§3 Ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ακροτάτων

Ορ: Έστω A συμμετρικός πίνακας $m \times m$ και $Q(\underset{\mathbb{R}^m}{h}) = \underset{\mathbb{R}^m}{h} \cdot \underset{\mathbb{R}^m}{\underbrace{(Ah)}}$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή.

(i) Ο πίνακας A λέγεται θετικά ορισμένος όταν

$Q(h) > 0$, $\forall h \neq 0$ Συμβ: $A > 0$

(ii) ο πίνακας A λέγεται αρνητικά ορισμένος όταν

$Q(h) < 0$, $\forall h \neq 0$ Συμβ: $A < 0$

(iii) Ο πίνακας A (με $m \geq 2$) λέγεται αόριστος όταν

$\exists h_1, h_2 \in \mathbb{R}^m$ τ.ω $Q(h_1) > 0$, $Q(h_2) < 0$.

Υπενθύμιση (Άλγεβρα) Αν A είναι ένας συμμετρικός πίνακας $m \times m$ (με στοιχεία $\in \mathbb{R}$), τότε υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $(\underset{\mathbb{R}^m}{h_1}, \dots, \underset{\mathbb{R}^m}{h_m})$ ιδιοδιανυσμάτων:

$$A h_i = \lambda_i h_i, \quad \|h_i\|^2 = 1, \quad h_i \cdot h_j = 0 \text{ για } i \neq j.$$

Επιπλέον $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_m$.

$$\underbrace{\operatorname{tr} A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$$

το ίχνος του A = άθροισμα των στοιχείων που βρίσκονται στη διαγώνιο του A.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Λήμμα 1 Έστω A συμμετρικός πίνακας $m\times m$ και $Q(h)=h\cdot Ah$.

Τότε αν $A>0$, υπάρχει $\alpha>0$ τ.ω $Q(h)\geq \alpha\|h\|^2$, $\forall h\in\mathbb{R}^m$.

———— $A<0$ ———————— $Q(h)\leq -\alpha\|h\|^2$, ————

Απ: Θεωρούμε τον περιορισμό της Q στη μοναδιαία σφαίρα $\{h\in\mathbb{R}^m : \|h\|=1\}$ (κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$). Η Q είναι συνεχής, άρα σύμφωνα με το $\boxed{\Theta 1}$, όταν $A>0$ υπάρχει $h_0\in\mathbb{R}^m$, $\|h_0\|=1$ τ.ω. $\min\limits_{\|h\|=1} Q = Q(h_0)$, δηλαδή $\forall h$, $\|h\|=1$ ισχύει $Q(h)\geq Q(h_0)>0$. Θέτουμε $\alpha=Q(h_0)$.

Προφανώς $Q(0)=0\geq\alpha\|0\|^2$ και επειδή κάθε $h\neq 0$ γράφεται $h=\|h\|\frac{h}{\|h\|}$ έχουμε

$$Q(h)=Q\left(\|h\|\frac{h}{\|h\|}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{επειδή η } Q \text{ είναι τετρ. μορφή}}}{=}\|h\|^2 Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{επειδή } \left\|\frac{h}{\|h\|}\right\|=1}}{\geq}\alpha\|h\|^2.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει τη ζητούμενη ανισότητα όταν $A>0$. Η απόδειξη είναι ανάλογη όταν $A<0$. □

Λήμμα 2 Έστω $A=\begin{pmatrix} a & c\\ c & b\end{pmatrix}$ συμμετρικός πίνακας με $a,b,c\in\mathbb{R}$. Έστω λ_1 και λ_2 οι ιδιοτιμές του A και (h_1,h_2) τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που αποτελούν μια ορθοκανονική βάση. Τότε

(i) $\boxed{A>0} \Leftrightarrow \lambda_1,\lambda_2>0 \Leftrightarrow \boxed{\det A>0 \text{ και } a>0}$

(ii) $\boxed{A<0} \Leftrightarrow \lambda_1,\lambda_2<0 \Leftrightarrow \boxed{\det A>0 \text{ και } a<0}$

(iii) $\boxed{A \text{ αόριστος}} \Leftrightarrow \lambda_1>0 \text{ και } \lambda_2<0 \Leftrightarrow \boxed{\det A<0}$

Απ Έχουμε $Q(h_1) = h_1 \cdot (Ah_1) = h_1 \cdot (\lambda_1 h_1) = \lambda_1 \|h_1\|^2 = \lambda_1$

Ομοίως $Q(h_2) = \lambda_2$. Έτσι βλέπουμε ότι $A > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$

$A < 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0$

Κάθε $h \in \mathbb{R}^2$ γράφεται $h = \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2$ $(\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R})$, επομένως

$Q(h) = (\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) \cdot (A(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2)) = (\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) \cdot (\lambda_1 \mu_1 h_1 + \lambda_2 \mu_2 h_2)$

$= \lambda_1 \mu_1^2 + \lambda_2 \mu_2^2$ επειδή $\|h_1\| = \|h_2\| = 1$ και $h_1 \cdot h_2 = 0$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow Q(h) > 0$ για $h \neq 0$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow Q(h) < 0$ —"—

Προφανώς $\lambda_1 > 0$ και $\lambda_2 < 0 \Rightarrow A$ αόριστος. Αντίστροφα αν ο A είναι αόριστος και οι ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 έχουν το ίδιο πρόσημο προκύπτει από τον προηγούμενο υπολογισμό ότι το $Q(h)$ διατηρεί το ίδιο πρόσημο $\forall h \in \mathbb{R}^2$ που είναι άτοπο. Επομένως A αόριστος $\Rightarrow$ $\lambda_1 > 0$ και $\lambda_2 < 0$. Έχουμε λοιπόν αποδείξει την πρώτη ισοδυναμία στις περιπτώσεις (i), (ii), (iii). Για τη δεύτερη ισοδυναμία παρατηρούμε ότι $Q(\underset{(1,0)}{\underset{\parallel}{e_1}}) = a$ και $Q(\underset{(0,1)}{\underset{\parallel}{e_2}}) = b$. Άρα $A > 0 \Rightarrow a, b > 0$.

και $A > 0 \Rightarrow \det A > 0$ επειδή $\underset{0}{\underset{\vee}{\lambda_1}} \underset{0}{\underset{\vee}{\lambda_2}} = \det A$. Αντίστροφα, αν $\det A = ab - c^2 > 0$ και $a > 0$ έχουμε αναγκαστικά $b > 0$ και από τις σχέσεις $\lambda_1 \lambda_2 = \det A > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = a + b > 0$ συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Έτσι αποδείξαμε τη 2η ισοδυναμία στην περίπτωση (i). Η απόδειξη είναι ανάλογη στην περίπτωση (ii) και τετριμμένη στην περίπτωση (iii) αφού $\det A = \lambda_1 \lambda_2$. $\square$

Στις μεγαλύτερες διαστάσεις $(m \geq 3)$ έχουμε ένα ανάλογο αποτέλεσμα:

<u>Λήμμα 3</u> Έστω A συμμετρικός πίνακας $m \times m$ με στοιχεία στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ οι ιδιοτιμές του και $(h_1, \dots, h_m)$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που αποτελούν μια ορθοκανονική βάση. Τότε

(i) $A > 0 \iff \lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$

(ii) $A < 0 \iff \lambda_1, \dots, \lambda_m < 0$

(iii) A αόριστος $\iff$ ο πίνακας A έχει μια ιδιοτιμή > 0 και μια ιδιοτιμή < 0.

$\boxed{\Theta 4}$ Έστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $x_0 \in U$ και $H_f(x_0)$ ο Εσσιανός πίνακας της f στο x_0. Τότε

(i) αν $\nabla f(x_0) = 0$ και $H_f(x_0) > 0 \Rightarrow$ η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0

(ii) — " — και $H_f(x_0) < 0 \Rightarrow$ — " — — " — μέγιστο — " —

(iii) — " — και $H_f(x_0)$ αόριστος $\Rightarrow$ — " — σάγμα στο x_0.

Απ: Σύμφωνα με τον τύπο (8) του Κεφαλαίου με τα Θεωρήματα Taylor

έχουμε $$f(x) = f(x_0) + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\nabla f(x_0)}}(x-x_0) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0)(x-x_0) + R_2(x)$$

με $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_2(x)}{\|x-x_0\|^2} = 0$.

Στην περίπτωση (i) προκύπτει από το Λήμμα 1 ότι

$$D^2 f(x_0)(x-x_0) \geq \alpha \|x-x_0\|^2 \quad \text{για κάποιο } \alpha > 0.$$

Θα φράξουμε τώρα το υπόλοιπο $R_2(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x)}{\|x-x_0\|^2} = 0 \Rightarrow -\frac{\alpha}{4}\|x-x_0\|^2 \leq R_2(x) \leq \frac{\alpha}{4}\|x-x_0\|^2 \text{ για } \|x-x_0\| < \delta$$

(με δ αρκετά μικρό)

Έτσι συγκεντρώνοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}\|x-x_0\|^2 - \frac{\alpha}{4}\|x-x_0\|^2 \quad \text{για } \|x-x_0\| < \delta$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{4}\|x-x_0\|^2 \quad \text{για } \|x-x_0\| < \delta$$

$\Rightarrow$ η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

Η περίπτωση (ii) αποδεικνύεται ανάλογα.

<u>Στην περίπτωση (iii)</u> υπάρχουν $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^m$ τ.ω. $\|h_1\| = \|h_2\| = 1$

και $\begin{cases} D^2 f(x_0) h_1 > \alpha \\ D^2 f(x_0) h_2 < -\alpha \end{cases}$ για κάποιο $\alpha > 0$.

Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως, δείχνουμε ότι

$\begin{cases} f(x_0 + t h_1) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{4} t^2 \\ f(x_0 + t h_2) \leq f(x_0) - \frac{\alpha}{4} t^2 \end{cases}$ για $|t| < \delta$, άρα η f έχει σάγμα στο x_0 $\square$

<u>Ακρότατα υπό συνθήκη</u>

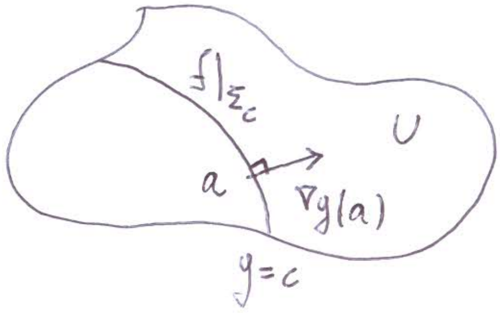
<u>Πρόβλημα</u> Έστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό χωρίο και $f, g \in C^1(U, \mathbb{R})$.

Θεωρούμε το σύνολο στάθμης της g με τιμή $c \in \mathbb{R}$:

$\Sigma_c = \{x \in U : g(x) = c\}$

και θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα του περιορισμού της f στο Σ_c

(Συμβ: $f|_{\Sigma_c}$).



Έχουμε το παρακάτω Θεώρημα

$\boxed{\Theta 5}$ Έστω $f, g \in C^1(U, \mathbb{R})$ και

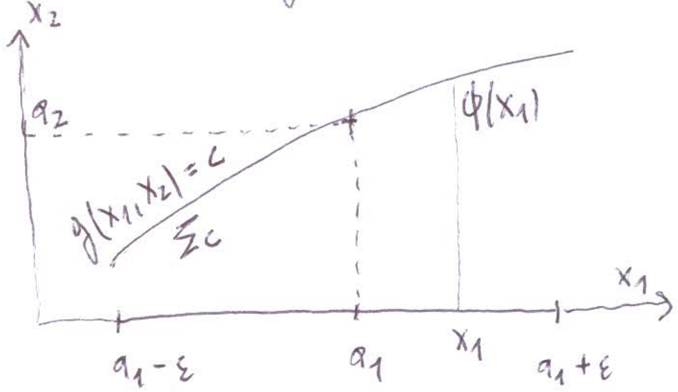
$a \in U$ τ.ω. $g(a) = c$ και $\nabla g(a) \neq 0$

Αν η $f|_{\Sigma_c}$ (ο περιορισμός της f στο Σ_c) έχει τοπικό

ακρότατο στο a, τότε ισχύει $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

(δηλαδή $\nabla f(a) \parallel \nabla g(a) \neq 0$)

Απ (όταν $m=2$) Χάρη στην υπόθεση $\nabla g(a)\neq 0$ η εξίσωση $g(a)=c$ ορίζει σε μια περιοχή του $a=(a_1,a_2)$ μια καμπύλη (όταν $m\geq 3$ ορίζει μια επιφάνεια). Χωρίς βλάβη της γενικότητος μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει π.χ $\frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1,a_2)\neq 0$. Από το Θεώρημα Πεπλεγμένης συνάρτησης προκύπτει ότι σε μια περιοχή του (a_1,a_2) έχουμε $g(x_1,x_2)=c \iff x_2=\phi(x_1)$ με $\phi:(a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon)\to\mathbb{R}$, $\phi(a_1)=a_2$.



Επομένως $g(x_1,\phi(x_1))=c$ για $x_1\in(a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon)$ και παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$g_{x_1}(x_1,\phi(x_1))+g_{x_2}(x_1,\phi(x_1))\phi'(x_1)=0$$

και ειδικότερα όταν $x_1=a_1$

$$g_{x_1}(a_1,a_2)+g_{x_2}(a_1,a_2)\phi'(a_1)=0$$
$$\iff \nabla g(a)\perp(1,\phi'(a_1))$$

Εξ' υποθέσεως η $f|_{\Sigma_c}$ έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $a=(a_1,a_2)$ άρα η συνάρτηση $x_1\mapsto f(x_1,\phi(x_1))$ έχει τοπικό ακρότατο για $x_1=a_1$.

Συνεπάγεται ότι $\left.\frac{d}{dx_1}f(x_1,\phi(x_1))\right|_{x_1=a_1}=0$

δηλαδή $f_{x_1}(a_1,a_2)+f_{x_2}(a_1,a_2)\phi'(a_1)=0 \iff \nabla f(a)\perp(1,\phi'(a_1))$

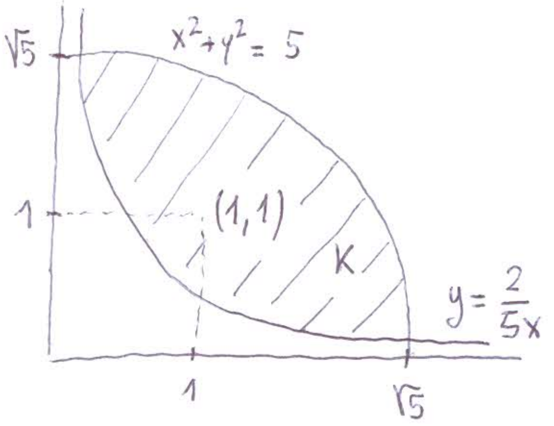
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\nabla f(a)\parallel\nabla g(a)\neq 0$ δηλαδή

$\nabla f(a)=\lambda\nabla g(a)$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$.

Ασκ 5 (Αναλυτικές λεπτομέρειες)

Είδαμε ότι η f έχει ένα μοναδικό κρίσιμο σημείο στο U το $(1,1)$ και ότι $f(1,1) = 4$.

Έστω $K = \{(x,y) \in U : x^2+y^2 \leq 5 \text{ και } \frac{2}{xy} \leq 5\}$ κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.



Στο $U \setminus K$ και στο ∂K ισχύει

$x^2+y^2 \geq 5$ ή $\frac{2}{xy} \geq 5$

άρα $f(x,y) \geq 5 > \underbrace{f(1,1)}_{\substack{\uparrow \\ K}}$ για $(x,y) \in U \setminus K$ και για $(x,y) \in \partial K$

Συνεπώς $\min\limits_K f \leq f(x,y)$ $\forall (x,y) \in U$,

και το $\min\limits_K f$ λαμβάνεται σ' ένα εσωτερικό σημείο του K.

Επειδή η f έχει ένα μοναδικό κρίσιμο σημείο, $\overbrace{}^{\text{το } (1,1) \in K}$ συμπεραίνουμε

ότι $\min\limits_U f = f(1,1) = 4$

και ότι $\min\limits_\Gamma d = \|(1,1,g(1,1))\| = 2$

Ασκ 6 Λύση της Ασκ 1 με τη βοήθεια του $\boxed{Θ4}$ και του Λήμματος 2.

Είδαμε ότι η $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + 1 - y^2$ έχει τα εξής κρίσιμα σημεία: $(0,0)$, $(1,0)$ και $(-1,0)$. Υπολογίζουμε

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{array}{l} \det H_f(0,0) = 8 > 0 \\ \text{και } -4 < 0 \end{array}\right] \xRightarrow{\text{Λήμμα 2 (ii)}} H_f(0,0) < 0$

  $\xRightarrow{\boxed{Θ4}\ (ii)} (0,0)$ τοπικό μέγιστο

- $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\det H_f(1,0) = -16 < 0 \xRightarrow{\text{Λήμμα 2 (iii)}} H_f(1,0)$ αόριστος

  $\xRightarrow{\boxed{Θ.4}\ (iii)} (1,0)$ σαγματικό σημείο

Ομοίως

- $H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1,0)$ σαγματικό σημείο

<u>Ασκ 7</u> Λύση της Ασκ 4 με τη βοήθεια του $\boxed{\Theta 4}$ και του Λήμματος 2.

<u>Απ</u> $f(x,y) = (x-5)\log(xy)\ ,\ x>0\ ,\ y>0$

Είδαμε ότι $\nabla f(x,y) = \left(\log(xy) + \frac{x-5}{x}\ ,\ \frac{x-5}{y}\right)$ και ότι

η f έχει ένα μοναδικό κρίσιμο σημείο με συντεταγμένες $\left(5, \frac{1}{5}\right)$

Υπολογίζουμε τώρα

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x-5}{y^2} \end{pmatrix}$$

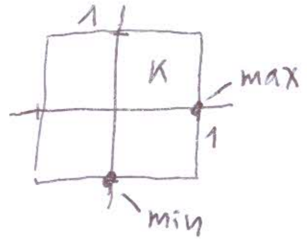
και $H_f\left(5, \frac{1}{5}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

$\det H_f\left(5, \frac{1}{5}\right) = -25 \overset{\text{Λήμμα 2 (iii)}}{\Longrightarrow} H_f\left(5, \frac{1}{5}\right)$ αόριστος $\overset{\boxed{\Theta 4}}{\Longrightarrow} \left(5, \frac{1}{5}\right)$ σαγματικό σημείο

Ασκ 8 Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-3y^2$ στο τετράγωνο $K=\{(x,y) : |x|\le 1 , |y|\le 1\}$

Απ: K κλειστό φραγμένο και f συνεχής $\overset{\boxed{Θ1}}{\Longrightarrow}$ Τα ολικά ακρότατα υπάρχουν.

• Αναζητάμε τα κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό του K:



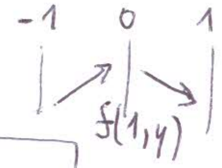
$\nabla f(x,y) = \big(3x(x+2) , 3y(y-2)\big)$

$\nabla f(x,y)=0 \iff x=0$ ή $x=-2$ και $y=0$ ή $y=+2$

Άρα το $(0,0)$ είναι το μοναδικό εσωτερικό κρίσιμο σημείο $\big(f(0,0)=0\big)$

• Μελετάμε τώρα την f στο ∂K

• $\underset{[-1,1]}{f(1,y)} = y^3-3y^2+4$ $\quad f_y(1,y)=3y^2-6y=3y(y-2)$



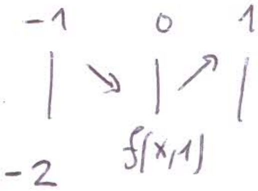
... και συμπεραίνουμε ότι $\boxed{\max_{|y|\le 1} f(1,y) = f(1,0)=4}$

$\min_{|y|\le 1} f(1,y) = f(1,-1) = 0$

• $f(-1,y)=y^3-3y^2+2$ όπως προηγουμένως έχουμε $\max_{|y|\le 1} f(-1,y)=f(-1,0)=2$

και $\min_{|y|\le 1} f(-1,y) = f(-1,-1) = -2$

• $f(x,1) = x^3+3x^2-2$ $\quad f_x(x,1) = 3x^2+6x = 3x(x+2)$



άρα $\max_{|x|\le 1} f(x,1) = f(1,1) = 2$ και $\min_{|x|\le 1} f(x,1) = f(0,1) = -2$

• $f(x,-1) = x^3+3x^2-4$ και όπως προηγουμένως έχουμε

$\max_{|x|\le 1} f(x,-1) = f(1,-1) = 0$ και $\boxed{\min_{|x|\le 1} f(x,-1) = f(0,-1) = -4}$

Συνοψίζοντας το ολικό μέγιστο (ελάχιστο) δεν λαμβάνεται στο εσωτερικό του K επειδή το μοναδικό εσωτερικό κρίσιμο σημείο δεν είναι ολικό ακρότατο. Άρα το ολικό μέγιστο και ελάχιστο λαμβάνονται στο σύνορο του K. Συγκεντρώνοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα βλέπουμε ότι

$$\max_K f = f(1,0) = 4$$

$$\min_K f = f(0,-1) = -4$$

<u>Παρατήρηση</u>

Το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο. Πράγματι

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+6 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}, \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

άρα $\det H_f(0,0) < 0$.

Ασκ 9 (i) Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της $f(x,y) = e^x \sin y$ περιορισμένης στον μοναδιαίο κύκλο Γ $(g(x,y) = x^2+y^2 = 1)$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι το μέγιστο και το ελάχιστο της f στον κλειστό δίσκο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ λαμβάνονται στο $\Gamma = \partial D$.

Απ (i) Γ = κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, άρα σύμφωνα με το $\boxed{\Theta 1}$ η f περιορισμένη στο Γ λαμβάνει το ολικό μέγιστο / ελάχιστό της σε κάποια σημεία του Γ. Γνωρίζουμε χάρη στο $\boxed{\Theta 5}$ ότι οι πιθανές θέσεις των ολικών ακροτάτων επιλύουν το σύστημα:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \quad \underset{0}{\#} \text{ για } (x,y) \in \Gamma$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x \sin y = 2\lambda x \\ e^x \cos y = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τις 2 πρώτες εξισώσεις έχουμε

$$\begin{aligned} & e^{2x} \sin^2 y = 4\lambda^2 x^2 \\ + \ & e^{2x} \cos^2 y = 4\lambda^2 y^2 \\ \hline = \ & e^{2x} = 4\lambda^2 \end{aligned}$$

Άρα $e^x = 2|\lambda|$

Στην περίπτωση που $\lambda > 0$ το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} \sin y = x \\ \cos y = y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin\theta \\ y = \theta \\ (\cos\theta = \theta) \end{cases}$$

όπου $\theta \in (0,1)$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\cos\alpha = \alpha$, $\alpha \in [-1,1]$

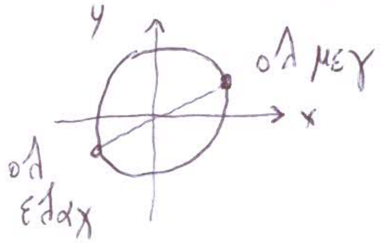
[Η εξίσωση $\cos\alpha = \alpha$ έχει μία μοναδική λύση θ στο διάστημα $(0,1)$ επειδή η συνάρτηση $\underset{[-1,1]}{\varphi(\alpha)} = \cos\alpha - \alpha$ είναι θετική στο διάστημα $[-1,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$ με $\varphi(0) > 0$ και $\varphi(1) < 0$].

Ομοίως στην περίπτωση που $\lambda < 0$ λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} \sin y = -x \\ \cos y = -y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

και βρίσκουμε $\begin{cases} x = -\sin\theta \\ y = -\theta \end{cases}$ $(\cos\theta = \theta)$

<u>Συμπέρασμα</u> οι πιθανές θέσεις των ολικών ακροτάτων της $f|_\Gamma$ είναι τα σημεία $(\sin\theta, \theta)$ και $(-\sin\theta, -\theta)$

Επειδή $f(\sin\theta,\theta) > 0 > f(-\sin\theta,-\theta)$ βλέπουμε ότι η $f|_\Gamma$ έχει στο $(\sin\theta,\theta)$ ολ μέγιστο και στο $(-\sin\theta,-\theta)$ ολ ελάχιστο



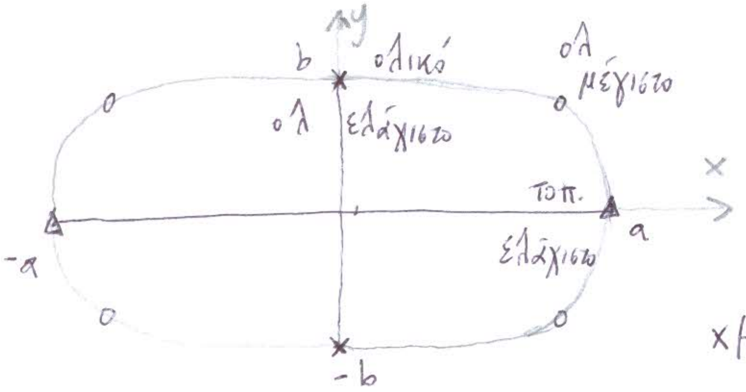
(ii) $\nabla f(x,y) = (e^x \sin y, e^x \cos y) \neq (0,0)$ άρα η f δεν έχει κρίσιμα σημεία και τοπικά ακρότατα στον ανοιχτό δίσκο $\{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$

Συνεπάγεται ότι το μέγιστο (αντίστοιχα ελάχιστο) της f στον κλειστό δίσκο D λαμβάνεται στο σύνορο του D δηλαδή στο Γ:

$$\max_D f = f(\sin\theta,\theta) = e^{\sin\theta}\sin\theta \qquad \min_D f = f(-\sin\theta,-\theta) = -e^{\sin\theta}\sin\theta$$

Ασκ 10 Θεωρείστε την καμπύλη Γ της $g(x,y) = \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$ $(a > b > 0)$ και βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Απ Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + y^2$ (το τετράγωνο της απόστασης από την αρχή των αξόνων). Θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα της f περιορισμένης στην καμπύλη $g(x,y) = 1$ (κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$). Γνωρίζουμε χάρη στο $\boxed{\Theta 1}$ ότι τα ολικά ακρότατα υπάρχουν. Παρατηρούμε επίσης ότι η καμπύλη Γ είναι συμμετρική ως προς τους άξονες των x και y.



1ο Βήμα: Θεωρούμε μια παραμέτρηση του τμήματος της καμπύλης που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο:

$$x(t) = a(\cos t)^{1/2}, \quad y(t) = b(\sin t)^{1/2}, \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

2ο Βήμα Υπολογίζουμε τον περιορισμό της f στην καμπύλη Γ συναρτήσει της παραμέτρου $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$f(x(t), y(t)) = a^2 \cos t + b^2 \sin t = \sqrt{a^4+b^4}\left[\cos t \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}}\right) + \sin t \left(\frac{b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}\right)\right]$$

Επειδή $\left\|\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}\right)\right\| = 1$ υπάρχει $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τ.ω $\cos\theta = \frac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$, $\sin\theta = \frac{b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$

Επιπλέον $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ επειδή $a > b$. Έχουμε λοιπόν

$$f(x(t), y(t)) = \sqrt{a^4+b^4}\cos(t - \theta)$$

Συνοψίζοντας, η μέγιστη τιμή της f πάνω στην καμπύλη Γ λαμβάνεται για $t = \theta$, δηλαδή στα 4 σημεία

$$\left(\pm \frac{a^2}{(a^4+b^4)^{1/4}}, \pm \frac{b^2}{(a^4+b^4)^{1/4}} \right) \quad \text{και}$$

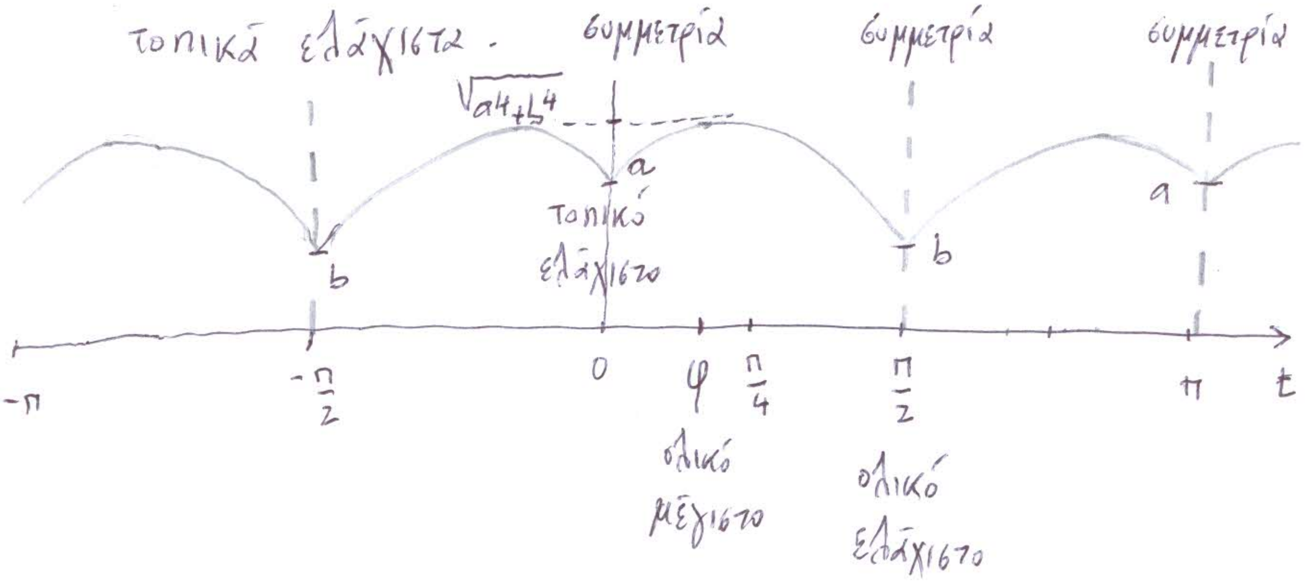
$$\max_{\Gamma} f = \sqrt{a^4+b^4} \Rightarrow \max_{\Gamma} d = (a^4+b^4)^{1/4}$$

$d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ απόσταση από την αρχή των αξόνων

Η ελάχιστη τιμή της f πάνω στην Γ λαμβάνεται για $t = \frac{\pi}{2}$ δηλαδή στα σημεία $(0, \pm b)$: $\min_{\Gamma} f = b^2$, $\min_{\Gamma} d = b$

Πράγματι για $t = \frac{\pi}{2}$ ελαχιστοποιείται το $\cos(t-\theta)$ στο διάστημα $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ επειδή $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$.

Τέλος στα σημεία $(\pm a, 0)$ η f περιορισμένη στη Γ έχει τοπικά ελάχιστα.



<u>Παρατήρηση</u>: Εφαρμόζοντας το $\boxed{\Theta 5}$ θα έπρεπε να λύσουμε

το σύστημα

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) & \text{για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R} \\ g(x,y) = 1 & \overset{\#}{0} \text{ όταν } g(x,y) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \dfrac{4x^3}{a^4} \\ 2y = \lambda \dfrac{4y^3}{b^4} \\ \dfrac{x^4}{a^4} + \dfrac{y^4}{b^4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = \left(\pm \dfrac{a^2}{(a^4+b^4)^{1/4}}, \pm \dfrac{b^2}{(a^4+b^4)^{1/4}} \right) \\ \text{ή} \\ (x,y) = (0, \pm b) \\ \text{ή} \\ (x,y) = (\pm a, 0) \end{cases}$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$

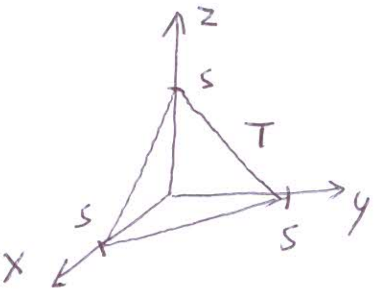
που δίνει τις 8 πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων.

Θα χρειαζόταν όμως περαιτέρω ανάλυση για να προσδιορίσουμε αν τα σημεία αυτά είναι τοπικά / ολικά ακρότατα ή σάγματα.

Ασκ 11 Λύση της Ασκ 3 με τη βοήθεια του $\boxed{\Theta 5}$

Απ: Έστω $U = \{x>0, y>0, z>0\} \subset \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = xyz$ και $g(x,y,z) = x+y+z = s > 0$. Θέλουμε να βρούμε το ολικό μέγιστο της f περιορισμένης στο ανοιχτό τρίγωνο

$$T = \{(x,y,z) \in U : g(x,y,z) = s\}$$



Πάνω στις πλευρές του T η f μηδενίζεται (επειδή $x=0$ ή $y=0$ ή $z=0$) ενώ $f>0$ στο T.

Άρα το $\max\limits_{\bar{T}} f$ (βλέπε $\boxed{\Theta 1}$) λαμβάνεται σ' ένα εσωτερικό σημείο του τριγώνου $(x_0, y_0, z_0) \in T$.

[Θήκη του T: $\bar{T} = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 : g(x,y,z) = s\}$ κλειστό τρίγωνο
(κλειστό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$)]

Σύμφωνα με το $\boxed{\Theta 5}$ ισχύει $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλαδή

$$\begin{cases} y_0 z_0 = \lambda \\ x_0 z_0 = \lambda \\ x_0 y_0 = \lambda \\ x_0 + y_0 + z_0 = s \end{cases} \iff x_0 = y_0 = z_0 = \frac{s}{3}$$

Συμπέρασμα: $\max\limits_{T} f = \left(\frac{s}{3}\right)^3$