§2 Για συναρτήσεις 2 μεταβλητών

$\boxed{\Theta 3}$ Έστω $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R})$ (δηλ. έχει παραγώγους έως τάξης $n+1$ συνεχείς στο U), $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό χωρίο και $(x_0, y_0) \in U$ φιξαρισμένο. Τότε για κάθε $(x,y) \in U$ τ.ω το ευθύγραμμο τμήμα $[(x_0,y_0),(x,y)] \subset U$, ισχύει θέτοντας $(h,k) = (x-x_0, y-y_0)$:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_0+h, y_0+k) \qquad (5)\\
&= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\,h + f_y(x_0,y_0)\,k\\
&\quad + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)\,h^2 + 2 f_{xy}(x_0,y_0)\,hk + f_{yy}(x_0,y_0)\,k^2\right] + \dots\\
&\quad + \frac{1}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(x_0,y_0)\, h^i k^{n-i}\right] + R_n(x,y)
\end{aligned}
$$

$P_n(x,y)$

πολυώνυμο Taylor n-βαθμού

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

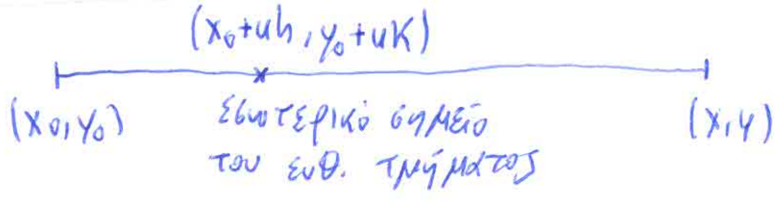
υπόλοιπο Taylor

όπου
$$R_n(x,y) = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^i \partial y^{n+1-i}}(x_0+uh, y_0+uk)\,h^i k^{n+1-i}\right] du \qquad (5)$$

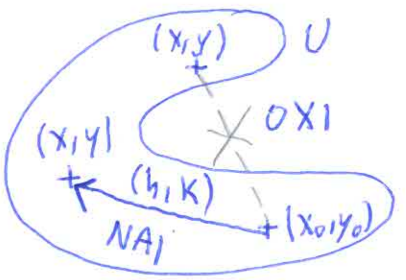
ή εναλλακτικά

$$(6)\quad R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^i \partial y^{n+1-i}}(x_0+uh, y_0+uk)\,h^i k^{n+1-i}$$

για κάποιο $0<u<1$ που εξαρτάται από τα σημεία (x_0,y_0) και (x,y)



Παρατήρηση



Απ Θ3 : Ανάγόμαστε στο $\boxed{Θ1}$ του Taylor για συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Εφαρμόζουμε τον τύπο (1) στη συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{στο σημείο } 0.$$

$$t \longmapsto f(x_0+th, y_0+tk)$$

Αναλυτικά : $\varphi(t) = f(r(t))$ όπου $r(t) = (x_0,y_0) + \underset{\substack{\uparrow \\ [0,1]}}{t}(h,k)$

Έχουμε $\varphi(0) = f(x_0,y_0)$, $\varphi(1) = f(x_0+h, y_0+k) = f(x,y)$

και $\varphi'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)$

$$= f_x(\underbrace{x_0+th, y_0+tk}_{r(t)})\,h + f_y(\underbrace{x_0+th, y_0+tk}_{r(t)})\,k$$

άρα $\varphi'(0) = f_x(x_0,y_0)\,h + f_y(x_0,y_0)\,k$.

Ομοίως :

$$\varphi''(t) = f_{xx}(\overbrace{x_0+th, y_0+tk}^{r(t)})h^2 + f_{xy}(-\text{"}-)hk + f_{xy}(-\text{"}-)hk + f_{yy}(-\text{"}-)k^2$$

άρα $\varphi''(0) = f_{xx}(x_0,y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)hk + f_{yy}(x_0,y_0)k^2$

Επαγωγικά βρίσκουμε

$$\varphi^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(x_0+th, y_0+tk)\, h^i k^{n-i}$$

$$\varphi^{(n)}(0) = \sum_{i=0}^{n} \text{———} \text{"} \text{———} (x_0, y_0)\, h^i k^{n-i}$$

Σύμφωνα με τον τύπο (1) ισχύει

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0)\,1 + \frac{\varphi''(0)}{2!}\,1^2 + \dots + \frac{1}{n!}\,\varphi^{(n)}(0)\,1^n + \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\,\varphi^{(n+1)}(u)\,du$$

που είναι άλλη έκφραση του τύπου (5). Ο τύπος (6) προκύπτει από τον τύπο (3). □

Σχόλιο 6 Επειδή οι παράγωγοι της f τάξης $n+1$ είναι συνεχείς και φραγμένες σε μια περιοχή του σημείου (x_0,y_0), δηλ. ισχύει

$$\left|\frac{\partial^{n+1} f}{\partial^i x\,\partial^{n+1-i} y}(x,y)\right| \leq M \text{ για } i=0,1\dots,n+1 \text{ και για } \begin{cases} |x-x_0|<\varepsilon \\ |y-y_0|<\varepsilon \end{cases}$$

συνεπάγεται ότι

(βλέπε (5))

$$|R_n(x,y)| \leq \int_0^1 \left| \text{——''——} \right| du$$

$$\leq \frac{2^{n+1}}{n!}\,M\,\|(x-x_0,\, y-y_0)\|^{n+1} \text{ για } |x-x_0|<\varepsilon,\ |y-y_0|<\varepsilon.$$

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i} = 2^{n+1}$$

$$\begin{cases} |h| \leq \|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2} \\ |k| \leq \text{——''——} \end{cases}$$

και επομένως

$$\boxed{\begin{gathered} |R_n(x,y)| \leq \underset{\text{σταθερά}}{M'}\ \|(x-x_0,\, y-y_0)\|^{n+1} \text{ για } |x-x_0|<\varepsilon,\ |y-y_0|<\varepsilon \\[2ex] \frac{R_n(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|^n} \longrightarrow 0 \text{ καθώς } (x,y)\to(x_0,y_0) \end{gathered}}$$

Η προηγούμενη ιδιότητα ισχύει αν υποθέσουμε ΜΟΝΟ ότι η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0). [δηλ οι παράγωγοι της f τάξης $n-1$ υπάρχουν σε μια περιοχή του σημείου (x_0, y_0) και είναι διαφορίσιμες στο (x_0, y_0)].

Θ4 Έστω $f : U \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in U$. Αν η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) τότε

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - P_n(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|^n} = 0 \qquad (7)}$$

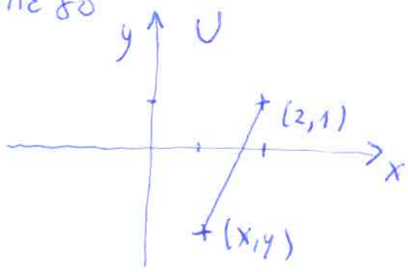
<u>Παρατήρηση</u>: η σχέση (7) έχει τοπικό χαρακτήρα.

<u>ΣΧΟΛΙΟ 7</u> Το πολυώνυμο του Taylor $P_n(x,y)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού n που έχει ίδια τιμή στο (x_0, y_0) με την f και ίδιες παραγώγους τάξης $k = 1, \dots, n$ στο (x_0, y_0) με την f.
(Βλέπε Ασκ 8)
Το πολυώνυμο του Taylor $P_n(x,y)$ είναι επίσης το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού n που ικανοποιεί τη σχέση (7) όταν βέβαια η συνάρτηση f είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).

Παράδειγμα. Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της $f(x,y) = x^y = e^{y\ln x}$ στο $(2,1)$ μέχρι όρων 2ης τάξης.

Απ. η f ορίζεται και είναι C^∞ στο ανοιχτό ημιεπίπεδο

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$



Υπολογίζουμε $f(2,1) = 2$

$f_x(x,y) = \frac{y}{x} e^{y\ln x}$, $f_x(2,1) = 1$

$f_y(x,y) = \ln x \cdot e^{y\ln x}$, $f_y(2,1) = 2\ln 2$

$f_{xx}(x,y) = -\frac{y}{x^2} e^{y\ln x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 e^{y\ln x}$, $f_{xx}(2,1) = 0$

$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{x} e^{y\ln x} + \frac{y\ln x}{x} e^{y\ln x}$, $f_{xy}(2,1) = 1 + \ln 2$

$f_{yy}(x,y) = (\ln x)^2 e^{y\ln x}$, $f_{yy}(2,1) = (\ln 2)^2 \cdot 2$

Άρα για $(x,y) \in U$ έχουμε

$$f(x,y) = 2 + \frac{1}{1!}\left[1\cdot(x-2) + 2\cdot\ln 2\,(y-1)\right]$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[0\cdot(x-2)^2 + 2\cdot(1+\ln 2)(x-2)(y-1) + (\ln 2)^2\cdot 2\,(y-1)^2\right]$$
$$+ R_2(x,y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered} f(x,y) = \underbrace{2 + (x-2) + 2\ln 2\,(y-1) + (1+\ln 2)(x-2)(y-1) + (\ln 2)^2(y-1)^2}_{= P_2(x,y)} + R_2(x,y) \\ \text{με } \frac{R_2(x,y)}{(x-2)^2+(y-1)^2} \longrightarrow 0 \text{ καθώς } (x,y) \to (2,1) \end{gathered}}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(2,1,f(2,1)) = (2,1,2)$ έχει εξίσωση: $z = 2 + (x-2) + 2\ln 2\,(y-1)$. Το πολυώνυμο 2ου βαθμού $P_2(x,y)$ δίνει μια καλύτερη προσέγγιση της f κοντά στο σημείο $(2,1)$.

Ασκ 6 Έστω $f(x) = (\ln x) \cdot \cos(\pi x)$

Να βρεθούν οι συντελεστές $a, b, c \in \mathbb{R}$ τω

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - a - b(x-1) - c(x-1)^2}{(x-1)^2} = 0$$

Απ: $f \in C^\infty((0,\infty), \mathbb{R})$ και χάρη στην Ασκ 3

ξέρουμε ότι $a = f(1)$, $b = f'(1)$ και $c = \frac{1}{2} f''(1)$.

Υπολογίζουμε λοιπόν

$$f'(x) = \frac{\cos(\pi x)}{x} - (\ln x)\pi \sin(\pi x)$$

$$f''(x) = -\frac{\pi \sin(\pi x)}{x} - \frac{\cos(\pi x)}{x^2} - \frac{\pi \sin(\pi x)}{x} - (\ln x)\pi^2 \cos(\pi x)$$

και $f(1) = 0 \Rightarrow a = 0$

$f'(1) = -1 \Rightarrow b = 1$

$f''(1) = -1 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

Ασκ 7: Έστω $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{για } x > 0 \end{cases}$

1) Δείξτε ότι $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2) Δείξτε ότι η f δεν είναι αναλυτική στο 0.

[Ορισμός: μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται αναλυτική στο $x_0 \in \mathbb{R}$, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω. για κάθε $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ισχύει

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \longrightarrow f(x) \text{ καθώς } n \to \infty.]$$

Απ: 1) Η f είναι C^{∞} στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και στο διάστημα $(0, \infty)$ ως σύνθεση C^{∞}- συναρτήσεων. Εξετάζουμε την ομαλότητά της στο 0.

Ας υπενθυμίσουμε πρώτα το γνωστό όριο $\lim\limits_{y \to -\infty} y^{\ell} e^{y} = 0$ όπου $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^{\ell}} = 0 \quad \left(y = -\frac{1}{x}, \ x = -\frac{1}{y} \right)$$

• Διαφορισιμότητα στο 0: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{-1/x}}{x} = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) = 0$.

• Θα δείξουμε ότι οι παράγωγοι της f τάξης $k \geq 2$ υπάρχουν και μηδενίζονται στο 0: Πράγματι $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ στο διάστημα $(0, \infty)$ και

για $k \geq 2$ $f^{(k)}(x) =$ άθροισμα όρων της μορφής $\dfrac{e^{-1/x}}{x^{\ell}}$, στο διάστημα $(0, \infty)$.

Αυτό αποδεικνύεται επαγωγικά. Ομοίως έχουμε $f'(0) = 0$ και

$$f^{(k)}(0) = 0 \text{ με } k \geq 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left(\sum \frac{e^{-1/x}}{x^{\ell+1}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow f^{(k+1)}(0) = 0$$

Συμπέρασμα: $f^{(k)}(0) = 0, \ \forall k$ και $P_n(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

2) Αφού $P_n \equiv 0$, $\forall n$ έχουμε $\lim\limits_{n \to \infty} P_n(x) = 0 \neq f(x)$ για $x > 0$ και η f δεν είναι αναλυτική στο 0.

Ασκ 8 Δείξτε ότι το πολυώνυμο του Taylor

$$P_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(x_0,y_0)(x-x_0)^i (y-y_0)^{k-i} \right)$$

είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού n που έχει ίδια τιμή στο (x_0,y_0) με την f και ίδιες παραγώγους τάξης $k=1,\dots,n$ στο (x_0,y_0) με την f.

Απ Εργαζόμαστε όπως στην Ασκ 1. Προφανώς $P_n(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)$

Έπειτα αποδεικνύουμε χάρη στη σχέση (*) της Ασκ 1 ότι

$$\frac{\partial^{l+p}(x-x_0)^i (y-y_0)^j}{\partial x^l \partial y^p}(x_0,y_0) = \frac{d^l (x-x_0)^i}{dx^l}(x_0) \frac{d^p (y-y_0)^j}{dy^p}(y_0)$$

$$= \begin{cases} l!\,p! & \text{αν } (l,p) = (i,j) \\ 0 & \text{αν } (l,p) \neq (i,j) \end{cases}$$

Έτσι βλέπουμε ότι για (l,p) τ.ω $1 \leq \underbrace{l+p}_{=k} \leq n$ ισχύει

$$\frac{\partial^k P_n}{\partial x^l \partial y^p}(x_0,y_0) = \frac{1}{k!} \underbrace{\binom{k}{l}}_{\frac{k!}{l!\,p!}} \frac{\partial^k f}{\partial x^l \partial y^p}(x_0,y_0)\, l!\,p! = \frac{\partial^k f}{\partial x^l \partial y^p}(x_0,y_0)$$

Μοναδικότητα: Αν Q είναι ένα άλλο πολυώνυμο βαθμού n με την ίδια ιδιότητα, θέτουμε $R := P_n - Q$ πολυώνυμο βαθμού n που ικανοποιεί $\underbrace{\frac{\partial^k R}{\partial x^l \partial y^{k-l}}(x_0,y_0) = 0}_{\text{για } 0 \leq k \leq n,\ 0 \leq l \leq k}$. Γράφουμε έπειτα το R στη μορφή:

$$R(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_{i,k-i} (x-x_0)^i (y-y_0)^{k-i} \right).$$ Χάρη στον παραπάνω υπολογισμό, συμπεραίνουμε ότι $\frac{\partial^k R}{\partial x^l \partial y^{k-l}}(x_0,y_0) = a_{l,k-l}\, l!\,(k-l)! \underset{\uparrow}{=} 0$

(λόγω της υπόθεσης)

Άρα $R = 0$ και $Q = P_n$.

Άρα $R=0$ και $Q=P_2$.

2) Το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το πολυώνυμο του Taylor 2ου βαθμού της f στο σημείο $(0,\pi)$.

Υπολογίζουμε λοιπόν $f(0,\pi)=0$

$f_x(x,y)=2x\cos(x^2+y)$ $\quad f_x(0,\pi)=0$

$f_y(x,y)=\cos(x^2+y)$ $\quad f_y(0,\pi)=-1$

$f_{xx}(x,y)=2\cos(x^2+y)-4x^2\sin(x^2+y)$ $\quad f_{xx}(0,\pi)=-2$

$f_{xy}(x,y)=-2x\sin(x^2+y)$ $\quad f_{xy}(0,\pi)=0$

$f_{yy}(x,y)=-\sin(x^2+y)$ $\quad f_{yy}(0,\pi)=0$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο είναι

$$P_2(x,y)=0+0\cdot(x-0)-1(y-\pi)+\frac{1}{2}\left[-2(x-0)^2+2.0.(x-0)(y-\pi)+0(y-\pi)^2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x,y)=-y+\pi-x^2}$$

Ασκ 9 1) Αν η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0), δείξτε ότι το πολυώνυμο του Taylor $P_2(x,y)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού 2 τ.ω.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-P_2(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|^2} = 0$$

2) Να βρεθεί πολυώνυμο $P_2(x,y)$ $2^{ου}$ βαθμού τ.ω.

$$\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\sin(x^2+y)-P_2(x,y)}{x^2+(y-\pi)^2} = 0$$

Απ 1) Αν Q είναι ένα άλλο πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού με την ίδια ιδιότητα, τότε το πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού : $R(x,y) = P_2(x,y) - Q(x,y)$ ικανοποιεί

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|^2} = 0 .$$

Γράφουμε τώρα το R στη μορφή:

$$R(x,y) = a + b(x-x_0) + c(y-y_0) + d(x-x_0)^2 + e(x-x_0)(y-y_0) + f(y-y_0)^2$$

και έχουμε διαδοχικά :

- $$\lim_{\substack{x\to x_0\\(y=y_0)}} \frac{R(x,y_0)}{(x-x_0)^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{a+b(x-x_0)+d(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = 0$$

  $\Rightarrow a = b = d = 0$ (βλέπε Ασκ 3)

- $$\lim_{\substack{y\to y_0\\(x=x_0)}} \frac{R(x_0,y)}{(y-y_0)^2} = 0 \Rightarrow \lim_{y\to y_0} \frac{c(y-y_0)+f(y-y_0)^2}{(y-y_0)^2} = 0$$

  $\Rightarrow c = f = 0$ (βλέπε Ασκ 3)

- $$\lim_{t\to 0} \frac{R(x_0+t, y_0+t)}{2t^2} = 0 \Rightarrow e = 0$$

$(x = x_0+t,\ y = y_0+t,\ R(x,y) = R(x_0+t, y_0+t) = et^2,\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = 2t^2)$

Ασκ 10: Να δειχθεί ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $u \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $y\cos x = -uxy\sin(ux) + y\cos(ux)$

Απ. Έστω $U = \mathbb{R}^2$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f: U \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y\cos x$. Έχουμε $f_x(x,y) = -y\sin x$ και $f_y(x,y) = \cos x$, συνεπώς η f είναι κλάσεως C^1.

Εφαρμόζουμε τώρα τον τύπο (6) με $n=0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $h = x - x_0 = x$, $k = y - y_0 = y$.

Σύμφωνα με τον τύπο (6), υπάρχει $u \in (0,1)$ τ.ω.

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left[f_x(0+ux, 0+uy)x + f_y(0+ux, 0+uy)y\right]$$

δηλαδή

$$y\cos x = 0 + \left[-uy\sin(ux)x + \cos(ux)y\right]$$

που είναι το ζητούμενο

Ασκ 11: Ποιός είναι ο συντελεστής του x^2 στο πολυώνυμο $P(x,y,z)$ 2ου βαθμού ως προς x, y και z όταν το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\mapsto(2,3,1)} \frac{(xy-yz-2)^y - P(x,y,z)}{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2} = 0$$

Απ Το πολυώνυμο $P(x,y,z)$ είναι το πολυώνυμο του Taylor 2ου βαθμού της συνάρτησης $f(x,y,z) = (xy-yz-2)^y$ στο σημείο $(2,3,1)$. Το πολυώνυμο $P(x,y,z)$ γράφεται

$$P(x,y,z) = f(2,3,1) + f_x(2,3,1)(x-2) + f_y(\ldots)(y-3) + f_z(\ldots)(z-1)$$

$$+\frac{1}{2}\Big[f_{xx}(2,3,1)(x-2)^2 + f_{yy}(\ldots)(y-3)^2 + f_{zz}(\ldots)(z-1)^2$$

$$+2f_{xy}(2,3,1)(x-2)(y-3) + 2f_{xz}(\ldots)(x-2)(z-1) + 2f_{yz}(\ldots)(y-3)(z-1)\Big]$$

Άρα ο ζητούμενος συντελεστής είναι $\frac{1}{2}f_{xx}(2,3,1) = \alpha$. Έχουμε:

$$2\alpha = \frac{d^2(3\cdot x - 3\cdot 1 - 2)^3}{dx^2}(2) = \frac{d^2(3x-5)^3}{dx^2}(2)$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο f_{xx} με $y=3$ και $z=1$ φιξαρισμένα

$$\frac{d(3x-5)^3}{dx} = 3\cdot 3(3x-5)^2 = 9(3x-5)^2$$

$$\frac{d^2(3x-5)^3}{dx^2} = \frac{d\,9\cdot(3x-5)^2}{dx} = 9\cdot 2\cdot 3(3x-5)$$ άρα $\boxed{2\alpha = 9\cdot 2\cdot 3\cdot 1}$

$\boxed{\alpha = 27}$