# Τύποι του Taylor

## §1 Για συναρτήσεις μιας μεταβλητής

**Θ1** Έστω $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$ (δηλ. έχει παραγώγους έως τάξης $n+1$ συνεχείς), $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα και $x_0 \in I$ φιξαρισμένο. Τότε $\forall x \in I$ ισχύει:

$$(1) \quad \boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \\ &+ \left(\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + u(x-x_0))\, du\right)(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}}$$

**ΣΧΟΛΙΑ** 1 (1) $\iff f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ όπου

- $\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$ $\quad (f^{(0)} = f, \ 0! = 1)$

είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $n$ που έχει ίδια τιμή στο $x_0$ με την $f$ και ίδιες παραγώγους τάξης $k = 1, \dots, n$ στο $x_0$ με την $f$. Καλείται πολυώνυμο Taylor $n$-βαθμού της $f$ στο $x_0$. ($\to$ Ασκ 1)

και

- $R_n(x) = \left(\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + u(x-x_0))\, du\right)(x-x_0)^{n+1}$

$$(2) \quad \boxed{R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt} \longleftarrow$$

αλλαγή μεταβλητής

$t = x_0 + u(x-x_0)$

$u = \frac{t-x_0}{x-x_0} \quad 1-u = \frac{x-t}{x-x_0}$

$du = \frac{1}{x-x_0} dt$

είναι το υπόλοιπο Taylor.

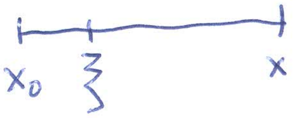
② Για $n=0$, ο τύπος του Taylor (βλέπε (21)) ταυτίζεται με το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt}$$

③ Από τον τύπο $R_n(x) = \left(\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+u(x-x_0))\,du\right)(x-x_0)^{n+1}$

βλέπουμε επίσης ότι

$$(3) \quad \boxed{R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1}}$$ για κάποιο $\xi \in (x_0, x)$




Απ Εφαρμόζουμε το

2ο Θεώρημα μέσης τιμής (βλέπε βιβλίο)

Αν $g, h\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς και $g>0$ στο $(a,b)$ τότε

$\int_a^b h(u)g(u)\,du = h(c)\int_a^b g(u)\,du$ για κάποιο $c \in (a,b)$.

παίρνοντας $a=0$, $b=1$, $g(u) = \frac{(1-u)^n}{n!}$ και $h(u) = f^{(n+1)}(x_0+u(x-x_0))$

Αφού $\int_0^1 g(u)\,du = \frac{1}{n!}\left[-\frac{(1-u)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}$ συμπεραίνουμε

τη σχέση (3) με $\xi = x_0 + c(x-x_0)$ όπου $0<c<1$.