circ g : \hat{\beta}, \hat{\beta}) = (f : \hat{\alpha}, \hat{\beta})(g : \hat{\beta}, \hat{\alpha}) = AA^{-1} = I_\nu$$
$$(g \circ f : \hat{\alpha}, \hat{\alpha}) = (g : \hat{\beta}, \hat{\alpha})(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = A^{-1}A = I_\nu$$

Από την ισότητα $(f \circ g : \hat{\beta}, \hat{\beta}) = I_\nu$ συνεπάγεται ότι $(f \circ g)(\beta_i) = \beta_i$, $1 \leq i \leq \nu$. Δηλαδή $(f \circ g)(\beta_i) = \beta_i = 1_W(\beta_i)$, $1 \leq i \leq \nu$. Συνεπώς έχουμε ότι $f \circ g = 1_W$.
Ανάλογα από την $(g \circ f : \hat{\alpha}, \hat{\alpha}) = I_\nu$ έπεται ότι $g \circ f = 1_V$.
Άρα η g είναι η αντίστροφη της f. Συνεπώς η f είναι ισομορφισμός.

Παρατήρηση 5.1.12 *Από την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.11 έπεται ότι αν η f είναι ισομορφισμός, τότε ο πίνακας της f ως προς* **κάθε** *επιλογή βάσεων είναι αντιστρέψιμος.*

Πόρισμα 5.1.13 *Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι πίνακας ενός ισομορφισμού.*

Απόδειξη. Έστω $A \in F^{\nu \times \nu}$, και έστω ότι ο A είναι ο πίνακας ενός ισομορφισμού $f : V \to W$ ως προς κάποια επιλογή βάσεων των V, W. Τότε από το Θεώρημα 5.1.10 έπεται ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.
Έστω τώρα ότι ο $A \in F^{\nu \times \nu}$ είναι αντιστρέψιμος.
Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του F διάστασης ν και έστω $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ μια διατεταγμένη βάση του V και $\hat{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$ μια διατεταγμένη βάση του W. Από την Πρόταση 5.1.8 έχουμε ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ με $f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = A$. Επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος από το Θεώρημα 5.1.11 έπεται ότι η f είναι ισομορφισμός. Άρα ο A είναι ο πίνακας ενός ισομορφισμού.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $(x_1, x_2) \to (x_1 - 2x_2, -3x_1, 2x_2 - 5x_1)$

   (i) Να βρεθεί ο πίνακας $(f : \hat{e}, \hat{e})$

   (ii) Αν $\hat{\alpha} = ((0,1),(1,1))$ και $\hat{\beta} = ((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$ να βρεθεί ο πίνακας $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta})$.

2. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $(x_1, x_2, x_3) \to (3x_1 - 5x_2, 6x_2 - x_3 + x_1, 8x_1)$

   (i) Να βρεθεί ο πίνακας $(f : \hat{e}, \hat{e})$.

   (ii) Αν $\hat{\alpha} = ((1,-1,0),(1,0,-1)),(1,0,0))$ να βρεθεί ο πίνακας $(f : \hat{\alpha}, \hat{\alpha})$.

3. Έστω ότι η $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι μια γραμμική απεικόνιση με $g(1,0,0) = (2,1,0)$, $g(1,1,0) = (-1,7,3)$, $g(1,1,1) = (1,-1,-2)$. Να βρεθεί ο πίνακας $(g : \hat{e}, \hat{e})$ και $(g^2 : \hat{e}, \hat{e})$.

4. Έστω $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ με $p(x) \to p'(x)$ και έστω οι διατεταγμένες βάσεις του $\mathbb{R}_3[x]$, $\hat{\alpha} = (1, x, x^2)$ και $\hat{\beta} = (1, 2x, 4x^2 - 2)$. Να βρεθεί ο $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ και $(f^2 : \hat{\alpha}, \hat{\alpha})$.

5. Έστω οι $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίστηκαν στις ασκήσεις 2 και 3 αντίστοιχα. Να βρεθούν οι πίνακες $(2f + 3g : \hat{e}, \hat{e})$, $(f \circ g : \hat{e}, \hat{e})$ και $(f \circ g : \hat{e}, \hat{e})$.

6. (i) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του F διάστασης μ και $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$ μια διατεταγμένη βάση του V. Αν $f : V \to V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε να δειχθεί ότι $(f : \hat{\alpha}, \hat{\alpha}) = I_\mu \in F^{\mu \times \mu}$.

   (ii) Να βρεθούν διατεταγμένες βάσεις $\hat{\beta}, \hat{\gamma}$ του $\mathbb{R}^3$ με
$$(1_{\mathbb{R}^3} : \hat{\beta}, \hat{\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Έστω η απεικόνιση $g : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \to \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$.

   (i) Να δειχθεί ότι η f είναι γραμμική.

   (ii) Αν $\hat{\alpha} = (1, x, 1 + x^2)$ μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ και
$$\hat{\beta} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$
   μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^{2\times 2}$, να βρεθεί ο πίνακας $(g : \hat{\alpha}, \hat{\beta})$.

8. Έστω $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ με
$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \to \alpha_0 + (\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_0)x + (\alpha_3 - \alpha_2)x^3$$

   (i) να δειχθεί ότι η f είναι γραμμική

   (ii) να δειχθεί ότι το $\{1 + x^3, x, x + x^3, x^2 + x^3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}_3[x]$

   (iii) αν $\hat{\alpha} = (1, x, x^1, x^3)$ και $\hat{\beta} = (1+x^3, x, x+x^3, x^2+x^3)$ τότε να βρεθούν οι πίνακες
$$(f : \hat{\alpha}, \hat{\alpha}), \quad f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}), \quad (f : \hat{\beta}, \hat{\alpha}), \quad (f^2 : \hat{\alpha}, \hat{\alpha}), \quad (f^2 : \hat{\alpha}, \hat{\beta}).$$

9. Έστω οι διατεταγμένες βάσεις του $\mathbb{R}_3[x]$

$$\hat{\alpha} = (1 + x^3, x, x + x^3, x^2 + x^3), \quad \hat{\beta} = (1, x, x^2, x^3).$$

(i) Έστω η γραμμική άπεικόνιση

$$f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x] \text{ με } (f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογισθεί το $f(1 - 2x + 3x^2)$.

(ii) Έστω η γραμμική απεικόνιση

$$g : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x] \text{ με } (g : \hat{\beta}, \hat{\alpha}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογισθεί το $g(3 + 5x - 2x^2 + x^3)$.

10. (i) Έστω $A, B \in F^{\nu \times \mu}$. Να δειχθεί ότι $\gamma_{A+B} = \gamma_A + \gamma_B$.

(ii) Έστω $A \in F^{\nu \times \mu}$ και $B \in F^{\mu \times \kappa}$. Να δειχθεί ότι $\gamma_{AB} = \gamma_A \circ \gamma_B$.

11. Έστω $A \in F^{\nu \times \nu}$. Να δειχθεί ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

(i) ο A είναι αντιστρέψιμος

(ii) $\ker \gamma_A = 0$

(iii) $Im\gamma_A = F^{\nu \times 1}$.

12. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

(i) Να βρεθεί η $\dim_{\mathbb{R}} Im\gamma_A$

(ii) Να εξετασθεί αν ο A είναι αντιστρέψιμος.

13. Αν $A, B \in F^{\nu \times \nu}$ αντιστρέψιμος τότε να δειχθεί ότι και ο $AB \in F^{\nu \times \nu}$ είναι αντιστρέψιμος.

(Υπόδ. $(\gamma_{AB} : \hat{E}, \hat{E}) = AB$ και $\gamma_{AB} = \gamma_A \circ \gamma_B$.)

5.2 ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΒΑΣΗΣ-ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Εδώ θα δούμε πως σχετίζονται δύο πίνακες που αναπαριστούν την ίδια γραμμική απεικόνιση ως προς διαφορετική επιλογή βάσεων.

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του F διάστασης μ και $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$, $\hat{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_\mu)$ δύο διατεταγμένες βάσεις του.

Αν $x \in V$ τότε $x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \alpha_i$ και $x = \sum_{i=1}^{\mu} \rho_i \beta_i$. Θα εξετάσουμε πως σχετίζονται οι συντελεστές του x ως προς τη διατεταγμένη βάση $\hat{\alpha}$ με τους συντελεστές του x ως προς τη διατεταγμένη βάση $\hat{\beta}$.

Θεωρούμε τον πίνακα $A = (1_V : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in F^{\mu \times \mu}$. Τότε έχουμε $[1_V(x)]_{\hat{\beta}} = A[x]_{\hat{\alpha}}$.
Άρα

$$[x]_{\hat{\beta}} = A[x]_{\hat{\alpha}}.$$

Ιδιαίτερα, έχουμε ότι $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_\mu \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_\mu \end{pmatrix}$.

Ορισμός 5.2.1 *Έστω V διανυσματικός χώρος επί του F διάστασης μ και $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ δύο διατεταγμένες βάσεις του V.*

Ο πίνακας $(1_V : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in F^{\mu \times \mu}$ λέγεται ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $\hat{\alpha}$ στη $\hat{\beta}$.

Ο πίνακας $A = (1_V : \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ είναι αντιστρέψιμος, ως πίνακας ισομορφισμού και ο αντίστροφος του είναι ο πίνακας $(1_V : \hat{\beta}, \hat{\alpha})$.
Δηλαδή, $A^{-1} = (1_V : \hat{\alpha}, \hat{\beta})^{-1} = (1_V : \hat{\beta}, \hat{\alpha})$.
Είναι φανερό ότι $[x]_{\hat{\alpha}} = A^{-1}[x]_{\hat{\beta}}$.

Παραδείγματα 5.2.2

1. *Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}_2[x]$ και έστω $\hat{\alpha} = (1, x, x^2)$ και $\hat{\beta} = (1, 2x, 4x^2 - 2)$ δύο διατεταγμένες βάσεις του.*
   Τότε ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $\hat{\alpha}$ στη $\hat{\beta}$, $(1_{\mathbb{R}_2[x]}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = A$, έχει

   1η-στήλη του $A = [1]_{\hat{\beta}}$

   2η-στήλη του $A = [x]_{\hat{\beta}}$

   3η-στήλη του $A = [x^2]_{\hat{\beta}}$

   άρα $A = (1_{\mathbb{R}_2[x]}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.
   Συνεπώς αν $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ τότε $[p(x)]_{\hat{\beta}} = A[p(x)]_{\hat{\alpha}}$.
   Για παράδειγμα αν $p(x) = -5 + 3x - 2x^2$ τότε

$$[p(x)]_{\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

άρα $p(x) = (-6)1 + \frac{3}{2}(2x) - \frac{1}{2}(4x^2 - 2)$.
Γενικά αν $p(x) = \kappa_0 + \kappa, x + \kappa_2 x^2$ *τότε*

$$[p(x)]_{\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_0 + \kappa_{2/2} \\ \kappa_{1/2} \\ \kappa_{2/4} \end{pmatrix}.$$

Άρα $p(x) = \left(\kappa_0 + \frac{\kappa_2}{2}\right)1 + \frac{\kappa_1}{2}(2x) + \frac{\kappa_2}{4}(4x^2 - 2)$.
Ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $\hat{\beta}$ *στην* $\hat{\alpha}$ *είναι*

$$(1_{\mathbb{R}_2[x]} : \hat{\beta}, \hat{\alpha}) = ([1]_{\hat{\alpha}}\ [2x]_{\hat{\alpha}}\ [4x^2 - 2]_{\hat{\alpha}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

και βέβαια $A^{-1} = (1_{\mathbb{R}_2[x]} : \hat{\beta}, \hat{\alpha})$.

2. *Έστω* $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ *μια διατεταγμένη βάση του* $F^{\nu\times 1}$ *και* $\hat{E}$ *η κανονική βάση του* $F^{\nu\times 1}$ *με τη φυσική διάταξη.*
Τότε άμεσα βλέπουμε ότι $(1_{F^{\nu\times 1}} : \hat{\alpha}, \hat{E}) = A$ *όπου* $A = (\alpha_1 \ldots \alpha_\nu)$,
δηλαδή η i*-στήλη του* A *είναι το* α_i, $1 \leq i \leq \nu$.

Στην ακόλουθη πρόταση βλέπουμε πως σχετίζονται δύο πίνακες που αναπαριστούν την ίδια γραμμική απεικόνιση ως προς διαφορετική επιλογή βάσης.

Πρόταση 5.2.3 *Έστω* V, W *δύο διανυσματικοί χώροι επί του* F *με* $\dim_F V = \mu$ *και* $\dim_F W = \nu$. *Έστω τώρα* $f : V \to W$ *μια γραμμική απεικόνιση και* $\hat{\alpha}, \hat{\alpha}'$ *δύο διατεταγμένες βάσεις του* V, *και* $\hat{\beta}, \hat{\beta}'$ *δύο διατεταγμένες βάσεις του* W.
Αν $A = (f : \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ *και* $B = (f : \hat{\alpha}', \hat{\beta}')$ *τότε*

$$(1_W : \hat{\beta}, \hat{\beta}')A(1_V : \hat{\alpha}', \hat{\alpha}) = B.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.1.7 έχουμε ότι

$$(1_W : \hat{\beta}, \hat{\beta}')(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta})(1_V : \hat{\alpha}', \hat{\alpha}) = (1_W : \hat{\beta}, \hat{\beta}')(f \circ 1_V : \hat{\alpha}', \hat{\beta}) = (1_W \circ (f \circ 1_V) : \hat{\alpha}', \hat{\beta}').$$

Αλλά $f \circ 1_V = f$ και $1_W \circ f = f$, άρα έπεται το ζητούμενο.

Παρατήρηση Αν $P = (1_W : \hat{\beta}, \hat{\beta}')$ και $Q = (1_V : \hat{\alpha}', \hat{\alpha})$ τότε οι πίνακες $P \in F^{\nu\times\nu}$ και $Q \in F^{\mu\times\mu}$ είναι αντιστρέψιμοι και $B = PAQ$.

Ορισμός 5.2.4 *Έστω* $A, B \in F^{\nu\times\mu}$. *Τότε ο* A *λέγεται ισοδύναμος προς τον* B *αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες,* $P \in F^{\nu\times\nu}$ *και* $Q \in F^{\mu\times\mu}$ *με* $B = PAQ$.

Πρόταση 5.2.5 *Η ανωτέρω σχέση είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο* $F^{\nu\times\mu}$

Απόδειξη. Θα πρέπει να δείξουμε ότι:

(i) Αν $A \in F^{\nu\times\mu}$ τότε ο A είναι ισοδύναμος προς τον A.

(ii) Αν $A, B \in F^{\nu\times\mu}$ και ο A είναι ισοδύναμος προς τον B τότε και ο B είναι ισοδύναμος προς τον A.

(iii) Αν $A, B, \Gamma \in F^{\nu\times\mu}$ και ο A είναι ισοδύναμος προς τον B και ο B είναι ισοδύναμος προς τον Γ τότε ο A είναι ισοδύναμος προς τον Γ.

Πράγματι:
Το (i) έπεται από το ότι $A = I_\nu A I_\mu$.
Για το (ii), έστω ότι $B = PAQ$ με P, Q αντιστρέψιμους πίνακες. Τότε $A = P^{-1}BQ^{-1}$, άρα ο B είναι ισοδύναμος προς τον A.
Για το (iii), έστω ότι $B = PAQ$ και $\Gamma = \Delta BE$ όπου P, Q, Δ, E αντιστρέψιμοι πίνακες. Τότε $\Gamma = \Delta PAQE$. Αλλά ΔP, QE είναι αντιστρέψιμοι (Δες ασκ. 13 του 5.1) άρα ο A είναι ισοδύναμος προς τον Γ.

Παρατήρηση Αν $A, B \in F^{\nu\times\mu}$, και ο ένας είναι ισοδύναμος προς τον άλλο τότε θα λέμε ότι οι A, B είναι ισοδύναμοι και θα γράφουμε $A \sim B$.

Από την Πρόταση 5.2.2 έπεται ότι δύο πίνακες που αναπαριστούν την ίδια γραμμική απεικόνιση είναι ισοδύναμοι. Στην επόμενη πρόταση θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Πρόταση 5.2.6 *Έστω $A, B \in F^{\nu\times\mu}$ δύο ισοδύναμοι πίνακες. Έστω V και W διανυσματικοί χώροι επί του F διάστασης μ και ν αντίστοιχα. Τότε υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ και διατεταγμένες βάσεις $\hat{\alpha}, \hat{\alpha}'$ του V, και $\hat{\beta}, \hat{\beta}'$ του W τέτοιες ώστε $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = A$ και $(f : \hat{\alpha}', \hat{\beta}') = B$.*

Απόδειξη. Επειδή οι A, B είναι ισοδύναμοι υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in F^{\nu\times\nu}$, $Q \in F^{\mu\times\mu}$ με $PAQ = B$. Θεωρούμε τώρα μια διατεταγμένη βάση $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$ του V και μια διατεταγμένη βάση $\hat{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$ του W.
Από την Πρόταση 5.1.8 έπεται ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ με $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = A$.
Έστω $\Delta = P^{-1}$ και έστω η γραμμική απεικόνιση $\rho : W \to W$ με $x \to \rho(x)$, όπου $[\rho(x)]_{\hat{\beta}} = \Delta[x]_{\hat{\beta}}$.
Τότε $(\rho : \hat{\beta}, \hat{\beta}) = \Delta$ και επειδή ο Δ είναι αντιστρέψιμος έπεται ότι η ρ είναι ισομορφισμός. Άρα το $\{\rho(\beta_1), \ldots, \rho(\beta_\nu)\}$ είναι μια βάση του W. Έστω $\hat{\beta}' = (\rho(\beta_1), \ldots, \rho(\beta_\nu))$. Τότε $(1_W : \hat{\beta}', \hat{\beta}) = \Delta = P^{-1}$. Θεωρούμε τώρα τη γραμμική απεικόνιση $\sigma : V \to V$ με $y \to \sigma(y)$ όπου $[\sigma(y)]_{\hat{\alpha}} = Q[y]_{\hat{\alpha}}$. Τότε $(\sigma : \hat{\alpha}, \hat{\alpha}) = Q$ και επειδή ο Q είναι αντιστρέψιμος η σ είναι ισομορφισμός. Άρα το $\{\sigma(\alpha_1), \ldots, \sigma(\alpha_\mu)\}$ είναι μια βάση του V. Έστω $\hat{\alpha}' = (\sigma(\alpha_1), \ldots, \sigma(\alpha_\mu))$. Τότε $(1_V : \hat{\alpha}', \hat{\alpha}) = Q$. Έχουμε ότι $B = PAQ = (1_W : \hat{\beta}, \hat{\beta}')(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta})(1_V : \hat{\alpha}', \hat{\alpha}) = (f : \hat{\alpha}', \hat{\beta}')$.

Τώρα θα δείξουμε ότι αν $f : V \to W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση τότε υπάρχουν βάσεις των V και W ως προς τις οποίες ο πίνακας της f έχει απλή μορφή.

Πρόταση 5.2.7 *Έστω V, W διανυσματικός χώρος επί του F με $\dim_F V = \mu$ και $\dim_F W = \nu$ και έστω $f : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ των V και W αντίστοιχα έτσι ώστε*

$$(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in F^{\nu\times\mu}, \text{ όπου } r = \dim_F Imf.$$

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ *είναι αυτός που έχει στην πάνω αριστερή γωνία τον ταυτοτικο* $r \times r$ *πίνακα και* O *παντού αλλού.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε μια διατεταγμένη βάση του $\ker f$, $(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_\mu)$ και την επεκτείνουμε σε μια διατεταγμένη βάση $\hat{\alpha}$ του V ως εξής: $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_\mu)$. Εύκολα βλέπουμε (δες την απόδειξη 3...) ότι το $\{f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_r)\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του W και το επεκτείνουμε σε μια βάση $\{f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_r), \beta_{r+1}, \ldots$ του W. Έστω τώρα η διατεταγμένη βάση $\hat{\beta} = (f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_r), \beta_{r+1}, \ldots, \beta_\nu)$ του W.
Είναι τώρα άμεσο ότι $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

Πόρισμα 5.2.8 *Έστω* $A \in F^{\nu\times\mu}$. *Τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες* $P \in F^{\nu\times\nu}$, $Q \in F^{\mu\times\mu}$ *με* $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ *όπου* $r = \dim_F \Sigma_A$.

Απόδειξη. Έστω η γραμμική απεικόνιση $\gamma_A : F^{\mu\times 1} \to F^{\nu\times 1}$ με $X \to AX$. Τότε $Im\gamma_A = \langle \gamma_A(E_1), \ldots, \gamma_A(E_\mu)\rangle$ αλλά $\gamma_A(E_i) = AE_i =$ η i-στήλη του A. Άρα $Im\gamma_A$ είναι ο υπόχωρος του $F^{\nu\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες του A δηλαδή $Im\gamma_A = \Sigma_A$.
Τώρα από την Πρόταση 5.2.7 υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ των $F^{\mu\times 1}$ αντίστοιχα έτσι ώστε $(\gamma_A : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, όπου $r = \dim_F Im\gamma_A = \dim_F \Sigma_A$. Αλλά ξέρουμε ότι $(\gamma_A : \hat{E}, \hat{E}) = A$.
Άρα

$$(1_{F^{\nu\times 1}} : \hat{E}, \hat{\beta})(\gamma_A : \hat{E}\hat{E})(1_{F^{\mu\times 1}} : \hat{\alpha}, \hat{E}) = (\gamma_A : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς έχουμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Θα βρούμε αντιστρέψιμους πίνακες P, Q με

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \text{ όπου } r = \dim_{\mathbb{R}} \Sigma_A.$$

Θ' ακολουθήσουμε την απόδειξη της 5.2.8.
Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $\gamma_A : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ με $X \to AX$ και βρίσκουμε ότι

$$\ker \gamma_A = \left\langle \begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Να σημειώσουμε ότι $\ker \gamma_A$ είναι ο χώρος λύσεων του ομογενούς συστήματος $AX = 0$.
Επειδή $\dim_{\mathbb{R}} \ker \gamma_A = 2$ έχουμε ότι $r = \dim_{\mathbb{R}} \Sigma_A = \dim_{\mathbb{R}} Im\gamma_A = 4 - 2 = 2$.

Επεκτείνουμε τη βάση που βρήκαμε για την $\ker \gamma_A$ σε μια βάση του $\mathbb{R}^{4\times 1}$ ως:

$$\hat{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Τώρα

$$\gamma_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } \gamma_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Επεκτείνουμε τα $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ σε μια βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$, έστω

$$\hat{\beta} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Τότε $(\gamma_A : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Άρα

$$A = (\gamma_A : \hat{E}, \hat{E}) = (1_{\mathbb{R}^{3\times 1}} : \hat{\beta}, \hat{E})(\gamma_A : \hat{\alpha}, \hat{\beta})(1_{\mathbb{R}^{4\times 1}} : \hat{E}, \hat{\alpha}).$$

Έστω

$$P^{-1} = (1_{\mathbb{R}^{3\times 1}} : \hat{\beta}, \hat{E}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$Q = (1_{\mathbb{R}^{3\times 1}} : \hat{\alpha}, \hat{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

τότε

$$(1_{\mathbb{R}^{3\times 1}} : \hat{E}, \hat{\beta})(\gamma_A : \hat{E}, \hat{E})(1_{\mathbb{R}^{4\times 1}} : \hat{\alpha}, \hat{E}) = (\gamma_A : \hat{\alpha}, \hat{\beta}).$$

Δηλαδή $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Παρατήρηση 5.2.9 *Επειδή οι P, Q είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, οι P, Q είναι γινόμενα στοιχειωδών πινάκων. Άρα εφαρμόζοντας κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών και στήλων στον A μπορούμε να πάρουμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, $r = \dim_F \Sigma_A$.*

Παρατήρηση 5.2.10 *Είδαμε ότι αν $A \in F^{\nu\times\mu}$ τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in F^{\nu\times\nu}$ και $Q \in F^{\mu\times\mu}$ με $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, όπου $r = \dim_F \Sigma_A$.*
Είναι φανερό από την απόδειξη ότι οι P, Q δεν είναι μοναδικοί μ' αυτή την ιδιότητα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω η διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$, $\hat{\alpha} = ((2,0,0),(-1,2,0),(2,1,1))$. Να βρεθούν οι πίνακες $(1_{\mathbb{R}^3} : \hat{\alpha}, \hat{e})$, $(1_{\mathbb{R}^3} : \hat{e}, \alpha)$.

2. Έστω $\hat{\alpha} = ((2,0,0),(-1,2,0),(1,1,1))$ μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$. Να βρεθεί η γραμμική απεικόνιση
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ \text{ με } \ (f : \hat{\alpha}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$
Να υπολογισθεί το $f(1,2,-1)$.

3. Έστω $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ η ακόλουθη γραμμική απεικόνιση
$$\kappa_0 + \kappa_1 x + \kappa_2 x^2 \to \begin{pmatrix} \kappa_1 + \kappa_2 & \kappa_0 \\ \kappa_1 & \kappa_2 \end{pmatrix}.$$
Να βρεθούν διατεταγμένες βάσεις $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ των $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathbb{R}^{2\times 2}$ αντίστοιχα έτσι ώστε $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

4. Έστω $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ η γραμμική απεικόνιση με
$$\kappa_0 + \kappa_1 x + \kappa_2 x^2 \to \kappa_0 + (\kappa_2 - \kappa_0)x.$$
Να βρεθούν διατεταγμένες βάσεις $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ του $\mathbb{R}_2[x]$ με $(f : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{pmatrix} I_\lambda & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

5. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$

   (i) Να βρεθεί η $\dim_{\mathbb{R}} \Sigma_A$

   (ii) Να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες P, Q με $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

6. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^{\mu\times\nu}$ και τη σχέση ισοδυναμίας που θεωρήσαμε στην Πρόταση 5.2.5.

   Να δειχθεί ότι κάθε κλάση της ισοδυναμίας περιέχει μοναδικό πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

5.3 ΤΑΞΗ ΠΙΝΑΚΑ

Εδώ θα δείξουμε ότι αν $A \in F^{\nu\times\mu}$, τότε η διάσταση του υποχώρου του $F^{1\times\nu}$ που παράγεται από τις γραμμές του A ισούται με τη διάσταση του υποχώρου του $F^{\mu\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες του A, δηλαδή $\dim_F \Gamma_A = \dim_F \Sigma_A$.
Τον ακέραιο $\dim_F \Gamma_A = \dim_F \Sigma_A$ θα τον ονομάσουμε τάξη του A. Μέσω της τάξης ενός πίνακα παίρνουμε ένα κριτήριο για το πότε δύο πίνακες είναι ισοδύναμοι. Το κριτήριο είναι χρήσιμο γιατί, όπως θα δούμε, η τάξη ενός πίνακα υπολογίζεται εύκολα. Αργότερα θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της τάξης ενός πίνακα για τη μελέτη των γραμμικών συστημάτων.
Θα αρχίσουμε με ένα λήμμα.

Λήμμα 5.3.1 *Έστω $K \in F^{\nu\times\mu}$ και $M \in F^{\mu\times\mu}$, $N \in F^{\nu\times\nu}$ με M, N αντιστρέψιμους πίνακες. Τότε*
(i) $\dim_F \Sigma_K = \dim_F \Sigma_{KM}$
(ii) $\dim_F \Sigma_K = \dim_F \Sigma_{NK}$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$$\gamma_K : F^{\mu\times 1} \to F^{\nu\times 1},\ \ \gamma_M : F^{\mu\times 1} \to F^{\mu\times 1} \text{ και } \gamma_N : F^{\nu\times 1} \to F^{\nu\times 1}.$$

Επειδή οι N, M είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, οι απεικονίσεις γ_N, γ_M είναι ισόμορφισμοί.
Τώρα $\Sigma_{KM} = Im\gamma_{KM} = \gamma_K(\gamma_M(F^{\mu\times 1}))$. Επειδή η γ_M είναι επί, έχουμε ότι $\gamma_M(F^{\mu\times 1}) = F^{\mu\times 1}$.
Άρα $\gamma_K(\gamma_M(F^{\mu\times 1})) = \gamma_K(F^{\mu\times 1}) = Im\gamma_K = \Sigma_K$ και άρα εδείχθει το (i).
Τώρα $\Sigma_{NK} = Im\gamma_{NK} = \gamma_N(\gamma_K(F^{\mu\times 1}))$.
Επειδή η γ_N είναι ισομορφισμός έπεται ότι

$$\Sigma_{NK} = \gamma_N(\gamma_K(F^{\mu\times 1}) \simeq \gamma_K(F^{\mu\times 1}) = Im\gamma_K = \Sigma_K.$$

Άρα $\Sigma_{NK} \simeq \Sigma_K$ και έπεται το (ii).

Πρόταση 5.3.2 *Έστω $A \in F^{\nu\times\mu}$ και $P \in F^{\nu\times\nu}$, $Q \in F^{\mu\times\mu}$, αντιστρέψιμοι πίνακες. Τότε $\dim_F \Sigma_A = \dim_F \Sigma_{PAQ}$.*

Απόδειξη. Άμεση από το Λήμμα 5.3.1. Πράγματι από το 5.3.1 έπεται ότι $\dim_F \Sigma_A = \dim_F \Sigma_{PA} = \dim_F \Sigma_{(PA)Q} = \dim_F \Sigma_{PAQ}$

Θεώρημα 5.3.3 *Έστω $A \in F^{\nu\times\mu}$. Τότε $\dim_F \Sigma_A = \dim_F \Gamma_A$.*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 5.2.7 έχουμε ότι υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in F^{\nu\times\nu}$ και $Q \in F^{\mu\times\mu}$ με (*) $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ όπου $r = \dim_F \Sigma_A$. Τώρα $\Gamma_A = \Sigma_{A^t}$ και από την (*) έχουμε ότι $Q^tA^tP^t = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}^t$.

Επειδή οι Q, P είναι αντιστρέψιμοι έπεται ότι και οι Q^t, P^t είναι αντιστρέψιμοι. Άρα από Πρόταση 5.3.2 έχουμε ότι

$$\dim_F \Gamma_A = \dim_F \Sigma_{A^t} = \dim_F \Sigma_{Q^t A^t P^t}.$$

Όμως έχουμε $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ επειδή $I_r^t = I_r$.
Άρα έχουμε ότι

$$\dim_F \Gamma_A = \dim_F \Sigma_{Q^t A^t P^t} = \dim_F \Sigma_{\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}} = r$$

Συνεπώς δείξαμε ότι $\dim_F \Gamma_A = r = \dim_F \Sigma_A$.

Ορισμός 5.3.4 *Έστω $A \in F^{\nu\times\mu}$. Τότε ο ακέραιος $\dim_F \Gamma_A = \dim_F \Sigma_A$ λέγεται η τάξη του πίνακα A και συμβολίζεται με rkA.*

Θεώρημα 5.3.5 *Δύο πίνακες $A, B \in F^{\nu\times\mu}$ είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν $rkA = rkB$.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι A, B είναι ισοδύναμοι. Τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in F^{\nu\times\nu}$ και $Q \in F^{\mu\times\mu}$ με $PAQ = B$. Από την Πρόταση 5.3.2 έχουμε ότι

$$\dim_F \Sigma_A = \dim_F \Sigma_{PAQ} = \dim_F \Sigma_B.$$

Άρα $\dim_F \Sigma_A = \dim_F \Sigma_B$ συνεπώς $rkA = rkB$.
Έστω τώρα ότι $rkA = rkB = r$. Συνεπώς $\dim_F \Sigma_A = \dim_F \Sigma_B = r$. Από το Πόρισμα 5.2.8 έχουμε ότι υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P, P' \in F^{\nu\times\nu}$ και $Q, Q' \in F^{\mu\times\mu}$ με

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \text{ και } P'BQ' = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς οι A, B είναι ισοδύναμοι προς $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. Άρα οι A, B είναι ισοδύναμοι.

Είναι σαφές από τους ορισμούς ότι η τάξη ενός πίνακα $A \in F^{\nu\times\mu}$ είναι το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του A, όπως επίσης είναι το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A.

Πως βρίσκουμε την τάξη ενός πίνακα $A \in F^{\nu\times\mu}$.

Επειδή $rkA = \dim_F \Gamma_A$, θα εφαρμόσουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στο A μέχρι να καταλήξουμε σ' ένα πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha'_{1j_1} & \cdots & & & & & \alpha'_{1\mu} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdot & \cdots & 0 & \alpha'_{2j_2} & & \cdots & \alpha'_{2\mu} \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdot & \cdots & 0 & \cdot & \cdots\ 0 & \alpha'_{\tau j_\tau} \ \cdots & \alpha'_{\tau\mu} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & & & & 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in F^{\rho\times\mu} \text{ με } \alpha'_{ij_\tau} \neq 0,\ 1 \leq i \leq \tau.$$

Τότε ξέρουμε ότι $\Gamma_A = \Gamma_{A'}$ και $\dim_F \Gamma_{A'} = \tau$.

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί η τάξη του $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 4r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα $r\kappa A = 2$.

2. Να εξετασθεί αν οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

είναι ισοδύναμοι.

Ξέρουμε ότι οι A, B είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν έχουν την ίδια τάξη. Από το 1 έχουμε ότι $r\kappa A = 2$. Θα βρούμε την τάξη του B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 + 2r_1]{r_2 \to r_2 + 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα $r\kappa B = 2$. Συνεπώς οι A, B είναι ισοδύναμοι.

Η ακόλουθη Πρόταση μας δίνει μερικές από τις ιδιότητες της τάξης των πινάκων.

Πρόταση 5.3.6 *(i) Έστω $A, B \in F^{\nu\times\mu}$, τότε*

$$rk(A+B) \leq rk(A) + rk(B)$$

(ii) Αν $A \in F^{\nu\times\mu}$ και $B \in F^{\mu\times\kappa}$, τότε

$$rkA + rkB - \mu \leq rk(AB) \leq \min\{rkA, rkB\}.$$

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $\gamma_A, \gamma_B : F^{\mu\times 1} \to F^{\nu\times 1}$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι $Im(\gamma_A + \gamma_B) \leq Im\gamma_A + Im\gamma_B$. Αλλά $\gamma_A + \gamma_B = \gamma_{A+B}$. Άρα έχουμε ότι

$$\Sigma_{A+B} = Im\gamma_{A+B} \leq Im\gamma_A + Im\gamma_B = \Sigma_A + \Sigma_B.$$

Συνεπώς $\dim_F \Sigma_{A+B} \leq \dim_F(\Sigma_A + \Sigma_B)$ αλλά ξέρουμε ότι

$$\dim_F(\Sigma_A + \Sigma_B) = \dim_F \Sigma_A + \dim_F \Sigma_B - \dim_F \Sigma_A \cap \Sigma_B.$$

Άρα δείξαμε ότι $\dim_F \Sigma_{A+B} \leq \dim_F \Sigma_A + \dim_F \Sigma_B$, δηλαδή το (i).
Έστω τώρα ότι $A \in F^{\nu\times\mu}$ και $B \in F^{\mu\times\kappa}$.
Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$$\gamma_B : F^{\kappa\times 1} \to F^{\mu\times 1} \text{ και } \gamma_A : F^{\mu\times 1} \to F^{\nu\times 1}.$$

Επειδή $\gamma_A \circ \gamma_B = \gamma_{AB}$, έχουμε ότι

$$rkAB = \dim_F \Sigma_{AB} = \dim_F Im\gamma_{AB} = \dim_F Im(\gamma_A \circ \gamma_B).$$

Τώρα θεωρούμε την απεικόνιση $\gamma = \gamma_A\big|_{Im\gamma_B} : Im\gamma_B \to F^{\nu\times 1}$.
Τότε ξέρουμε ότι $\dim_F Im\gamma_B = \dim_F \ker\gamma + \dim_F Im\gamma$.
Αλλά $Im\gamma = Im(\gamma_A \circ \gamma_B)$. Άρα έχουμε ότι

$$\dim_F Im\gamma_B = \dim_F \ker\gamma + \dim_F Im\gamma_{AB} \qquad (*)$$

Είναι σαφές, από τον ορισμό της γ ότι $\ker\gamma \leq \ker\gamma_A$.
Άρα

$$\dim_F \ker\gamma \leq \dim_F \ker\gamma_A = \mu - \dim_F Im\gamma_A. \qquad (**)$$

Από τις $(*)$ και $(**)$ παίρνουμε ότι

$$\dim_F Im\gamma_B \leq \mu - \dim_F Im\gamma_A + \dim_F Im\gamma_{AB}.$$

Δηλαδή $rkB \leq \mu - rkA + rkAB$. Άρα $rkAB \geq rkA + rkB - \mu$.
Η απόδειξη της άλλης ανισότητας αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 5.3.7 *Έστω $A \in F^{\nu\times\nu}$ένας τετραγωνικός πίνακας. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.*
2. *Η τάξη του πίνακα A είναι r, δηλαδή $rkA = r$.*
3. *Οι στήλες του πίνακα A, θεωρούμενες ως στοιχεία του χώρου $F^{\nu\times 1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.*
4. *Οι γραμμές του πίνακα A, θεωρούμενες ως στοιχεία του χώρου $F^{1\times\nu}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $\gamma_A : F^{\nu\times 1} \to F^{\nu\times 1}$. Ξέρουμε ότι $(\gamma_A : \hat{E}, \hat{E}) = A$.
$1. \Rightarrow 2.$ Επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος από το 5.1.11 έπεται ότι η γ_A είναι ισομορφισμός. Άρα η γ_A είναι επί, δηλ. $Im\gamma_A = \Sigma_A = F^{\nu\times 1}$, άρα $\dim_F \Sigma_A = \nu$, συνεπώς $rkA = \nu$.
$2. \Rightarrow 3.$ Έχουμε ότι $rkA = \nu$, δηλαδή $\dim_F \Sigma_A = \nu$ αλλά ο Σ_A παράγεται από τις ν-στήλες του A, άρα οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
$3. \Rightarrow 4.$ Από το 3. έπεται ότι $\dim_F \Sigma_A = \nu$ αλλά $\dim_F \Sigma_A = \dim_F \Gamma_A$ και ο χώρος Γ_A

παράγεται από τις ν-γραμμές του A, άρα οι γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
4. $\Rightarrow$ 1. Από το 4. έπεται ότι $\dim_F \Gamma_A = \nu$. αλλά $\dim_F \Gamma_A = \dim_F \Sigma_A$. Άρα η γ_A είναι επιμορφισμός. Συνεπώς $\dim_F \ker \gamma_A = \nu - \dim_F Im\gamma_A = \nu - \nu = 0$ άρα $\ker \gamma_A = 0_{F^{\nu\times 1}}$, άρα η γ_A είναι $1-1$.
Επειδή η γ_A είναι $1-1$ και επί, η γ_A είναι ισομορφισμός και από το Θεώρημα 5.1.11 έπεται ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετασθεί αν οι ακόλουθοι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ είναι ισοδύναμοι

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Αν $A \in F^{\mu\times\nu}$ να δειχθεί ότι $rkA = rkA^t$.

3. Αν $A \in F^{\mu\times\nu}$ και $B \in F^{\nu\times\kappa}$ τότε να δειχθεί ότι $rkAB \leq \min\{rkA, rkB\}$.

4. Να βρεθούν δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ με $rkA = rkB = 3$ και $AB = 0$.

5. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $A^2 = 0$. Να δειχθεί ότι $r\kappa A \leq \frac{1}{2}n$.

6. Να δειχθεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες για $A, B \in F^{\nu\times\nu}$

   (i) Ο πίνακας AB είναι αντιστρέψιμος

   (ii) Οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι

   (iii) $rkA = rkB = \nu$.

7. Να δειχθεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες για $A, B \in F^{\mu\times\nu}$

   (i) $\Sigma_A = \Sigma_B$

   (ii) υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $C \in F^{\nu\times\nu}$ έστι ώστε $A = BC$.

8. Έστω $A \in F^{\mu\times\nu}$. Τότε να δειχθεί ότι

   (i) ο A έχει δεξιό αντίστροφο αν και μόνο αν $rkA = \mu$

   (ii) ο A έχει αριστερό αντίστροφο αν και μόνο αν $rkA = \nu$

   (iii) αν ο A έχει ένα αριστερό αντίστροφο X και ένα δεξιό αντίστροφο Y τότε ο A είναι τετραγωνικός αντιστρέψιμος και $X = Y = A^{-1}$.

5.4 ΟΜΟΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του F πεπερασμένης διάστασης και $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση.
Αν $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ και $\hat{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_\nu)$ είναι δύο διατεταγμένες βάσεις του V και $(f : \hat{\alpha}, \hat{\alpha}) = A$, $(f : \hat{\beta}, \hat{\beta}) = B$ τότε

$$(1_V : \hat{\alpha}, \hat{\beta})(f : \hat{\alpha}, \hat{\alpha})(1_V : \hat{\beta}, \hat{\alpha}) = (f : \hat{\beta}, \hat{\beta}).$$

Ο πίνακας $(1_V : \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = P$ είναι αντιστρέψιμος και $P^{-1} = (1_V : \hat{\beta}, \hat{\alpha})$. Συνεπώς έχουμε ότι

$$PAP^{-1} = B.$$

Ορισμός 5.4.1 *Έστω $A, B \in F^{\nu\times\nu}$. Τότε ο A λέγεται όμοιος προς τον B αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in F^{\nu\times\nu}$ με $PAP^{-1} = B$.*

Πρόταση 5.4.2 *Η σχέση ομοιότητας είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $F^{\nu\times\nu}$.*

Η απόδειξη της 5.4.2 αφήνεται ως άσκηση.

Παρατήρηση Αν έχουμε δύο τετραγωνικούς πίνακες και ο ένας είναι όμοιος προς τον άλλο τότε θα λέμε ότι οι πίνακες είναι όμοιοι.
Είδαμε ότι αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του F πεπερασμένης διάστασης $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση και $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ δύο διατεταγμένες βάσεις του V τότε οι πίνακες $(f : \hat{\alpha}, \hat{\alpha})$ και $(f : \hat{\beta}, \hat{\beta})$ είναι όμοιοι.

Στην επόμενη πρόταση θα δούμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.
(Να τονίσουμε ότι η διατεταγμένη βάση του πεδίου ορισμού της f και η διατεταγμένη βάση του πεδίου τιμών της f, ως προς τις οποίες υπολογίζουμε τον πίνακα της f, είναι οι ίδιες).

Πρόταση 5.4.3 *Έστω $A, B \in F^{\nu\times\nu}$ δύο όμοιοι πίνακες. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του F διάστασης ν. Τότε υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to V$ και διατεταγμένες βάσεις $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ του V με*

$$(f : \hat{\alpha}, \hat{\alpha}) = A \ \textit{ και } \ (f : \hat{\beta}, \hat{\beta}) = B.$$

Η απόδειξη της 5.4.3 αφήνεται ως άσκηση (δες την απόδειξη της Πρότασης 5.2.6).

Προφανώς δύο όμοιοι πίνακες έχουν την ίδια τάξη.
Στο ακόλουθο παράδειγμα θα δούμε δύο πίνακες που είναι ισοδύναμοι αλλά δεν είναι όμοιοι.

Παράδειγμα Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ με $A, I_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Οι A, B είναι ισοδύναμοι γιατί έχουν ίδια τάξη. Αν υπήρχε αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $PAP^{-1} = I_2$, τότε $A = P^{-1}I_2P = I_2$, άτοπο. Άρα οι A, I_2 δεν είναι όμοιοι.

Είδαμε ότι δύο πίνακες $A, B \in F^{\mu\times\nu}$ είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν οι πίνακες A, B έχουν την ίδια τάξη.
Επιπλέον είδαμε ότι η σχέση ισοδυναμίας πινάκων ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $F^{\mu\times\nu}$ και μάλιστα κάθε κλάση ισοδυναμίας περιέχει μοναδικό πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.
Υπάρχουν ανάλογα αποτελέσματα για όμοιους πίνακες τα οποία όμως απαιτούν περισσότερες γνώσεις.
Μ' αυτά θα ασχοληθούμε αργότερα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχθούν οι Προτάσεις 5.4.2 και 5.4.3.

2. Να δειχθεί ότι αν $A, B \in F^{\nu\times\nu}$ είναι όμοιοι τότε και οι $A^t, B^t \in F^{\nu\times\nu}$ είναι όμοιοι.

3. Να δειχθεί ότι αν $A, B \in F^{\nu\times\nu}$ είναι όμοιοι τότε και οι A^n, B^n είναι όμοιοι για κάθε φυσικό αριθμό n.

4. Έστω $A = (\alpha_{ij}) \in F^{\nu\times\nu}$ ένας τετραγωνικός πίνακας.

   Το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του A λέγεται το ίχνος του A και συμβολίζεται με $tr(A)$, δηλαδή $tr(A) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{\nu\nu}$. Να δειχθεί ότι

   (i) Η απεικόνιση $t : \begin{array}{c} F^{\nu\times\nu} \to F \\ A \to tr(A) \end{array}$ είναι γραμμική.

   (ii) Αν $A, B \in F^{\nu\times\nu}$ τότε $tr(AB) = tr(BA)$.

   (iii) Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος.

   (iv) Να βρεθούν δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ με το ίδιο ίχνος, οι οποίοι δεν είναι όμοιοι.

Κεφάλαιο 6

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Σε προηγούμενο κεφάλαιο, μέσω της θεωρίας των πινάκων, είδαμε πως συστηματοποιούμε την εύρεση αριθμητικής λύσης ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Η γνώση μας αυτή, που σίγουρα είναι πολύ σημαντική αφήνει αναπάντητα διάφορα σοβαρά προβλήματα. Για παράδειγμα, οι συντελεστές του συστήματος και οι σταθεροί του όροι, μπορεί να έχουν παραμέτρους του φαινομένου το οποίο εκφράζει το σύστημα, και μπορεί να μας ενδιαφέρει κάποια μεγιστοποίηση κάποιων συναρτήσεων των λύσεων η μπορεί να μας ενδιαφέρει το αν υπάρχουν λύσεις που έχουν όλες τις συντεταγμένες θετικές κλπ Σε ένα τέτοιου είδους ερώτημα, η μέθοδος που αναπτύξαμε δεν φαίνεται να μπορεί να πάει σε μεγάλο βάθος. Όμως όπως έχουμε μάθει και από τα μαθηματικά του Λυκείου, θα ήταν πολύ επιθυμητό να είχαμε και έναν τύπο που να μας δίνει τις λύσεις.

Για να εξηγήσουμε τι εννοούμε ς θεωρήσουμε το απλό παράδειγμα της αριθμητικής προόδου που ορίζεται σαν μία ακολουθία στοιχείων του $\mathbb{F}$, $a_1, a_2, a_3, ...a_\nu, ...$, για την οποία υπάρχει στοιχείο $b \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $a_\nu = a_{(n-1)} + b$ για κάθε $\nu \geq 1$. Είναι σαφές ότι αν δοθούν οι a_1, b και μια τιμή του ν , έστω για παράδειγμα $\nu = 22678, a_1 = 56, b = 36$, τότε είναι απλά θέμα χρόνου που εξαρτάται από τι είδους τεχνολογική υποστήριξη έχουμε, να υπολογίσουμε τον όρο a_{22678} και να βρούμε $a_{22678} = 816428$. Όμως, θα συμφωνήσουν όλοι ότι άλλου είδους εμβάθυνση και κατανόηση έχουμε όταν έχουμε αποδείξει τον τύπο $a_\nu = a_1 + (n-1)b$.

Η Θεωρία των ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ που θα δούμε στο κεφάλαιο αυτό δίνει μια απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα και, όπως σχεδόν πάντα συμβαίνει στις σοβαρές μαθηματικές ανακαλύψεις, έχει και άλλες παράπλευρες συνέπειες.

Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα με στοιχεία από το F θ’ αντιστοιχίσουμε με κατάλληλο τρόπο ένα στοιχείο του F, που θα ονομασθεί ορίζουσα του πίνακα. Μέσω των οριζουσών θα πάρουμε ένα τύπο για τη λύση ενός συστήματος ν εξισώσεων με ν άγνωστους (κανόνας του Cramer). Επιπλέον μέσω των οριζουσών θα πάρουμε ένα σαφές κριτήριο για το πότε ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος, κλπ κλπ.

6.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix}$, όπου $A_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{i\nu}) \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$ η i-οστή γραμμή του A.

Ορισμός 6.1.1 *Έστω $\nu \in \mathbb{N}$. Μία απεικόνιση $D : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ λέγεται* **απεικόνιση ορίζουσας** *αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

D_1) Η D είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή, δηλαδή για κάθε $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $i = 1, 2, \cdots, \nu$, έχουμε ότι:

ι) Αν $A_i = X + Y$, $X, Y \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$, τότε

$$D(A) = D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_{i-1} \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_{i-1} \\ X \\ A_{i+1} \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_{i-1} \\ Y \\ A_{i+1} \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix}$$

ιι) Αν $A_i = \lambda X$, τότε

$$D(A) = D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_{i-1} \\ \lambda X \\ A_{i+1} \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} = \lambda D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_{i-1} \\ X \\ A_{i+1} \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix}$$

D_2) Αν δύο γραμμές ενός πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι ίσες τότε $D(A) = 0$, δηλαδή αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $A_i = A_j, i \neq j$, τότε $D(A) = 0$.

D_3) Η ορίζουσα του μοναδιαίου $\nu \times \nu$ πίνακα ισούται με τη μονάδα, δηλαδή $D(I_\nu) = 1$.

Παράδειγμα 6.1.2 *Για ν=1, η απεικόνιση $D : \mathbb{F}^{1\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}$ με $x \longmapsto x$ είναι απεικόνιση ορίζουσας.*

Παράδειγμα 6.1.3 *Για ν=2, η απεικόνιση*

$$D : \mathbb{F}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{F} \;\; \mu\epsilon \;\; \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

είναι απεικόνιση ορίζουσας.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ υπάρχει μοναδική απεικόνιση ορίζουσας, δηλαδή ότι υπάρχει ακριβώς μία απεικόνιση $D : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$, που ικανοποιεί τις ιδιότητες D_1, D_2, D_3.

Πριν δείξουμε αυτό θα δείξουμε ορισμένες ιδιότητές τους, οι οποίες προκύπτουν από τον ορισμό.

6.2 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ

Παρατήρηση 6.2.1 *Αν* $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ *και* $A_i = \sum_{\kappa=1}^{\mu} \lambda_\kappa B_\kappa, B_\kappa \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$ *και* $\lambda_\kappa \in \mathbb{F}$ *για* $1 \leq \kappa \leq \mu$, *τότε από την* D_1 *και επαγωγή έπεται εύκολα ότι*

$$D(A) = D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_{i-1} \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} = \sum_{\kappa=1}^{\mu} \lambda_\kappa D \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_{i-1} \\ B_\kappa \\ A_{i+1} \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix}$$

Πρόταση 6.2.2 *Έστω* $D : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$, *μία απεικόνιση ορίζουσας. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) *Έστω* $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_j \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ *και* $A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_j \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix}$ *Τότε* $D(A) = -D(A'$, *δηλαδή, αν ένας πίνακας* A' *προκύπτει από ένα τετραγωνικό πίνακα A μέσω αντιμετάθεσης δύο γραμμών του A τότε* $D(A) = -D(A')$.

(β) *Έστω* $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_{i-1} \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ *και* $A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_{i-1} \\ B \\ A_{i+1} \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix}$, *όπου* $B = A_i + \lambda A_\kappa, \kappa \neq i$. *Τότε* $D(A) = D(A')$ *δηλαδή αν σε μία γραμμή ενός τετραγωνικού πίνακα A προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής του A τότε ο πίνακας* A' *που προκύπτει έχει την ίδια ορίζουσα με τον A.*

(γ) *Αν* $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ *και* $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε* $D(A) = 0$.

Απόδειξη.

1) Έχουμε ότι $D(A) + D(A') = D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_j \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_j \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} =^{(\lambda o\gamma\omega\ \tau\eta\varsigma\ D_2)} D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} +$

$$D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_j \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_j \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_j \\ \cdots \\ A_j \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix}$$

$$=^{(\lambda o\gamma\omega\ \tau\eta\varsigma\ D_1)} D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_i + A_j \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_j \\ \cdots \\ A_i + A_j \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix}$$

$$=^{(\lambda o\gamma\omega\ \tau\eta\varsigma\ D_1)} D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i + A_j \\ \cdots \\ A_i + A_j \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} =^{(\lambda o\gamma\omega\ \tau\eta\varsigma\ D_2)} 0,$$

άρα $D(A) = -D(A')$.

2) *Επειδή* $i \neq \kappa$, *χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι* $\kappa > i$ *και έχουμε*

$$D(A') = D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i + \lambda A_\kappa \\ \cdots \\ A_\kappa \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} =^{(\lambda o\gamma\omega\ \tau\eta\varsigma\ D_1)} D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_\kappa \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ \lambda A_\kappa \\ \cdots \\ A_\kappa \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix}$$

$$=^{(\lambda o\gamma\omega\ \tau\eta\varsigma\ D_1)} D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_\kappa \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} + \lambda D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_\kappa \\ \cdots \\ A_\kappa \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} =^{(\lambda o\gamma\omega\ \tau\eta\varsigma\ D_2)} D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_\kappa \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} = D(A).$$

3) *Επειδή* $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα, ένα από αυτά π.χ. το* A_i *είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, δηλαδή* $A_i = \sum_{\rho=1,\ \rho\neq i}^{\nu} \lambda_\rho A_\rho$, *και έχουμε*

$$D(A) = D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ \sum_{\rho=1,\ \rho\neq i}^{\nu} \lambda_\rho A_\rho \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix}$$

$$=^{(\lambda o\gamma\omega\ \tau\eta\varsigma\ 6.2.1)} \sum_{\rho=1,\ \rho\neq i}^{\nu} \lambda_\rho D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_\rho \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} =^{(\lambda o\gamma\omega\ \tau\eta\varsigma\ D_2)} = 0.$$

Να παρατηρήσουμε ότι μία ειδική περίπτωση της 3) της 6.2.2 είναι ότι αν ένας τετραγωνικός πίνακας έχει μία μηδενική γραμμή, τότε η ορίζουσά του είναι μηδέν. Γενικότερα,

Πόρισμα 6.2.3 *Αν ο $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε $det A$=0.*

Απόδειξη. Αφού ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, έπεται ότι η τάξη του A είναι μικρότερη του ν, άρα οι γραμμές του A , οι $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ είναι γραμμικά εξαρτημένες. Το αποτέλεσμα τώρα έπεται από την 3) της 6.2.2 .

Η επόμενη πρόταση δείχνει πως να ορίσουμε μια απεικόνιση ορίζουσας στο σύνολο των $\nu \times \nu$ πινάκων όταν ξέρουμε μία απεικόνιση ορίζουσας στο σύνολο των $(\nu-1)\times(\nu-1)$ πινάκων.

Για κάθε $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ συμβολίζουμε με A_{ij} τον $(\nu-1)\times(\nu-1)$ πίνακα, που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i-γραμμή του και την j-στήλη του. π.χ. αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, τότε

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Πρόταση 6.2.4 *Έστω $\nu \geq 2$ και $D : \mathbb{F}^{(\nu-1)\times(\nu-1)} \longrightarrow \mathbb{F}$ μία απεικόνιση ορίζουσας.*

Για $j = 1, 2, \cdots, \nu$ ορίζουμε $f_j : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ ως εξής:

Αν $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, τότε $f_j(A) = \sum_{i=1}^{\nu}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}D(A_{ij})$.

Τότε κάθε f_j είναι απεικόνιση ορίζουσας.

Απόδειξη. Θα πρέπει να δείξουμε ότι η απεικόνιση f_j ικανοποιεί τις ιδιότητες D_1, D_2, D_3.

Πράγματι, έστω $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_\rho \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $A_\rho = X + Y, \quad X, Y \in \mathbb{F}^{1\times\nu}$, και $X = (x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_\nu)$.

Αν $B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_{\rho-1} \\ X \\ A_{\rho+1}\cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} = (\beta_{ij})$ και $\Gamma = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_{\rho-1} \\ Y \\ A_{\rho+1}\cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} = (\gamma_{ij})$, τότε

(1) $f_j(A) = \sum_{i=1}^{\nu}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}D(A_{ij}) = (-1)^{\rho+j}\alpha_{\rho j}D(A_{\rho j}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\rho}}^{\nu}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}D(A_{ij})$.

Τώρα, $\alpha_{\rho j} = x_j + y_j$ και επειδή η D είναι απεικόνιση ορίζουσας για $i \neq \rho$ $D(A_{ij}) = D(B_{ij}) + D(\Gamma_{ij})$ άρα η (1) γίνεται

$$(1') \qquad f_j(A) = (-1)^{\rho+j}(x_j + y_j)D(A_{\rho j}) + \sum_{i=2,\ i\neq\rho} (-1)^{i+j}\alpha_{ij}(D(B_{ij}) + D(\Gamma_{ij})).$$

Αλλά $A_{\rho j} = B_{\rho j} = \Gamma_{\rho j}$ και αν $i \neq \rho$ τότε $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = \gamma_{ij}$.

Άρα η $(1')$ γίνεται $f_j(A) = \sum_{i=1}^{\nu}(-1)^{i+j}\beta_{ij}D(\beta_{ij}) + \sum_{i=1}^{\nu}(-1)^{i+j}\gamma_{ij}D(\Gamma_{ij}) = f_j(B) + f_j(\Gamma)$.

Αν τώρα $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_\rho \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix}$ και $A_\rho = \lambda X$ και $B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_{\rho-1} \\ X \\ A_{\rho+1} \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} = (\beta_{ij})$, τότε

(2) $f_j(A) = \sum_{i=1}^{\nu}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}D(A_{ij}) = (-1)^{\rho+j}\alpha_{\rho j}D(A_{\rho j}) + \sum_{i=1,\ i\neq\rho}^{i+j}\alpha_{ij}D(A_{ij}$.

Τώρα, $\alpha_{\rho j} = \lambda x_j$ και $D(A_{\rho j}) = D(B_{\rho j})$. Για $i \neq \rho, \alpha_{ij} = \beta_{ij}$ και επειδή η D είναι απεικόνιση ορίζουσας για $i \neq \rho,\ \ D(A_{ij}) = \lambda D(B_{ij})$, άρα η (2) γίνεται

$$(2') \qquad f_j(A) = \lambda\left((-1)^{\rho+j}x_jD(B_{\rho j}) + \sum_{i=1,\ i\neq\rho}^{\nu}(-1)^{i+j}\beta_{ij}D(\beta_{ij})\right) = \lambda f_i(B),$$

άρα δείξαμε ότι η f_j ικανοποιεί την D_1.

Έστω τώρα $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_\rho \\ \cdots \\ A_\sigma \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $\rho \neq \sigma$ και $A_\rho = A_\sigma$.

Τότε $f_j(A) = \sum_{i=1}^{\nu}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}D(A_{ij})$.

Επειδή η D είναι απεικόνιση ορίζουσας και οι πίνακες A_{ij} για $i \neq \rho, \sigma$, έχουν δύο γραμμές ίσες, $D(A_{ij}) = 0$ για $i \neq \rho, \sigma$.Άρα

(3) $f_j(A) = \sum_{i=1}^{\nu}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}D(A_{ij}) = (-1)^{\rho+j}\alpha_{\rho j}D(A_{\rho j}) + (-1)^{\sigma+j}\alpha_{\sigma j}D(A_{\sigma j})$.

Είναι σαφές ότι ο $A_{\rho j}$ προκύπτει από τον $A_{\sigma j}$ μέσω $\sigma - \rho - 1$ αντιμεταθέσεων διαδοχικών γραμμών. Συγκεκριμένα θεωρούμε τον $A_{\sigma j}$ και αντιμεταθέτουμε την ρ-γραμμή του πρώτα με την $\rho + 1$, μετά με την $\rho + 2$, $\cdots$, και τέλος με την $\sigma - 1$ και έτσι παίρνουμε τον $A_{\rho j}$.

Επειδή η D είναι απεικόνιση ορίζουσας έπεται από το 6.2.2 ότι $D(A_{\rho j}) = (-1)^{\sigma-\rho-1}D(A_{\sigma j})$ Επιπλέον $\alpha_{\rho j} = \alpha_{\sigma j}$.

Συνεπώς από την (3) τώρα έπεται ότι $f_j(A) = 0$.

Δείξαμε ότι η f_j ικανοποιεί την D_2.

Μένει να δείξουμε ότι η f_j ικανοποιεί και την D_3.

Πράγματι

(4) $f_j(I_\nu) = \sum_{i=1}^{\nu}(-1)^{i+j}\delta_{ij}D((I_\nu)_{ij}) = (-1)^{j+j}D((I_\nu)_{jj})$. Αλλά $D((I_\nu)_{jj}) = D(I_{\nu-1}) = 1$, επειδή η D είναι απεικόνιση ορίζουσας. Άρα η (4) μας δίνει $f_j(I_\nu) = 1$.

6.3 ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ

Πόρισμα 6.3.1 *Για κάθε φυσικό αριθμό ν υπάρχει τουλάχιστον μία απεικόνιση ορίζουσας με πεδίο ορισμού το $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.*

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς ν. Για $\nu = 1$, η απεικόνιση $\mathbb{F}^{1\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}$ με $x \longrightarrow x$ είναι μία απεικόνιση ορίζουσας. Έστω $\nu > 1$ και έστω $D : \mathbb{F}^{(\nu-1)\times(\nu-1)} \longrightarrow \mathbb{F}$, μία απεικόνιση ορίζουσας. Τότε από την πρόταση 6.2.4 ,μέσω της D, ορίζεται μία απεικόνιση ορίζουσας με πεδίο ορισμού το $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Το αποτέλεσμα τώρα έπεται από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής.

Παράδειγμα 6.3.2 *Η απεικόνιση $D : \mathbb{F}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{F}$ με $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$ είναι μία απεικόνιση ορίζουσας. Από την πρόταση 6.2.4 έπεται ότι η απεικόνιση $f_1 : \mathbb{F}^{3\times 3} \longrightarrow \mathbb{F}$ που ορίζεται ως*

$$f_1\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\cdot D\begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} - \alpha_{21}\cdot D\begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} + \alpha_{31}\cdot D\begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix},$$

είναι απεικόνιση ορίζουσας.

Παρόμοια οι απεικονίσεις f_2, f_3, που ορίζονται ως

$$f_2\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = -\alpha_{12}\cdot D\begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{pmatrix} + \alpha_{22}\cdot D\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{pmatrix} - \alpha_{32}\cdot D\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{pmatrix},$$ *και*

$$f_3\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \alpha_{13}\cdot D\begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix} - \alpha_{23}\cdot D\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix} + \alpha_{33}\cdot D\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix},$$

είναι απεικονίσεις ορίζουσας.

Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, υπάρχει ακριβώς μία απεικόνιση ορίζουσας με πεδίο ορισμού το σύνολο των $\nu \times \nu$ πινάκων, $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.

Για το σκοπό αυτό χρειάζεται να μελετήσουμε ορισμένες απλές ιδιότητες απεικονίσεων επί πεπερασμένων συνόλων οι οποίες είναι 1-1 και επί.

Συγκεκριμένα έστω S_ν το σύνολο των 1-1 και επί απεικονίσεων επί του συνόλου $\{1, 2, 3, \cdots, \nu\}$.

Παράδειγμα 6.3.3

1) *Έστω το σύνολο* $\{1, 2\}$. *Τότε το* $S_2 = \{1_{\{1,2\}}, f\}$, *όπου* $f : \{1, 2\} \longrightarrow \{1, 2\}$ *με* $f(1) = 2$ *και* $f(2) = 1$.

2) *Έστω το σύνολο* $\{1, 2, 3\}$. *Τότε το* $S_3 = \{1_{\{1,2,3\}}, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ *όπου*

- $f_1 : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ $\mu\epsilon$ $f_1(1) = 2, f_1(2) = 1, f_1(3) = 3$
- $f_2 : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ $\mu\epsilon$ $f_2(1) = 1, f_2(2) = 3, f_2(3) = 2$
- $f_3 : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ $\mu\epsilon$ $f_3(1) = 3, f_3(2) = 2, f_3(3) = 1$
- $f_4 : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ $\mu\epsilon$ $f_4(1) = 3, f_4(2) = 1, f_1(3) = 2$
- $f_5 : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ $\mu\epsilon$ $f_5(1) = 2, f_5(2) = 3, f_5(3) = 1$

Ένα στοιχείο του συνόλου S_ν θα λέγεται **μετάθεση**.

Μία μετάθεση $f \in S_\nu$, λέγεται **αντιμετάθεση**, αν υπάρχουν $i, j \in \{1, 2, 3 \cdots, \nu\}$ $i \neq j, f(i) = j, f(j) = i$ $\kappa\alpha\iota$ $f(\mu) = \mu$ για κάθε $\mu \in \{1, 2 \cdots, \nu\}$ και $\mu \neq i, \mu \neq j$. Δηλαδή μία μετάθεση $f \in S_\nu$, η οποία αντιμεταθέτει δύο στοιχεία ενώ τα άλλα τα αφήνει σταθερά λέγεται αντιμετάθεση.

Παράδειγμα 6.3.4 *Ας θεωρήσουμε το σύνολο* S_3 *του οποίου τα στοιχεία βρήκαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.*

Παρατηρούμε ότι οι f_1, f_2, f_3 *είναι αντιμεταθέσεις, ενώ οι* f_4 *και* f_5 *και* $1_{\{1,2,3\}}$ *δεν είναι.*

Είναι προφανές ότι αν η $f \in S_\nu$ είναι μία αντιμετάθεση, τότε και η $f^{-1} \in S_\nu$ είναι μία αντιμετάθεση.

Η ακόλουθη πρόταση μας λέει ότι κάθε μετάθεση είναι σύνθεση αντιμεταθέσεων.

Πρόταση 6.3.5 *Αν* $\nu \geq 2$, *τότε κάθε* $f \in S_\nu$ *μπορεί να παρασταδεί ως σύνθεση αντιμεταθέσεων.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς ν. Για $\nu = 2$, αν $f \in S_2$ και $f \neq 1_{\{1,2\}}$, τότε είναι σαφές ότι η f είναι μία αντιμετάθεση. Αν $f = 1_{\{1,2\}}$, θεωρούμε την $\sigma : \{1, 2\} \longrightarrow \{1, 2\}$ με $\sigma(1) = 2$ και $\sigma(2) = 1$. Τότε η σ είναι μία αντιμετάθεση και $f = \sigma \circ \sigma$.

Έστω ότι $\nu > 2$ και έστω ότι η πρόταση ισχύει για τις μεταθέσεις που ανήκουν στο $S_{\nu-1}$. Έστω τώρα $f \in S_\nu$ και έστω ότι $f(\nu) = \kappa$. Θεωρούμε την αντιμετάθεση $\tau \in S_\nu$ με $\tau(\nu) = \kappa$ και $\tau(\kappa) = \nu$. Τότε

$$(\tau \circ f)(\nu) = \nu. \tag{6.1}$$

Συνεπώς ορίζεται η απεικόνιση $(\tau\circ f)' : \{1,2,\ldots,\nu-1\} \to \{1,2,\ldots,\nu-1\}$ με $(\tau\circ f)'(\kappa) = (\tau\circ f)(\kappa)$ για κάθε $\kappa \in \{1,2,\ldots,\nu-1\}$.

Επειδή $(\tau\circ f)' \in S_{\nu-1}$, από την υπόθεση επαγωγής έπεται ότι:

$$(\tau\circ f)' = \tau_1' \circ \tau_2' \circ, \tau_3' \circ \cdots \circ \tau_\rho', \tag{6.2}$$

όπου $\tau_1', \tau_2', \tau_3', \cdots, \tau_\rho'$ είναι αντιμεταθέσεις που ανήκουν στο $S_{\nu-1}$.

Θεωρούμε τις μεταθέσεις $\tau_i \in S_\nu, 1 \le i \le \rho$, που ορίζονται ως $\tau_i(\kappa) = \tau_i'(\kappa)$ για κάθε $\kappa \in \{1,2,\ldots,\nu-1\}$ και $\tau_i(\nu) = \nu$.

Προφανώς οι τ_i είναι αντιμεταθέσεις και από τις (6.1) και (6.2) έπεται ότι

$$\tau\circ f = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_\rho.$$

Συνεπώς

$$f = \tau^{-1} \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_\rho.$$

Άρα η f είναι σύνθεση αντιμεταθέσεων.

Παράδειγμα 6.3.6 *Ας θεωρήσουμε πάλι το σύνολο S_3. Είδαμε ότι οι f_1, f_2, f_3 είναι αντιμεταθέσεις.*

Παρατηρούμε ότι $f_4 = f_1 \circ f_3$, $f_5 = f_3 \circ f_1$ και $1_{\{1,2,3\}} = f_1 \circ f_1 = f_2 \circ f_2 = f_3 \circ f_3$.

Πρόταση 6.3.7 *Έστω ν ένας φυσικός αριθμός και $D, D' : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ απεικονίσεις ορίζουσας. Τότε $D = D'$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $\Delta : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ με $A \longmapsto \Delta(A) = D(A) - D'(A)$. Θα δείξουμε ότι $\Delta(A) = 0$ για κάθε $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.

Εύκολα αποδεικνύεται, χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες για τις D, D', ότι

(⋆) Η Δ είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή.

(⋆⋆) Αν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές ίσες, τότε $\Delta(A) = 0$.

(⋆ ⋆ ⋆) Αν $A = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ \cdot \\ A_j \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ και $A' = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ A_j \\ \cdot \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$, τότε $\Delta(A) = -\Delta(A')$.

Αν τώρα $\{e_1, e_2, \cdots, e_\nu\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{F}^{1\times\nu}$ και A_i η $i-$γραμμή ενός πίνακα $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, τότε

$$A_i = (\alpha_{i1} \cdots \alpha_{i\nu}) = \alpha_{i1}e_1 + \alpha_{i2}e_2 + \cdots + \alpha_{i\nu}e_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{ij}e_j.$$

Επομένως έχουμε

$$\Delta(A)=\Delta\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\cdots\\A_\nu\end{pmatrix}=\Delta\begin{pmatrix}\sum_{j_1=1}^{\nu}\alpha_{1j_1}e_{j_1}\\\sum_{j_2=1}^{\nu}\alpha_{2j_2}e_{j_2}\\\cdots\\\sum_{j_\nu=1}^{\nu}\alpha_{\nu j_\nu}e_{j_\nu}\end{pmatrix}$$

$$=^{\lambda o\gamma\omega\ \ \tau\eta\varsigma(\star)}\sum_{j_1=1}^{\nu}\alpha_{1j_1}\cdot\Delta\begin{pmatrix}e_{j_1}\\\sum_{j_2=1}^{\nu}\alpha_{2j_2}e_{j_2}\\\cdots\\\sum_{j_\nu=1}^{\nu}\alpha_{\nu j_\nu}e_{j_\nu}\end{pmatrix}$$

$$=^{\lambda o\gamma\omega\ \ \tau\eta\varsigma(\star)}\sum_{j_1=1}^{\nu}\sum_{j_2=1}^{\nu}\alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\cdot\Delta\begin{pmatrix}e_{j_1}\\e_{j_1}\\\sum_{j_3=1}^{\nu}\alpha_{3j_3}e_{j_3}\\\cdots\\\sum_{j_\nu=1}^{\nu}\alpha_{\nu j_\nu}e_{j_\nu}\end{pmatrix}=\cdots$$

$$=\sum_{j_1=1}^{\nu}\sum_{j_2=1}^{\nu}\cdots\sum_{j_\nu=1}^{\nu}\alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\cdot\cdots\cdot\alpha_{\nu j_\nu}\cdot\Delta\begin{pmatrix}e_{j_1}\\e_{j_1}\\.\\.\\.\\e_{j_\nu}\end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_\nu=1}^{\nu}\alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\cdot\cdots\cdot\alpha_{\nu j_\nu}\cdot\Delta\begin{pmatrix}e_{j_1}\\e_{j_1}\\.\\.\\.\\e_{j_\nu}\end{pmatrix}$$

, όπου το τελευταίο άθροισμα έχει ν^ν όρους.

Τώρα αν δύο από τους δείκτες $j_1, j_2, j_3, \cdots j_\nu$ είναι ίσοι τότε από $(\star\star)$ έχουμε ότι

$$\Delta\begin{pmatrix}e_{j_1}\\e_{j_1}\\.\\.\\.\\e_{j_\nu}\end{pmatrix}=0.$$

Αν οι δείκτες $j_1, j_2, j_3, \cdots j_\nu$ είναι ανά δύο διαφορετικοί, τότε $\{j_1, j_2, j_3, \cdots j_\nu\} = \{1, 2, \cdots, \nu\}$, άρα αν $f : \{1, 2, \cdots, \nu\} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, \nu\}$ είναι η απεικόνιση με $f(j_1) = 1, f(j_2) = 2, \cdots, f(j_\nu) = \nu$, τότε έχουμε ότι $f \in S_\nu$.

Από την πρόταση 6.3.5 έχουμε ότι η f είναι σύνθεση αντιμεταθέσεων. Αν η f είναι σύνθεση κ αντιμεταθέσεων, τότε από την $(\star\star\star)$ έπεται ότι

$$\Delta\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{j_\nu} \end{pmatrix} = (-1)^{\kappa}\Delta\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_\nu \end{pmatrix}$$

Αλλά $\Delta\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_\nu \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_\nu \end{pmatrix} - D'\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_\nu \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0,$

Άρα $\Delta\begin{pmatrix} e_{j_1} & \\ e_{j_2}\cdot & = 0 \\ \cdot & \\ e_{j_\nu} & \end{pmatrix}$ για κάθε επιλογή δεικτών $j_1, j_2, \cdots, j_\nu$.

Συνεπώς από την (1) παίρνουμε ότι $\Delta(A) = 0$ για κάθε $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Άρα $D(A) = D'(A)$ για κάθε $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Συνεπώς $D = D'$.

Θεώρημα 6.3.8 *Για κάθε φυσικό αριθμό ν υπάρχει ακριβώς μία απεικόνιση ορίζουσας $D : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow F$.*

Αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, τότε η εικόνα του A μέσω της $D, D(A)$ καλείται **ορίζουσα** *του A και συμβολίζεται με* $\det A$.

Απόδειξη. Η ύπαρξη απεικόνισης ορίζουσας έπεται από το πόρισμα 6.3.1. Η μοναδικότητα έπεται από την πρόταση 6.3.7.

Παρατήρηση 6.3.9 *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $f_j : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow F$ οι απεικονίσεις που ορίσθηκαν στην πρόταση 6.2.4. Από την πρόταση 6.3 έπεται ότι*

$$\det A = f_j(A) \ \ \gamma\iota\alpha \ \ \kappa\alpha\theta\epsilon \ 1 \le j \le \nu.$$

Η παράσταση αυτή της ορίζουσας λέγεται ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την στήλη j ή ανάπτυγμα κατά Laplace ως προς τη στήλη j. Να τονίσουμε ξανά ότι το ανάπτυγμα κατά Laplace δεν εξαρτάται από τη στήλη ως προς την οποία θεωρούμε το ανάπτυγμα.

Παράδειγμα 6.3.10 *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Θα την υπολογίσουμε με ανάπτυξη ως προς την 3η-στήλη.

$\det A = f_3(A) = (-1)\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 11 + 18 - 1 = 28$

Παράδειγμα 6.3.11 *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Θα την υπολογίσουμε με ανάπτυξη ως προς την πρώτη στήλη

$$\det A = (-1)\cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = (-1)\cdot 3 \cdot 5 = -15$$

Εύκολα αποδεικνύεται με επαγωγή ως προς ν ότι αν

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1\nu} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2\nu} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \cdot & \cdot & \alpha_{3\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$$

τότε $\det A = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\cdots\alpha_{\nu\nu}$, *δηλαδή η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.*

Παράδειγμα 6.3.12 *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Φυσικά μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του Α αναπτύσσοντας ως προς οποιαδήποτε στήλη θέλουμε.

Όμως μπορούμε, χρησιμοποιώντας ιδιότητες της ορίζουσας να κατασκευάσουμε από τον Α ένα τετραγωνικό πίνακα A' του οποίου η ορίζουσα υπολογίζεται πιό εύκολα και ισχύει $\det A = \kappa \det A'$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα (β) της πρότασης 6.2.2 , δηλαδή ότι αν σε μία γραμμή ενός τετραγωνικού πίνακα Α προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής του Α, τότε ο πίνακας που προκύπτει έχει την ίδια ορίζουσα με τον Α.

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_2\to r_2+2r_1}{=} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_3\to r_3+r_1 \\ r_4\to r_4-r_1}}{=}$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_3\to r_3+2r_2 \\ r_4\to r_4-r_2}}{=} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \overset{D_1}{=}$$

$$2\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \overset{r_4\to r_4+2/3r_3}{=} 2\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5+8/3 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι άνω τριγωνικός άρα η ορίζουσά του είναι το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου. Συνεπώς

$$\det A = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-5 + 8/3).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε $\det(\lambda A) = \lambda^{\nu} \det A$.

2. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου x για τις οποίες

(α) $\det \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 0 & x-4 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix} = 0$

(β) $\det \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix} = 0$

3. Να υπολογισθούν οι ορίζουσες

(i) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \nu \\ -1 & 0 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \nu \\ -1 & -2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \nu \\ -1 & -2 & -3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\det \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $\det \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1+\alpha & 1+\beta & 1+\gamma \\ 2\alpha^2-\alpha-1 & 2\beta^2-\beta-1 & 2\gamma^2-\gamma-1 \end{pmatrix}$

(iv) $\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{nu3} & \cdot & \cdot & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$

4. Αν $A, B \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ να δειχθούν οι ακόλουθες ισότητες

(i) $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{\nu-1}$

$$(ii)\ \det B = \det \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & x & \cdot & \cdot & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & x & 1+x^2 \end{pmatrix} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2\nu}$$

6.4 ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Εδώ δείχνουμε ότι η ορίζουσα του γινομένου δύο τετραγωνικών πινάκων ισούται με το γινόμενο των οριζουσών των πινάκων. Μέσω αυτής της ιδιότητας παίρνουμε και άλλες σημαντικές ιδιότητες των οριζουσών.

Πρώτα θα δούμε πως μεταβάλεται η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα αν εφαρμόσουμε στον πίνακα ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών.

Πρόταση 6.4.1 *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.*

$$i)\ \textit{Αν } A = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{F} \textit{ και } A' = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda A_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \textit{ τότε} \quad \det A' = \lambda \det A.$$

$$ii)\ \textit{Αν } A = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{F} \textit{ και } A'' = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_i + \lambda A_\kappa \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \ \kappa \neq i \textit{ , τότε} \quad \det A'' = \det A.$$

$$iii)\ \textit{Αν } A = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_i \cdot \\ \cdot \\ A_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{F} \quad \textit{και} \quad A''' = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_j \quad (i-\theta\epsilon\sigma\eta) \\ \cdot \\ \cdot \\ A_i \quad (j-\theta\epsilon\sigma\eta) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \textit{ τότε} \quad \det A''' = -\det A.$$

Απόδειξη.

(i) Η (i) έπεται από την D_1 του ορισμού 6.1.1.

(ii) Η (ii) είναι η (β) της πρότασης 6.2.2

(iii) Η (iii) είναι η (α) της πρότασης 6.2.2

Πρόταση 6.4.2 *Αν $E \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι ένας στοιχειώδης πίνακας, τότε*

$$\det(EA) = (\det E)(\det A)$$

για κάδε $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας $E \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ λέγεται στοιχειώδης αν λαμβάνεται από τον I_ν μέσω ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών.

Συνεπώς από την πρόταση 6.4.1 έχουμε

(1) Αν ο E λαμβάνεται από τον I_ν μέσω πολλαπλασιασμού μιας γραμμής του I_ν με κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$ τότε $\det E = \lambda \det I_\nu = \lambda$, αφού $\det I_\nu = 1$.

(2) Αν ο E προκύπτει από τον I_ν, προσθέτοντας σε μία γραμμή του I_ν ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής του I_ν, τότε $\det E = \det I_\nu = 1$.

(3) Αν ο E προκύπτει από τον I_ν, μέσω μιας αντιμετάθεσης των γραμμών του I_ν, τότε $\det E = -\det I_\nu = -1$

Τώρα αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, τότε ξέρουμε ότι ο πίνακας EA είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν εφαρμόσουμε στον A τον στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών που εφαρμόσαμε στον I_ν για να πάρουμε τον E. Συνεπώς αν

$$EA = \begin{cases} A', & \text{αν ο } E \text{ είναι όπως στην (1)} \\ A'', & \text{αν ο } E \text{ είναι όπως στην (2)} \\ A''', & \text{αν ο } E \text{ είναι όπως στην (3)} \end{cases}$$

τότε από την πρόταση 6.4.1 έχουμε ότι

αν ο E είναι όπως στην (1) τότε $\det(EA) = \det A' = \lambda detA = (\det E)(detA)$

αν ο E είναι όπως στην (2) τότε $\det(EA) = \det A'' = \det A = 1 \cdot \det A = (\det E)(\det A)$

αν ο E είναι όπως στην (3) τότε $\det(EA) = \det A''' = -\det A = (-1)\det A = (\det E)(\det A)$

και η πρόταση εδείχθη.

Θεώρημα 6.4.3 *Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τότε*

$\det(AB) = (\det A)(\det B)$

Απόδειξη. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε ξέρουμε ότι υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\rho$ με

$A = \Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_\rho$. Συνεπώς από την πρόταση 6.4.2 έχουμε

$\det(AB) = \det(\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_\rho B) = (\det\Gamma_1)\det(\Gamma_2\Gamma_3\cdots\Gamma_\rho B)$

$=(\det\Gamma_1)(\det\Gamma_2)\det(\Gamma_3\cdots\Gamma_\rho B) = \cdots$

$= (\det \Gamma_1)(\det \Gamma_2)(\det \Gamma_3) \cdots (\det \Gamma_\rho)(\det B)$
$= (\det \Gamma_1)(\det \Gamma_2) \cdots (\det(\Gamma_{\rho-1}\Gamma_\rho))(\det B) = \cdots$
$= \det(\Gamma_1 \cdots \Gamma_\rho)(\det B) = (\det A)(\det B)$.

Αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος τότε από το πόρισμα 6.2.3 έπεται ότι $\det A = 0$. Τώρα επειδή ο A δεν είναι αντιστρέψιμος έπεται ότι η τάξη του A είναι μικρότερη του ν, άρα και η τάξη του AB είναι μικρότερη του ν, άρα από την πρόταση 6.2.2 (γ) έπεται ότι $\det(AB) = 0$. Συνεπώς

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

Θεώρημα 6.4.4 *Ένας πίνακας* $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ *είναι αντιστρέγιμος αν και μόνο αν* $\det A \neq 0$.

Απόδειξη. Αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος τότε από το πόρισμα 6.2.3 έπεται ότι $\det A = 0$. Συνεπώς μένει να δείξουμε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε $\det A \neq 0$.

Πράγματι αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε ξέρουμε ότι υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\rho$ τέτοιοι ώστε $\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_\rho A = I_\nu$.

Από την πρόταση 6.4.2 έχουμε ότι

$$\det(\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_\rho A) = (\det \Gamma_1)(\det \Gamma_2)(\det \Gamma_3)\cdots(\det \Gamma_\rho)(\det A) = \det(I_\nu) = 1$$

Πόρισμα 6.4.5 *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες για ένα πίνακα* $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$*:*

(i) *Ο πίνακας A είναι αντιστρέγιμος*

(ii) *Η τάξη του πίνακα A είναι* ν*.*

(iii) $\det A \neq 0$

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.

Τώρα θα δείξουμε ότι η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα ισούται με την ορίζουσα του αναστρόφου του.

Εύκολα βλέπει κανείς ότι αν E είναι ένας στοιχειώδης πίνακας τότε $\det E = \det E^t$.

Πρόταση 6.4.6 *Έστω* $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$*. Τότε* $\det A = \det A^t$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Τότε ξέρουμε ότι υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\rho$ με $A = \Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_\rho$. Από το θεώρημα 6.4.3 , έχουμε

$(\star)$ $\det A = \det(\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_\rho) = \det(\Gamma_1)\det(\Gamma_2)\cdots\det(\Gamma_\rho)$
$= \det(\Gamma_\rho)\det(\Gamma_{\rho-1})\cdots\det(\Gamma_1)$.

Αλλά αν E είναι ένας στοιχειώδης πίνακας, τότε $\det E = \det E^t$, άρα η $(\star)$ γίνεται $\det A = (det\Gamma_\rho^t)\cdots(\det \Gamma_1^t) = \det(\Gamma_\rho^t\cdots\Gamma_1^t) = \det A^t$.

Αν τώρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος τότε η τάξη του A είναι μικρότερη του ν, συνεπώς και η τάξη του A^t είναι μικρότερη του ν άρα ο A^t δεν είναι αντιστρέψιμος. Από το πόρισμα 6.2.3 έχουμε ότι $\det A = 0 = \det A^t$.

Από την πρόταση 6.4.6 έπεται εύκολα ότι όλες οι ιδιότητες, σχετικά με ορίζουσες, που αφορούν τις γραμμές ενός πίνακα ισχύουν και για τις στήλες του πίνακα.

Έτσι έχουμε ότι:

(1) Η $\det : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ είναι γραμμική ως προς κάθε στήλη.

(2) Αν δύο στήλες ενός πίνακα $a \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι ίσες τότε $\det A = 0$.

(3) Έστω $A = (\alpha_{ij}) = (\cdots A^{(i)} \cdots A^{(j)} \cdots) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$,

όπου $A^{(\kappa)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1\kappa} \\ \alpha_{2\kappa} \\ \vdots \\ \alpha_{\nu\kappa} \end{pmatrix}$ η κ-στήλη του A, $1 \leq \kappa \leq \nu$.

Αν $A' = (\cdots \underset{i\text{-θέση}}{\underset{\uparrow}{A^{(j)}}} \cdots \underset{j\text{-θέση}}{\underset{\uparrow}{A^{(i)}}} \cdots)$ τότε $\det A = -\det A'$. Δηλαδή, αν ένας πίνακας A' προκύπτει από ένα τετραγωνικό πίνακα A, μέσω αντιμετάθεσης δύο στηλών του A, τότε $D(A) = -D(A')$.

(4) Έστω $A = (\cdots, A^{(i)}, \cdots) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και

$A' = (\cdots \underbrace{A^{(i)} + \lambda A^{(\kappa)}}_{i\text{-θέση}} \cdots) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, $i \neq \kappa$, $\lambda \in F$

τότε $\det A = \det A'$.

(5) Αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και οι στήλες του $A, A^{(1)}, \cdots, A^{(\nu)}$ είναι γραμμικά εξαρτημένες τότε $\det A = 0$

Επίσης έχουμε ότι αν $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}, A = (\alpha_{ij})$

τότε $\det A = \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \cdot \det A_{ij} \quad (i = 1, 2 \cdots, \nu)$

Η παράσταση αυτή της ορίζουσας λέγεται ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την γραμμή i ή ανάπτυγμα κατά Laplace ως προς τη γραμμή i. Να τονίσουμε ξανά ότι το ανάπτυγμα κατά Laplace δεν εξαρτάται από τη γραμμή ως προς την οποία θεωρούμε το ανάπτυγμα.

Συνεπώς αν θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα μπορούμε να θεωρήσουμε το ανάπτυγμα ως προς οποιαδήποτε στήλη ή γραμμή διαλέξουμε.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 6.4.3 θα δείξουμε ότι όμοιοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα.

Πρόταση 6.4.7 *Αν* $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ *είναι όμοιοι πίνακες, τότε* $\det A = \det B$.

Απόδειξη. Αφού οι A,B είναι όμοιοι υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας T με $TAT^{-1} = B$. Άρα $\det(T)AT^{-1}) = \det B$ και από το θεώρημα 6.4.3 έχουμε $\det B = det(TAT^{-1}) = (\det T)(\det A)(\det T^{-1}) = (\det T)(\det T^{-1})(\det A) = \det(TT^{-1}) \det A = \det(I_\nu) \det A = 1 \cdot \det A = \det A$.

Έστω τώρα V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ διάστασης ν και $f : V \longrightarrow V$ μία γραμμική απεικόνιση.

Αν $\widehat{v}, \widehat{w}$ δύο διατεταγμένες βάσεις του V τότε ξέρουμε ότι οι πίνακες $(f : \widehat{v}, \widehat{v})$ και $(f : \widehat{w}, \widehat{w})$ είναι όμοιοι.

Ορισμός 6.4.8 *Ορίζουμε* $\det f = \det(f : \widehat{v}, \widehat{v})$.

Από την πρόταση 6.4.7 έπεται ότι ο ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή της διατεταγμένης βάσης του V.

Θεώρημα 6.4.9 *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ πεπερασμένης διάστασης και $f : V \longrightarrow V$ μία γραμμική απεικόνιση. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες για την f.*

1. *Η f είναι αντιστρέψιμη*
2. *Η f είναι 1-1*
3. *Η f είναι επί*
4. $\det f \neq 0$

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω η γραμμική απεικόνιση
   $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $(x, y, z) \longmapsto (2x + y + 3z, x - y + 2z, 4x + 5y - 2z)$.
   (i) Να βρεθεί η $detf$.
   (ii) Να εξετασθεί αν η f είναι επί.
2. Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $A^\kappa = 0$. Να δειχθεί ότι $detA = 0$.
3. Να δειχθεί ότι αν $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και A,B αντιστρέψιμοι, τότε και ο AB είναι αντιστρέψιμος.
4. Να δειχθεί ότι

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_\nu \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_\nu^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{\nu-1} & x_2^{\nu-1} & \cdots & x_\nu^{\nu-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq\nu} (x_j - x_i)$$

   Υπόδειξη : Επαγωγή ως προς ν.

   Παρατηρούμε ότι αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_\nu \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_\nu^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{\nu-1} & x_2^{\nu-1} & \cdots & x_\nu^{\nu-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_\nu \end{pmatrix}, \text{ και}$$

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ . \\ . \\ . \\ A'_\nu \end{pmatrix} \text{ με } \begin{array}{l} A'_1 = A_1 \\ A'_2 = A_2 - x_1 A_1 \\ A'_3 = A_3 - x_1 A_2 \\ \cdot \\ . \\ . \\ A'_\nu = A_\nu - x_1 A_{\nu-1} \end{array} \quad \text{τότε } \det A = \det A'.$$

Η ανωτέρω ορίζουσα λέγεται ορίζουσα του Vandermonde

5. Να υπολογισθούν οι ορίζουσες των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 1 & 4 & 25 \\ -1 & 27 & 1 & 8 & 125 \\ 1 & 81 & 1 & 16 & 625 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{pmatrix}$$

6. Έστω $\Delta \in \mathbb{F}^{(\mu+\nu)\times(\mu+\nu)}$, με $\Delta = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix}$ όπου $A \in \mathbb{F}^{\mu\times\mu}, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}, 0 \in \mathbb{F}^{\nu\times\mu}$ και $\Gamma \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Δείξτε ότι $\det \Delta = (\det A)(\det B)$.

7. Αν $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0\cdot & \cdot & \cdot & 0 & \\ 0 & A_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_\kappa \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $A_i \in \mathbb{F}^{\nu_i\times\nu_i}$,

   $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\kappa$

   τότε $\det A = (\det A_1)(\det A_2)\cdots(\det A_\kappa)$

8. Έστω $\phi : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$ με την ιδιότητα $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$ για κάθε $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$.

   Να δειχθεί ότι ακριβώς ένα από τα ακόλουθα ισχύει για την ϕ

   (i) $\phi(A) = 0$ για κάθε $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$

   (ii) $\phi(I_\nu) = 1$

6.5 ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Πρώτα θα βρούμε ένα τρόπο υπολογισμού του αντιστρόφου ενός αντιστρεψίμου πίνακα. Έστω $A = (\alpha_{ij}) = (A^{(1)} \cdots A^{(\nu)}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ένας πίνακας και $B = (\beta_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $\beta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})$.

Θα δείξουμε ότι $AB = BA = (\det A)I_\nu$, οπότε αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $\det A \neq 0$ και $A^{-1} = (1/\det A)B$.

Έστω $\Gamma = (\gamma_{ij}) = BA$. Τότε
$\gamma_{ij} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \beta_{i\kappa}\alpha_{\kappa j} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} (-1)^{i+\kappa}\alpha_{\kappa j} \cdot \det(A_{\kappa i})$

$= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\kappa j} \cdot \det(A^{(1)} \cdots A^{(i-1)} e^{(\kappa)} A^{(i+1)} \cdots A^{(\nu)})$, όπου $e^{(\kappa)}$ η κ-στήλη του I_ν.

Η τελευταία ισότητα προκύπτει εύκολα, αν υπολογίσει κανείς την τελευταία ορίζουσα αναπτύσσοντας ως προς την i-στήλη,

$\det(A^{(i)} \cdots A^{(i-1)} e^{(\kappa)} A^{(i+1)} \cdots A^{(\nu)}) = (-1)^{i+\kappa} \cdot \det(A_{\kappa i})$.

Επειδή τώρα η ορίζουσα είναι γραμμική ως προς κάθε στήλη έχουμε ότι

$\gamma_{ij} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\kappa j} \cdot det(A^{(1)} \cdots A^{(i-1)} e^{(\kappa)} A^{(i+1)} \cdots A^{(\nu)})$=

$\det(A^{(1)} \cdots A^{(i-1)} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\kappa j} e^{(\kappa)} A^{(i+1)} \cdots A^{(\nu)})$=

$\det(A^{(1)} \cdots A^{(i-1)} A^{(j)} A^{(i+1)} \cdots A^{(\nu)}) = \delta_{ij} \cdot \det A$.

Άρα $BA = (\det A) I_\nu$. Ανάλογα δείχνουμε ότι $AB = (\det A) I_\nu$.

Συνεπώς δείξαμε την

Πρόταση 6.5.1 *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$. Αν $B = (\beta_{ij}) \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ με*
$\beta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ji}$ τότε

$$AB = (\det A) I_\nu = BA$$

Ο πίνακας B λέγεται **προσαρτημένος** πίνακας του A και συμβολίζεται με $adjA$.

Πόρισμα 6.5.2 *Αν $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας, τότε*

$$A^{-1} = (1/\det A) \cdot adjA$$

Παρατηρούμε ότι ο τύπος αυτός του αντιστρόφου έχει περισσότερο θεωρητικό ενδιαφέρον από χρηστικό επειδή για να υπολογισθεί ο προσαρτημένος πίνακας απαιτούνται πολλές πράξεις.

Παράδειγμα 6.5.3 *Έστω* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *τότε* $\det A = 4$ *και*

$$adjA = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Άρα $A^{-1} = 1/4 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα ν γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους :

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \alpha_{\nu 1}x_1 + \alpha_{\nu 2}x_2 + \cdots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu = \beta_\nu \end{array}$$

ή σε μορφή πινάκων $AX = B$, όπου $A = (\alpha_{ij})$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_\nu \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\nu \end{pmatrix}.$$

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε βέβαια

$X = A^{-1}B$ και επειδή $A^{-1} = (1/\det A) \cdot adjA$ έχουμε ότι

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_\nu \end{pmatrix} = (1/\det A) \cdot adjA \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\nu \end{pmatrix}$$

δηλαδή

$$x_i = (1/\det A) \cdot \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^{i+j} b_j \det A_{ji} \qquad (\star)$$

Αν τώρα συμβολίσουμε με $\overline{A_i}$ τον πίνακα που προκύπτει από τον A αντικαθιστώντας την i-στήλη του με την στήλη B, δηλαδή

$$\overline{A_i} = (A^{(1)} \cdots A^{(i-1)} B A^{(i)} \cdots A^{(\nu)})$$

και υπολογίσουμε την $\det \overline{A_i}$, αναπτύσσοντας ως προς την i-στήλη, τότε παίρνουμε

$\det \overline{A_i} = \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^{i+j} b_j \cdot \det A_{ji}$ άρα η $(\star)$ γίνεται $x_i = \frac{\det \overline{A_i}}{\det A}$.

Δηλαδή αν $AX = B$ είναι ένα σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους και A είναι αντιστρέψιμος πίνακας , τότε

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \alpha_{1i-1} & \beta_1 & \alpha_{1i+1} \cdot & \cdot & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \cdot & \cdot & \alpha_{2i-1} & \beta_2 & \alpha_{2i+1} \cdot & \cdot & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \cdot & \cdot & \alpha_{\nu i-1} & \beta_\nu & \alpha_{\nu i+1} \cdot & \cdot & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}}{\det A}$$

για $1 \leq i \leq \nu$.

Αυτός ο μαθηματικός τύπος που παριστάνει την λύση ενός γραμμικού συστήματος λέγεται τύπος του **Cramer**

Παρατήρηση 6.5.4 *Ο τύπος του Cramer δεν προσφέρεται ιδιαίτερα για υπολογισμούς, επειδή για τον υπολογισμό οριζουσών συνήθως απαιτούνται πολλές πράξεις. Είναι χρήσιμος για άλλου είδους ερωτήματα. Η κατ' εξοχήν μέθοδος αριθμητικής λύσης ενός συστήματος είναι η μέθοδος απαλειφής του Gauss και οι παραφυάδες της οι οποίες αναπτύσονται σε βιβλία αριθμητικής ανάλυσης..*

Παράδειγμα 6.5.5 *Έστω το ακόλουθο σύστημα:*

$$\begin{aligned} &x_1 - x_3 = 1 \\ &2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ &x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο του πίνακα A που υπολογίσθηκε στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1/4 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ -7/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

Με τη μέθοδο του Cramer έχουμε

$$x_1 = 1/4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 7/4$$

$$x_2 = 1/4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = -7/4$$

$$x_3 = 1/4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3/4$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

   Να δειχθεί ότι $adj A = A$.

2. Έστω $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ ένας άνω τριγωνικός πίνακας με μή μηδενικά διαγώνια στοιχεία. Να δειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι ο αντίστροφός του είναι επίσης άνω τριγωνικός.

3. Αν ο $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$ είναι αντιστρέψιμος τότε να δειχθεί ότι

   $adj(adj A) = (\det A)^{\nu-2} \cdot A$

4. Να δειχθεί ότι αν ο $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ είναι συμμετρικός τότε και ο $adj A$ είναι συμμετρικός.

5. Να βρεθεί ο $adj A$ και ο αντίστροφος του A αν υπάρχει, όπου $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

6. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Cramer για την επίλυση των συστημάτων:

$$
(i)\quad \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \end{array}
\qquad\qquad
(ii)\quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7 \end{array}
$$

Κεφάλαιο 7

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Είδαμε ότι το σύνολο λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος μ εξισώσεων με ν αγνώστους, $AX = 0$, $A \in F^{\mu\times\nu}$, είναι ένας διανυσματικός χώρος. Συγκεκριμένα, το σύνολο λύσεων του $AX = 0$ είναι ο υπόχωρος $\ker\gamma_A$ του $F^{\nu\times 1}$.
Εδώ θα δούμε ότι ένα γραμμικό σύστημα $AX = B$ έχει λύση αν και μόνο αν $rkA = rk(A|B)$, όπου $A|B$ ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος. Επιπλέον, θα δούμε ότι αν το σύστημα $AX = B$ έχει λύση και αν Λ είναι μια λύση του, τότε το σύνολο των λύσεων του $AX = B$ είναι το υποσύνολο $\Lambda + \ker\gamma_A = \{\Lambda + Y \in F^{\nu\times 1}|Y \in \ker\gamma_A\}$ του $F^{\nu\times 1}$.

7.1 ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Έστω ένα ομογενές γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους

$$\begin{array}{c}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}x_\nu = 0 \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu}x_\nu = 0 \\
\cdots \qquad \cdots \\
\alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu}x_\nu = 0
\end{array}$$

όπου $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}, 1 \leq j \leq \nu$.

Σε μορφή πινάκων γράφεται ως $AX = 0$, όπου $A = (\alpha_{ij}) = (A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(\nu)}) \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$.

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$\gamma_A : \mathbb{F}^{\nu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu\times 1} \text{ με } X \longrightarrow AX.$$

Είναι προφανές ότι το σύνολο $\{X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1} \mid AX = 0\} = \ker\gamma_A$ είναι το σύνολο λύσεων του συστήματος $AX = 0$.

Τώρα ξέρουμε ότι $dim_F(\ker\gamma_A) = \nu - dim_F(Im\gamma_A)$. Αλλά ο $Im\gamma_A$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\mu\times 1}$, που παράγεται από τις στήλες του A, άρα $dim(Im\gamma_A) = rkA$.

Συνεπώς δείξαμε ότι :

Πρόταση 7.1.1 *Το σύνολο των λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος μ εξισώσεων με ν αγνώστους, $AX = 0$, είναι ένας υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$ διάστασης $\nu - rkA$. Συγκεκριμένα ο χώρος των λύσεων του $AX = 0$ είναι ο υπόχωρος $\ker\gamma_A$ του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$.*

Πόρισμα 7.1.2 *Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους $AX = 0$, έχει μή τετριμμένες λύσεις αν και μόνο αν $rkA < \nu$.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την προηγούμενη πρόταση.

Πόρισμα 7.1.3 *Έστω $AX = 0$ ένα ομογενές γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους. Αν το πλήθος των αγνώστων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των εξισώσεων τότε το σύστημα $AX = 0$ έχει μή τετριμμένη λύση.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\nu > \mu$. Αλλά $r(A) \leq \mu$. Το αποτέλεσμα τώρα έπεται από το πόρισμα 7.1.2 .

Πόρισμα 7.1.4 *Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους $AX = 0$, έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 7.1.1 έπεται ότι το σύστημα $AX = 0$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\nu = rkA$. Τώρα ο A είναι ένας τετραγωνικός $\nu\times\nu$ πίνακας, άρα $rkA = \nu$ αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.

Παράδειγμα 7.1.5 *Να βρεθεί μία βάση του χώρου των λύσεων του συστήματος $AX = 0$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.*

Μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών παίρνουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\to r_3+r_1]{r_2\to r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\to 1/3 r_2]{r_3\to r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

Ξέρουμε ότι το σύστημα $A'X = 0$ είναι ισοδύναμο με το $AX = 0$, δηλαδή

$$\{X \in \mathbb{R}^{5\times 1} \mid AX = 0\} = \ker\gamma_A = \{X \in \mathbb{R}^{5\times 1} \mid A'X = 0\} = \ker\gamma_{A'}.$$

Προφανώς $rkA = rkA = 2$ άρα το σύνολο λύσεων του $AX = 0$ έχει διάσταση 5-2=3.

Τώρα από το σύστημα $A'X = 0$, δηλαδή

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$
$$x_3 + 1/3x_4 + x_5 = 0$$

παίρνουμε ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3x_2 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 \\ -1/3x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 1} \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu\epsilon \;\; x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Αν $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*, τότε βλέπουμε ότι ο χώρος των λύσεων του* $AX = 0$ *παράγεται από τα* v_1, v_2, v_3*. Επιπλέον εύκολα βλέπουμε ότι τα* v_1, v_2, v_3 *είναι γραμμικά ανεξάρτητα άρα αποτελούν μία βάση του χώρου των λύσεων του* $AX = 0$*.*

Παράδειγμα 7.1.6 *Να βρεθεί μία βάση του χώρου των λύσεων του συστήματος* $AX = 0$*, όπου* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

Εύκολα βλέπουμε ότι ο $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ *είναι γραμμοϊσοδύναμος προς τον* $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*.*

Το σύνολο λύσεων του $AX = 0$ *είναι το ίδιο με το σύνολο λύσεων του* $A'X = 0$*. Προφανώς* $rkA = rkA' = 2$*, άρα το σύνολο λύσεων του* $AX = 0$ *έχει διάσταση 4-2=2.*

Τώρα από το σύστημα $A'X = 0$,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + (1/3)x_3 - (2/3)x_4 = 0 \end{aligned},$$

παίρνουμε ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι:

$$\left\{ \begin{pmatrix} (-4/3)x_3 - (4/3)x_4 \\ -(1/3)x_3 + (2/3)x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Αν $v_1 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *και* $v_2 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*, τότε είδαμε ότι ο χώρος λύσεων παράγεται από τα* v_1, v_2*. Επιπλέον εύκολα βλέπουμε ότι τα* v_1, v_2 *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα τα* v_1, v_2 *είναι μία βάση του χώρου λύσεων του* $AX = 0$*.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί μία βάση για το χώρο των λύσεων του συστήματος $AX = 0$, όπου

   i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ -4 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

   ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 4}$

2. Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα $AX = 0$, όπου $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, έχει περισσότερες από μία λύσεις;

3. Για ποιές τιμές του μ το σύνολο λύσεων του συστήματος $AX = 0$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & -1 & -10 & \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, έχει διάσταση 1;

4. Να βρεθεί μία βάση για το χώρο λύσεων του συστήματος

   $$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0,$$

   όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{1\times 5}$.

5. Έστω ότι $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\nu$ είναι μή-μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί ανά δύο διαφορετικοί μεταξύ τους.

   Να δειχθεί ότι η μόνη λύση του

   $$\begin{array}{c} \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_\nu x_\nu = 0 \\ \gamma_1^2 x_1 + \gamma_2^2 x_2 + \cdots + \gamma_\nu^2 x_\nu = 0 \\ \cdots \\ \gamma_1^\nu x_1 + \gamma_2^\nu x_2 + \cdots + \gamma_\nu^\nu x_\nu = 0 \end{array}$$

   είναι η τετριμμένη.

7.2 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Έστω ένα γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}x_\nu &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu}x_\nu &= \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu}x_\nu &= \beta_\mu \end{aligned}$$

όπου $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}, \beta_i \in \mathbb{F}\ 1 \leq i \leq \mu, 1 \leq j \leq \nu$.

Σε μορφή πινάκων αυτό γράφεται ως $AX = B$, όπου $A = (\alpha_{ij}) = (A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(\nu)}) \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ και $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_\mu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}$.

Ένα στοιχείο $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_\mu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}$, είναι μία λύση του $AX = B$ αν και μόνο αν $A\Lambda = B$ ή ισοδύναμα αν και μόνο αν $B = \lambda_1 A^{(1)} + \lambda_2 A^{(2)} + \cdots + \lambda_\nu A^{(\nu)}$. Αλλά ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$, που παράγεται από τις στήλες του A είναι η εικόνα $Im\gamma_A$, όπου $\gamma_A : \mathbb{F}^{\nu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu\times 1},\ X \longmapsto AX$. Άρα δείξαμε ότι:

Λήμμα 7.2.1 *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες για ένα σύστημα $AX = B$, με $A \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$.*

1) Το σύστημα έχει λύση

2) Το $B \in \mathbb{F}^{\mu\times 1}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A.

3) $B \in Im\gamma_A$.

Είδαμε ότι αν ένα σύστημα $AX = B, A \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ έχει λύση, τότε ο B είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A, άρα

$$rk(A^{(1)}A^{(2)}\cdots A^{(\nu)}) = rk(A^{(1)}A^{(2)}\cdots A^{(\nu)}B),$$

δηλαδή $rkA = rk(A \mid B)$.

Στο επόμενο θεώρημα θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 7.2.2 *Ένα σύστημα $AX = B$ έχει λύση αν και μόνο αν $rkA = rk(A \mid B)$.*

Απόδειξη. Μένει να δείξουμε ότι αν $rkA = rk(A \mid B)$ τότε το σύστημα $AX = B$ έχει λύση ή ισοδύναμα από το προηγούμενο Λήμμα, ότι $B \in Im\gamma_A$.

Ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\mu\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες του A είναι ο υπόχωρος $Im\gamma_A$. Επίσης ισχύει ότι $dim_F(Im\gamma_A) = rkA$.

Ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\mu\times 1}$, που παράγεται από τις στήλες του $(A \mid B)$, είναι ο $Im\gamma_{(A|B)}$ και $dim_F(Im\gamma_{(A|B)}) = rk(A \mid B)$.

Είναι προφανές ότι $Im\gamma_A \subseteq Im\gamma_{(A|B)}$ και επειδή $dim_F(Im\gamma_A) = rkA = rk(A \mid B) = dim_F(Im\gamma_{(A|B)})$, έχουμε ότι $Im\gamma_A = Im(\gamma_{(A|B)})$. Αλλά $B \in Im(\gamma_{(A|B)})$, άρα $B \in Im\gamma_A$.

Παράδειγμα 7.2.3 *Να καθοριστούν οι τιμές του α, για τις οποίες το σύστημα:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= \alpha \end{aligned}$$

έχει λύση.

Σε μορφή πινάκων το ανωτέρω σύστημα γράφεται ως $AX = B$, *όπου* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *και* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$. *Από το θεώρημα 7.2.2 έχουμε ότι το σύστημα* $AX = B$, *έχει λύση αν και μόνο αν* $rkA = rk(A \mid B)$. *Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών έχουμε:*

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to 1/3 r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & (1/3) \\ 0 & 1 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & (1/3) \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 4/3 \end{pmatrix}.$$

Τώρα βλέπουμε ότι $rkA = 2$ *και* $rk(A \mid B) = 2$ *αν και μόνο αν* $\alpha = 4/3$. *Άρα το σύστημα* $AX = B$ *έχει λύση αν και μόνο αν* $\alpha = 4/3$.

Έστω $AX = B$ ένα σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους, $A \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση:

$$\gamma_A : \mathbb{F}^{\nu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu\times 1}, \ \text{ με } \ X \longmapsto AX.$$

Το σύνολο λύσεων του συστήματος $AX = B$ είναι το $\{X \in \mathbb{F}^{\nu\times 1} \mid AX = B\} = \gamma_A^{-1}(\{B\})$, όπου $\gamma_A^{-1}(\{B\})$ είναι η αντίστροφη εικόνα του υποσυνόλου $\{B\}$ του $\mathbb{F}^{\mu\times 1}$ μέσω της γ_A. Θα μελετήσουμε το σύνολο λύσεων ενός συστήματος $AX = B$, δηλαδή το σύνολο $\gamma_A^{-1}(\{B\})$.

Συμβολισμός 7.2.4 *Έστω* V *ένας διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$ *και* W *ένας υπόχωρος του. Αν* $x \in V$ *τότε το υποσύνολο του* V, $\{x + w \in V \mid w \in W\}$ *συμβολίζεται με* $x + W$.

Πρόταση 7.2.5 *Έστω* $AX = B$ *ένα σύστημα με* $A \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$. *Αν* Λ *είναι μία λύση του συστήματος, τότε το σύνολο των λύσεων του* $AX = B$ *είναι το υποσύνολο* $\Lambda + \ker\gamma_A$ *του* $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\Lambda + \ker\gamma_A = \gamma_A^{-1}(\{B\})$ ισούται με το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX = B$.

Έστω $Z \in \Lambda + \ker\gamma_A$. Τότε υπάρχει $M \in \ker\gamma_A$ με $Z = \Lambda + M$ και $AZ = A(\Lambda + M) = A\Lambda + AM = B + 0 = B$, άρα το Z είναι μία λύση του $AX = B$, συνεπώς $Z \in \gamma_A^{-1}(\{B\})$.

Δείξαμε ότι $\Lambda + \ker\gamma_A \subseteq \gamma_A^{-1}(\{B\})$ $\qquad(\star)$.

Έστω τώρα $N \in \gamma_A^{-1}(\{B\})$. Τότε $AN = B$, άρα $A(N - \Lambda) = AN - A\Lambda = B - B = 0$, συνεπώς $N - \Lambda \in \ker\gamma_A$.

Άρα δείξαμε ότι $\gamma_A^{-1}(\{B\}) \subseteq \Lambda\gamma_A$ $\qquad(\star\star)$.

Το αποτέλεσμα τώρα έπεται από τα $(\star)$ και $(\star\star)$

Παρατήρηση 7.2.6 *1) Αν Λ_1, Λ_2 είναι λύσεις του $AX = B$, τότε από την απόδειξη της πρότασης 7.2 έχουμε ότι*

$$\Lambda_1 + \ker\gamma_A = \gamma_A^{-1}(\{B\}) = \Lambda_2 + \ker\gamma_A.$$

2) Έστω $AX = B$ ένα σύστημα με $A \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ και $B \neq 0$. Τότε το σύνολο λύσεων του $AX = B$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$. Πράγματι $0 \notin \gamma_A^{-1}(\{B\})$.

Πόρισμα 7.2.7 *Έστω $AX = B$ ένα σύστημα με $A \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ και $v_1, v_2, \cdots, v_\rho$ μία βάση του χώρου των λύσεων του ομογενούς συστήματος $AX = 0$. Αν Λ είναι μία λύση του $AX = B$, τότε το σύνολο των λύσεων του $AX = B$ είναι το*

$$\{\Lambda + \sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2 + \cdots + \sigma_\rho v_\rho \in \mathbb{F}^{\nu\times 1} \mid \sigma_\kappa \in \mathbb{F}, 1 \leq \kappa \leq \rho\}.$$

Επιπλέον $\rho = \nu - rkA$.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την προηγούμενη πρόταση και το ότι ο χώρος των λύσεων του ομογενούς συστήματος $AX = 0$ είναι ο $\ker\gamma_A$.

Θεώρημα 7.2.8 *Ένα σύστημα $AX = B$ με $A \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν $rkA = rk(A \mid B) = \nu$.*

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση, έπεται ότι αν το σύστημα έχει λύση, τότε έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\ker\gamma_A = 0$. Αλλά $rkA = dim_F(Im\gamma_A) = \nu - dim_F(\ker\gamma_A)$. Το αποτέλεσμα τώρα έπεται από το *θεώρημα* 7.2.2 .

Πόρισμα 7.2.9 *Ένα σύστημα $AX = B$ με $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.*

Απόδειξη. Άμεση από το *θεώρημα* 7.2.8 και το πόρισμα 7.1.4

Παράδειγμα 7.2.10

1) Να βρεθεί το σύνολο λύσεων του συστήματος $AX = B$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4} \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}.$$

Πρώτα θα εξετάσουμε αν το σύστημα έχει λύση. Από το θεώρημα 7.2.2 έχουμε ότι το σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν $rkA = rk(A \mid B)$.

Τώρα μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών παίρνουμε:

$$(\star) \qquad (A \mid B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to -r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι $rkA = 2 = rk(A \mid B)$, *άρα το σύστημα έχει λύση.*

Επιπλέον αν Λ *είναι μία λύση του* $AX = B$ *και* $\{v_1, v_2, \cdots, v_\rho\}$ *μία βάση του χώρου λύσεων του* $AX = 0$, *τότε από το πόρισμα 7.2.7 έχουμε ότι το σύνολο λύσεων του* $AX = B$ *είναι το σύνολο*

$$\Lambda + \sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2 + \cdots + \sigma_\rho v_\rho \in \mathbb{R}^{4\times 1} \mid \sigma_\kappa \in \mathbb{R}, 1 \leq \kappa \leq 5\}$$

Συνεπώς θα πρέπει να βρούμε μία λύση του $AX = B$ *και μία βάση του χώρου λύσεων του* $AX = 0$.

Από την $(\star)$, *έχουμε ότι αν* $A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *και* $B' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Τότε*

(i) *Το σύστημα* $AX = B$ *είναι ισοδύναμο με το* $A'X = B'$.

(ii) *Το σύστημα* $AX = 0$ *είναι ισοδύναμο με το* $A'X = 0$.
Θεωρούμε το σύστημα $A'X = B'$,

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $x_4 = 0 = x_2$, *τότε έπεται ότι το* $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *είναι μία λύση του* $A'X = B'$, *άρα και του* $AX = B$.
Το σύνολο των λύσεων του $AX = 0$ *είναι το ίδιο με το σύνολο των λύσεων του* $A'X = 0$, *το οποίο εύκολα βλέπουμε ότι είναι*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Προφανώς αν $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *και* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, *τότε τα* v_1, v_2 *είναι μία βάση του χώρου λύσεων του* $AX = 0$. *Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος* $AX = B$ *είναι το*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2) Να βρεθεί το σύνολο λύσεων του συστήματος $AX = B$, *όπου*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3} \text{ και } B = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1}.$$

Μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών παίρνουμε:

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \to r_4 - r_1]{\substack{r_2 \to r_2 + 3r_1 \\ r_3 \to r_3 + 2r_1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 \to r_3 - 2r_2 \\ r_4 \to -1/3 r_4}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι $rkA = 3 = rk(A \mid B)$, *άρα το σύστημα* $AX = B$ *έχει λύση.*

Τώρα το σύστημα $AX = B$ *είναι ισοδύναμο με το σύστημα* $A'X = B'$, *όπου* $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *και* $B' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *δηλαδή με το* $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$

Εύκολα τώρα βλέπουμε ότι το $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ *είναι μία λύση του* $A'X = B'$ *άρα και του* $AX = B$. *Επιπλέον επειδή* $rkA = rk(A \mid B) = 3$, *από το θεώρημα 7.2.8 έπεται ότι το* Λ *είναι η μοναδική λύση του συστήματος.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί το σύνολο των λύσεων των παρακάτω συστημάτων:

1. [(i)] $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$ 2. [(ii)] $\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$ 3. [(iii)] $\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$

2. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου α, για τις οποίες το ακόλουθο σύστημα έχει λύση.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_3 - 10x_4 &= \alpha \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Για τις τιμές αυτές να βρεθούν τα σύνολα λύσεων.

3. Να δειχθεί ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= -6\alpha \\ 2x_1 + x_2 + (\beta + 1)x_3 &= 4 \\ \beta x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3\alpha \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση για κάθε $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$.

Τί συμβαίνει για $\beta = 0$ και $\beta = 6$;

4. Να βρεθεί ένα ομογενές σύστημα $AX = 0$, του οποίου ο χώρος λύσεων παράγεται από τα ακόλουθα στοιχεία του $\mathbb{R}^{3\times 1}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

5. Έστω $A \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$. Να δειχθεί ότι το σύστημα $AX = B$ έχει λύση για κάθε $B \in \mathbb{R}^{\mu\times 1}$ αν και μόνο αν $rkA = \mu$.

6. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ και W ένας υπόχωρος αυτού. Ένα υποσύνολο του V της μορφής $x + W, x \in V$, λέγεται **σύμπλοκο του** W **στον** V **με αντιπρόσωπο το** x.

Είδαμε στην πρόταση 7.2.5 ότι αν το σύστημα $AX = B$ με $A \in \mathbb{F}^{\mu\times\nu}$ έχει λύση, τότε το σύνολο των λύσεων του $AX = B$ είναι ένα σύμπλοκο του $\ker \gamma_A$ στο $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$. Να δειχθεί ότι:

(i) Αν $x, y \in V$, τότε $x + W = y + W$ αν και μόνο αν $x - y \in W$.

(ii) Αν $x_1 + W, x_2 + W$ είναι δύο σύμπλοκα του W στο V και $(x_1 + W) \cap (x_2 + W) \neq \emptyset$, τότε $x_1 + W = x_2 + W$.

(iii) Το σύνολο των συμπλόκων του W στο V είναι μια διαμέριση του V.

(iv) Έστω $f : V \longrightarrow U$ μία γραμμική απεικόνιση και $u_0 \in U$. Να δειχθεί ότι αν το σύνολο $f^{-1}(\{u_0\}) \neq \emptyset$, τότε το $f^{-1}(\{u_0\})$ είναι ένα σύμπλοκο του $\ker f$ στον V.