§2 Για συναρτήσεις 2 μεταβλητών

$\boxed{\Theta 3}$ Έστω $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R})$ (δηλ. έχει παραγώγους εως τάξης $n+1$ συνεχείς στο U), $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό χωρίο και $(x_0, y_0) \in U$ φιξαρισμένο. Τότε για κάθε $(x,y) \in U$ τ.ω το ευθύγραμμο τμήμα $[(x_0,y_0),(x,y)] \subset U$, ισχύει θέτοντας $(h,k) = (x-x_0, y-y_0)$:

$$f(x,y) = f(x_0+h, y_0+k) \qquad (5)$$

$$= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$$

$$+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)hk + f_{yy}(x_0,y_0)k^2\right] + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(x_0,y_0)h^i k^{n-i}\right] + \underbrace{R_n(x,y)}_{\text{υπόλοιπο Taylor}}$$

$P_n(x,y)$

πολυώνυμο Taylor n-βαθμού

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

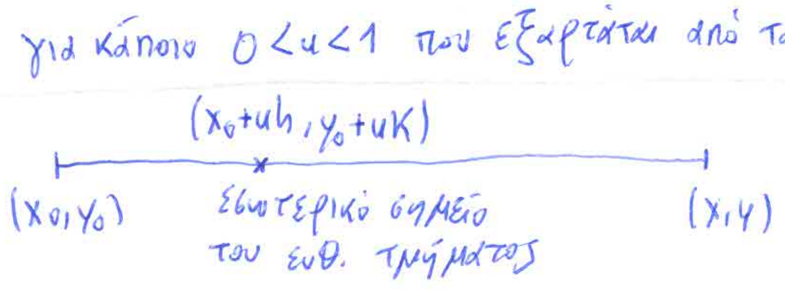
υπόλοιπο Taylor

όπου $R_n(x,y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^i \partial y^{n+1-i}}(x_0+uh, y_0+uk)h^i k^{n+1-i}\right]du$ (5)

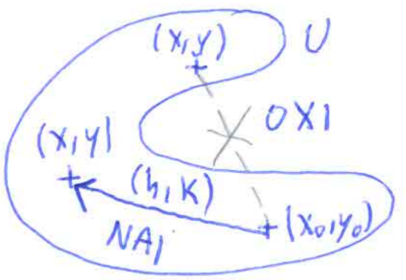
ή εναλλακτικά

$$(6) \quad R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^i \partial y^{n+1-i}}(x_0+uh, y_0+uk)h^i k^{n+1-i}$$

για κάποιο $0<u<1$ που εξαρτάται από τα σημεία (x_0,y_0) και (x,y)



Παρατήρηση



Απ Θ3: Αναγόμαστε στο $\boxed{\Theta 1}$ του Taylor για συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Εφαρμόζουμε τον τύπο (1) στη συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{στο σημείο } 0.$$

$$t \longmapsto f(x_0+th, y_0+tk)$$

Αναλυτικά: $\varphi(t) = f(r(t))$ όπου $r(t) = (x_0,y_0) + \underset{\overset{\uparrow}{[0,1]}}{t}(h,k)$

Έχουμε $\varphi(0) = f(x_0,y_0)$, $\varphi(1) = f(x_0+h, y_0+k) = f(x,y)$

και $\varphi'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)$

$$= f_x(\underbrace{x_0+th, y_0+tk}_{r(t)})\, h + f_y(\underbrace{x_0+th, y_0+tk}_{r(t)})\, k$$

άρα $\varphi'(0) = f_x(x_0,y_0)\, h + f_y(x_0,y_0)\, k$.

Ομοίως:

$$\varphi''(t) = f_{xx}(\overbrace{x_0+th, y_0+tk}^{r(t)})h^2 + f_{xy}(-''-)hk + f_{xy}(-''-)hk + f_{yy}(-''-)k^2$$

άρα $\varphi''(0) = f_{xx}(x_0,y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)hk + f_{yy}(x_0,y_0)k^2$

Επαγωγικά βρίσκουμε

$$\varphi^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(x_0+th, y_0+tk)\, h^i k^{n-i}$$

$$\varphi^{(n)}(0) = \sum_{i=0}^{n} \text{———}'' \text{———} (x_0, y_0)\, h^i k^{n-i}$$

Σύμφωνα με τον τύπο (1) ισχύει

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)\,1+\frac{\varphi''(0)}{2!}\,1^2+\dots+\frac{1}{n!}\,\varphi^{(n)}(0)\,1^n+\int_0^1\frac{(1-u)^n}{n!}\,\varphi^{(n+1)}(u)\,du$$

που είναι άλλη έκφραση του τύπου (5). Ο τύπος (6) προκύπτει από τον τύπο (3). □

<u>Σχόλιο 6</u> Επειδή οι παράγωγοι της f τάξης $n+1$ είναι συνεχείς και φραγμένες σε μια περιοχή του σημείου (x_0,y_0), δηλ. ισχύει

$$\left|\frac{\partial^{n+1} f}{\partial^i x\,\partial^{n+1-i} y}(x,y)\right|\le M \quad \text{για } i=0,1,\dots,n+1 \text{ και για } \begin{cases}|x-x_0|<\varepsilon\\ |y-y_0|<\varepsilon\end{cases}$$

συνεπάγεται ότι

$$|R_n(x,y)|\le\int_0^1\Big|\overset{(\text{βλέπε } (5))}{\text{———— '' ————}}\Big|\,du$$

$$\le\frac{2^{n+1}}{n!}\,M\,\|(x-x_0,\,y-y_0)\|^{n+1} \quad \text{για } |x-x_0|<\varepsilon,\ |y-y_0|<\varepsilon.$$

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}=2^{n+1}$$

$$\begin{cases}|h|\le\|(h,k)\|=\sqrt{h^2+k^2}\\ |k|\le \text{——— '' ———}\end{cases}$$

και επομένως

$$\boxed{\begin{gathered}|R_n(x,y)|\le\underset{\text{σταθερά}}{M'}\,\|(x-x_0,\,y-y_0)\|^{n+1}\quad\text{για } |x-x_0|<\varepsilon,\ |y-y_0|<\varepsilon\\[2em] \frac{R_n(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|^n}\longrightarrow 0 \quad\text{καθώς } (x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)\end{gathered}}$$

Η προηγούμενη ιδιότητα ισχύει αν υποθέσουμε ΜΟΝΟ ότι η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0). [δηλ οι παράγωγοι της f τάξης $n-1$ υπάρχουν σε μια περιοχή του σημείου (x_0, y_0) και είναι διαφορίσιμες στο (x_0, y_0)].

Θ4 Έστω $f: U \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in U$. Αν η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) τότε

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - P_n(x,y)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|^n} = 0 \qquad (7)}$$

<u>Παρατήρηση</u>: η σχέση (7) έχει τοπικό χαρακτήρα.

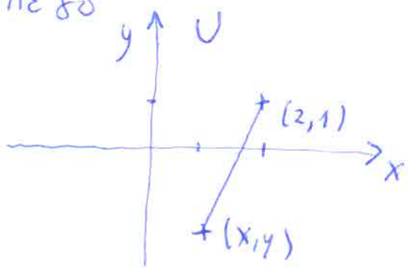
<u>ΣΧΟΛΙΟ 7</u> Το πολυώνυμο του Taylor $P_n(x,y)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού n που έχει ίδια τιμή στο (x_0, y_0) με την f και ίδιες παραγώγους τάξης $k = 1, \dots, n$ στο (x_0, y_0) με την f.
(Βλέπε Ασκ 8)

Το πολυώνυμο του Taylor $P_n(x,y)$ είναι επίσης το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού n που ικανοποιεί τη σχέση (7) όταν βέβαια η συνάρτηση f είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).

Παράδειγμα Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της $f(x,y) = x^y = e^{y\ln x}$ στο $(2,1)$ μέχρι όρων 2ης τάξης.

Απ. η f ορίζεται και είναι C^∞ στο ανοιχτό ημιεπίπεδο

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$



Υπολογίζουμε $f(2,1) = 2$

$$f_x(x,y) = \frac{y}{x} e^{y\ln x}, \quad f_x(2,1) = 1$$

$$f_y(x,y) = \ln x \cdot e^{y\ln x}, \quad f_y(2,1) = 2\ln 2$$

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{y}{x^2} e^{y\ln x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 e^{y\ln x}, \quad f_{xx}(2,1) = 0$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{x} e^{y\ln x} + \frac{y\ln x}{x} e^{y\ln x}, \quad f_{xy}(2,1) = 1 + \ln 2$$

$$f_{yy}(x,y) = (\ln x)^2 e^{y\ln x}, \quad f_{yy}(2,1) = (\ln 2)^2 \cdot 2$$

Άρα για $(x,y) \in U$ έχουμε

$$f(x,y) = 2 + \frac{1}{1!}\left[1\cdot(x-2) + 2\cdot\ln 2\,(y-1)\right]$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[0\cdot(x-2)^2 + 2\cdot(1+\ln 2)(x-2)(y-1) + (\ln 2)^2\cdot 2\,(y-1)^2\right]$$
$$+ R_2(x,y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered} f(x,y) = \underbrace{2 + (x-2) + 2\ln 2\,(y-1) + (1+\ln 2)(x-2)(y-1) + (\ln 2)^2(y-1)^2}_{= P_2(x,y)} + R_2(x,y) \\ \text{με } \frac{R_2(x,y)}{(x-2)^2 + (y-1)^2} \longrightarrow 0 \text{ καθώς } (x,y) \to (2,1) \end{gathered}}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(2,1,f(2,1)) = (2,1,2)$ έχει εξίσωση: $z = 2 + (x-2) + 2\ln 2\,(y-1)$. Το πολυώνυμο 2ου βαθμού $P_2(x,y)$ δίνει μια καλύτερη προσέγγιση της f κοντά στο σημείο $(2,1)$.

Ασκ 6 Έστω $f(x) = (\ln x) \cdot \cos(\pi x)$

Να βρεθούν οι συντελεστές $a, b, c \in \mathbb{R}$ τω

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - a - b(x-1) - c(x-1)^2}{(x-1)^2} = 0$$

Απ: $f \in C^\infty((0,\infty), \mathbb{R})$ και χάρη στην Ασκ 3

ξέρουμε ότι $a = f(1)$, $b = f'(1)$ και $c = \frac{1}{2} f''(1)$.

Υπολογίζουμε λοιπόν

$$f'(x) = \frac{\cos(\pi x)}{x} - (\ln x)\pi \sin(\pi x)$$

$$f''(x) = -\frac{\pi \sin(\pi x)}{x} - \frac{\cos(\pi x)}{x^2} - \frac{\pi \sin(\pi x)}{x} - (\ln x)\pi^2 \cos(\pi x)$$

και $f(1) = 0 \Rightarrow a = 0$

$f'(1) = -1 \Rightarrow b = 1$

$f''(1) = -1 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$