§3 Ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ακροτάτων

Ορ: Έστω A συμμετρικός πίνακας $m \times m$ και $Q(h) = \underset{\mathbb{R}^m}{h} \cdot \underbrace{(Ah)}_{\mathbb{R}^m}$, $h \in \mathbb{R}^m$

η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή.

(i) Ο πίνακας A λέγεται θετικά ορισμένος όταν

$$Q(h) > 0, \quad \forall h \neq 0 \qquad \text{Συμβ}: \ A > 0$$

(ii) Ο πίνακας A λέγεται αρνητικά ορισμένος όταν

$$Q(h) < 0, \quad \forall h \neq 0 \qquad \text{Συμβ}: \ A < 0$$

(iii) Ο πίνακας A (με $m \geq 2$) λέγεται αόριστος όταν

$$\exists \, h_1, h_2 \in \mathbb{R}^m \ \text{ τ.ω } \ Q(h_1) > 0, \ Q(h_2) < 0.$$

Υπενθύμιση (Άλγεβρα) Αν A είναι ένας συμμετρικός πίνακας $m \times m$ (με στοιχεία $\in \mathbb{R}$), τότε υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $(\underset{\mathbb{R}^m}{h_1}, \ldots, \underset{\mathbb{R}^m}{h_m})$ ιδιοδιανυσμάτων:

$$A h_i = \lambda_i h_i, \quad \|h_i\|^2 = 1, \quad h_i \cdot h_j = 0 \ \text{ για } i \neq j.$$

Επιπλέον $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_m$.

$$\underbrace{\operatorname{tr} A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$$

το ίχνος του A = άθροισμα των στοιχείων που βρίσκονται στη διαγώνιο του A.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Λήμμα 1 Έστω A συμμετρικός πίνακας $m \times m$ και $Q(h) = h \cdot Ah$.

Τότε αν $A > 0$, υπάρχει $\alpha > 0$ τ.ω $Q(h) \geq \alpha \|h\|^2$, $\forall h \in \mathbb{R}^m$.

———— $A < 0$ ———————— $Q(h) \leq -\alpha \|h\|^2$, ————

Απ: Θεωρούμε τον περιορισμό της Q στη μοναδιαία σφαίρα $\{h \in \mathbb{R}^m : \|h\| = 1\}$ (κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$). Η Q είναι συνεχής, άρα σύμφωνα με το $\boxed{\Theta 1}$, όταν $A > 0$ υπάρχει $h_0 \in \mathbb{R}^m$, $\|h_0\| = 1$ τ.ω. $\min\limits_{\|h\|=1} Q = Q(h_0)$, δηλαδή $\forall h$, $\|h\| = 1$ ισχύει $Q(h) \geq Q(h_0) > 0$. Θέτουμε $\alpha = Q(h_0)$.

Προφανώς $Q(0) = 0 \geq \alpha \|0\|^2$ και επειδή κάθε $h \neq 0$ γράφεται

$h = \|h\| \dfrac{h}{\|h\|}$ έχουμε $Q(h) = Q\left(\|h\| \dfrac{h}{\|h\|}\right) = \|h\|^2 Q\left(\dfrac{h}{\|h\|}\right) \geq \alpha \|h\|^2$.

επειδή η Q είναι τετρ. μορφή   επειδή $\left\|\dfrac{h}{\|h\|}\right\| = 1$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει τη ζητούμενη ανισότητα όταν $A > 0$. Η απόδειξη είναι ανάλογη όταν $A < 0$. □

Λήμμα 2 Έστω $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ συμμετρικός πίνακας με $a, b, c \in \mathbb{R}$. Έστω λ_1 και λ_2 οι ιδιοτιμές του A και (h_1, h_2) τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που αποτελούν μια ορθοκανονική βάση. Τότε

(i) $\boxed{A > 0} \iff \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \iff \boxed{\det A > 0 \text{ και } a > 0}$

(ii) $\boxed{A < 0} \iff \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \iff \boxed{\det A > 0 \text{ και } a < 0}$

(iii) $\boxed{A \text{ αόριστος}} \iff \lambda_1 > 0 \text{ και } \lambda_2 < 0 \iff \boxed{\det A < 0}$

Απ Έχουμε $Q(h_1) = h_1 \cdot (Ah_1) = h_1 \cdot (\lambda_1 h_1) = \lambda_1 \|h_1\|^2 = \lambda_1$

Ομοίως $Q(h_2) = \lambda_2$. Έτσι βλέπουμε ότι $A > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$
$A < 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0$

Κάθε $h \in \mathbb{R}^2$ γράφεται $h = \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2$ $(\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R})$, επομένως

$$Q(h) = (\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) \cdot (A(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2)) = (\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) \cdot (\lambda_1 \mu_1 h_1 + \lambda_2 \mu_2 h_2)$$
$$= \lambda_1 \mu_1^2 + \lambda_2 \mu_2^2$$ επειδή $\|h_1\| = \|h_2\| = 1$ και $h_1 \cdot h_2 = 0$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow Q(h) > 0$ για $h \neq 0$
$\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow Q(h) < 0$ — " —

Προφανώς $\lambda_1 > 0$ και $\lambda_2 < 0 \Rightarrow A$ αόριστος. Αντίστροφα αν ο A είναι αόριστος και οι ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 έχουν το ίδιο πρόσημο προκύπτει από τον προηγούμενο υπολογισμό ότι το $Q(h)$ διατηρεί το ίδιο πρόσημο $\forall h \in \mathbb{R}^2$ που είναι άτοπο. Επομένως A αόριστος $\Rightarrow$ $\lambda_1 > 0$ και $\lambda_2 < 0$. Έχουμε λοιπόν αποδείξει την πρώτη ισοδυναμία στις περιπτώσεις (i), (ii), (iii). Για τη δεύτερη ισοδυναμία παρατηρούμε ότι $Q(\underset{(1,0)}{\underset{\shortparallel}{e_1}}) = a$ και $Q(\underset{(0,1)}{\underset{\shortparallel}{e_2}}) = b$. Άρα $A > 0 \Rightarrow a, b > 0$.

και $A > 0 \Rightarrow \det A > 0$ επειδή $\underset{0}{\underset{\vee}{\lambda_1}} \underset{0}{\underset{\vee}{\lambda_2}} = \det A$. Αντίστροφα, αν $\det A = ab - c^2 > 0$ και $a > 0$ έχουμε αναγκαστικά $b > 0$ και από τις σχέσεις $\lambda_1 \lambda_2 = \det A > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = a + b > 0$ συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Έτσι αποδείξαμε τη 2η ισοδυναμία στην περίπτωση (i). Η απόδειξη είναι ανάλογη στην περίπτωση (ii) και τετριμμένη στην περίπτωση (iii) αφού $\det A = \lambda_1 \lambda_2$. $\square$

Στις μεγαλύτερες διαστάσεις ($m \geq 3$) έχουμε ένα ανάλογο αποτέλεσμα:

<u>Λήμμα 3</u> Έστω A συμμετρικός πίνακας $m \times m$ με στοιχεία στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\lambda_1, \lambda_2 .. \lambda_m$ οι ιδιοτιμές του και $(h_1, ..., h_m)$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που αποτελούν μια ορθοκανονική βάση. Τότε

(i) $A > 0 \iff \lambda_1, ..., \lambda_m > 0$

(ii) $A < 0 \iff \lambda_1, ..., \lambda_m < 0$

(iii) A αόριστος $\iff$ ο πίνακας A έχει μια ιδιοτιμή > 0 και μια ιδιοτιμή < 0.

$\boxed{\Theta 4}$ Έστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $x_0 \in U$ και $H_f(x_0)$ ο Εσσιανός πίνακας της f στο x_0. Τότε

(i) αν $\nabla f(x_0) = 0$ και $H_f(x_0) > 0 \Rightarrow$ η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0

(ii) —"— και $H_f(x_0) < 0 \Rightarrow$ —"— —"— μέγιστο —"—

(iii) —"— και $H_f(x_0)$ αόριστος $\Rightarrow$ —"— σάγμα στο x_0.

<u>Απ</u>: Σύμφωνα με τον τύπο (8) του Κεφαλαίου με τα Θεωρήματα Taylor

έχουμε $$f(x) = f(x_0) + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\nabla f(x_0)}(x-x_0) + \frac{1}{2}D^2 f(x_0)(x-x_0) + R_2(x)$$

με $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_2(x)}{\|x-x_0\|^2} = 0$.

<u>Στην περίπτωση (i)</u> προκύπτει από το Λήμμα 1 ότι

$$D^2 f(x_0)(x-x_0) \geq \alpha \|x-x_0\|^2 \quad \text{για κάποιο } \alpha > 0.$$

Θα φράξουμε τώρα το υπόλοιπο $R_2(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x)}{\|x-x_0\|^2} = 0 \Rightarrow -\frac{\alpha}{4}\|x-x_0\|^2 \leq R_2(x) \leq \frac{\alpha}{4}\|x-x_0\|^2 \text{ για } \|x-x_0\| < \delta$$

(με δ αρκετά μικρό)

Έτσι συγκεντρώνοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}\|x-x_0\|^2 - \frac{\alpha}{4}\|x-x_0\|^2 \quad \text{για } \|x-x_0\| < \delta$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{4}\|x-x_0\|^2 \quad \text{για } \|x-x_0\| < \delta$$

$\Rightarrow$ η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

Η περίπτωση (ii) αποδεικνύεται ανάλογα.