§ 3 Για συναρτήσεις m μεταβλητών $(x_1, \dots, x_m)$

Έστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ένα ανοιχτό χωρίο και $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ κλάσεως C^2.

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \longmapsto f(x_1, \dots, x_m)$$

- Το πρώτο διαφορικό της f στο $\vec{x}_0 \in U$ είναι η γραμμική μορφή

$$Df(\vec{x}_0) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{h} \longmapsto \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}$$

όπου $\nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\vec{x}_0) \\ \dots \\ f_{x_m}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$

- Παραγωγίζοντας ως προς $x_1, \dots, x_m$ τις συνιστώσες του $\nabla f(\vec{x}_0)$ σχηματίζουμε τον $m \times m$ συμμετρικό πίνακα:

$$H_f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\vec{x}_0) & f_{x_1x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_1x_m}(\vec{x}_0) \\ f_{x_1x_2}(\vec{x}_0) & f_{x_2x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_2x_m}(\vec{x}_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_1x_m}(\vec{x}_0) & f_{x_2x_m}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_mx_m}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

$= f_{x_2x_1}(\vec{x}_0)$

επειδή η f είναι C^2

που λέγεται Hessian (Εσσιανός) πίνακας της f στο $\vec{x}_0$.

- Ορ: Το 2ο διαφορικό της f στο $\vec{x}_0 \in U$ είναι η τετραγωνική μορφή:

$$D^2 f(\vec{x}_0) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{h} \longmapsto D^2 f(\vec{x}_0)\vec{h} = \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\uparrow}{\vec{h}}} \cdot \Big(\underbrace{H_f(\vec{x}_0)\vec{h}}_{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^m}} \Big)$$

[$Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ τετρ. μορφή σημαίνει ότι $Q(\lambda \vec{h}) = \lambda^2 Q(\vec{h})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^m$]

• Αναλυτικά έχουμε

$$\boxed{D^2 f(\vec{x}_0)\underbrace{\vec{h}}_{\substack{\parallel \\ (h_1,\dots,h_m)}} = \sum_{i,j=1}^{m} f_{x_i x_j}(\vec{x}_0)\, h_i h_j}$$

και ειδικότερα όταν

• $m=1$, $\underset{\substack{\cap\\ \mathbb{R}}}{D^2 f(x_0)}\ \underset{\substack{\cap\\ \mathbb{R}}}{h} = f''(x_0)\, h^2$

• $m=2$ $\quad \underset{\substack{\cap\\ \mathbb{R}^2}}{D^2 f(\vec{x}_0)}\ \underset{\substack{\cap\\ \mathbb{R}^2}}{\vec{h}} = f_{x_1x_1}(\vec{x}_0)\, h_1^2 + 2 f_{x_1x_2}(\vec{x}_0)\, h_1 h_2 + f_{x_2x_2}(\vec{x}_0)\, h_2^2$.

• $m=3$ $\quad \underset{\substack{\cap\\ \mathbb{R}^3}}{D^2 f(\vec{x}_0)}\ \underset{\substack{\cap\\ \mathbb{R}^3}}{\vec{h}} = f_{x_1x_1}(\vec{x}_0)\, h_1^2 + f_{x_2x_2}(\vec{x}_0)\, h_2^2 + f_{x_3x_3}(\vec{x}_0)\, h_3^2$

$$+ 2 f_{x_1x_2}(\vec{x}_0)\, h_1 h_2 + 2 f_{x_1x_3}(\vec{x}_0)\, h_1 h_3 + 2 f_{x_2x_3}(\vec{x}_0)\, h_2 h_3$$

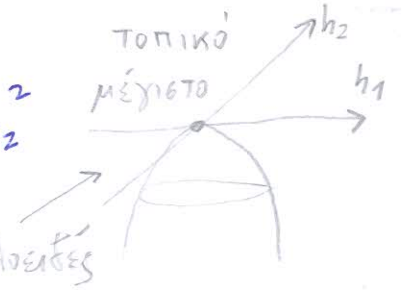
<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $f(x_1,x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2$. Να υπολογιστεί το δεύτερο διαφορικό της f στα σημεία $\vec{x}_1 = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\vec{x}_2 = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και $\vec{x}_3 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

<u>Απ</u>: Υπολογίζουμε $\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \cos x_2 \\ -\sin x_1 \sin x_2 \end{pmatrix}$ και

$$H_f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 \cos x_2 & -\cos x_1 \sin x_2 \\ -\cos x_1 \sin x_2 & -\sin x_1 \cos x_2 \end{pmatrix}$$

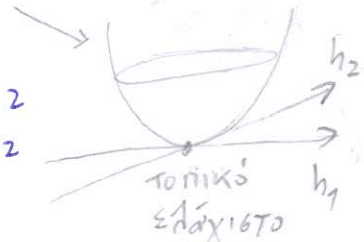
Στο σημείο $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$:

$$H_f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{άρα} \quad D^2 f\left(\frac{\pi}{2},0\right)\underset{\underset{(h_1,h_2)}{\parallel}}{\vec{h}} = -h_1^2 - h_2^2$$



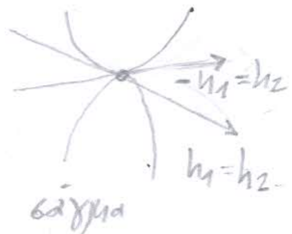
Στο σημείο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$:

$$H_f\left(-\frac{\pi}{2},0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{άρα} \quad D^2 f\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\vec{h} = h_1^2 + h_2^2$$



Στο σημείο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$H_f\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{άρα} \quad D^2 f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\vec{h} = -2h_1h_2$$

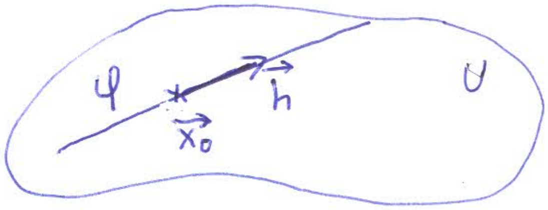


<u>Γεωμετρική Ερμηνεία</u>: Αν $\|\vec{h}\| = 1$ τότε η συνάρτηση

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f(\vec{x}_0 + t\vec{h}) = f(\vec{r}(t)) \quad \text{με} \quad \vec{r}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{h}$$

είναι ο περιορισμός της f στην προσανατολισμένη ευθεία που διέρχεται από το σημείο $\vec{x}_0$ και έχει κατεύθυνση $\vec{h}$, και έχουμε

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi'(0) &= Df(\vec{x}_0)\vec{h} \\ \varphi''(0) &= D^2 f(\vec{x}_0)\vec{h} \end{aligned}}$$



Με τη βοήθεια του δευτέρου διαφορικού το $\boxed{\Theta 4}$ διατυπώνεται για συναρτήσεις m μεταβλητών ως εξής:

$\boxed{\Theta 5}$ Έστω $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό χωρίο και $\vec{x}_0 \in U$.

Τότε

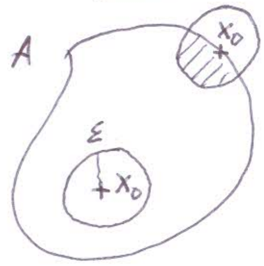
$$(8) \quad \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - Df(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) - \frac{1}{2}D^2 f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2} = 0$$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

§1 Προκαταρκτικά

Ορ: Έστω $A \subset \mathbb{R}^m$ και $f: A \to \mathbb{R}$. Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω

$$x \in A \text{ και } \|x - x_0\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$



Η f έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ αν

$$x \in A \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

- Ανάλογα ορίζεται το τοπικό (ολικό) ελάχιστο.
- Ακρότατο σημαίνει μέγιστο ή ελάχιστο

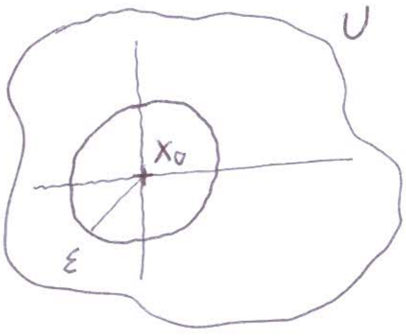
Θ1 Έστω $K \subset \mathbb{R}^m$ κλειστό και φραγμένο και έστω $f: K \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f έχει ολικό μέγιστο και ελάχιστο σε κάποια σημεία του K.

§2 Αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ακροτάτων

$\boxed{\Theta 2}$ Έστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Τότε αν το $x_0 \in U$ είναι τοπικό ακρότατο της f, ισχύει $\nabla f(x_0) = 0$.

<u>Απ</u> Έστω $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^m$ και έστω $\varepsilon > 0$ τ.ω. $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| < \varepsilon\} \subset U$.
Θεωρούμε τον περιορισμό της f στις ευθείες που διέρχονται από το x_0 και έχουν κατεύθυνση $\vec{e}_i$:

$$\varphi_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(x_0 + te_i)$$



Αφού η f έχει μέγιστο ($\overset{\text{αντίστοιχα}}{\text{ελάχιστο}}$) στο x_0, οι συναρτήσεις φ_i έχουν επίσης " (" ") για $t = 0$. Άρα $\varphi_i'(0) = 0$ και επειδή $\varphi_i'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ συμπεραίνουμε ότι $\nabla f(x_0) = 0$.

<u>Ορ</u>: Έστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Τα <u>κρίσιμα σημεία</u> της f είναι τα σημεία $x \in U$ όπου $\nabla f(x) = 0$

Σύμφωνα με το $\boxed{\Theta 2}$, τα κρίσιμα σημεία είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων.