

Κεφάλαιο 16

Σύγκριση συχνοτήτων κατηγοριών: το στατιστικό κριτήριο χ^2

1

Προϋποθέσεις για τη χρήση του τεστ

Διαφορές ή συσχέτιση	Διαφορές
Κλίμακα μέτρησης	Κατηγορική
Σχεδιασμός	Ανεξάρτητα δείγματα
Σημείωση	Τα δεδομένα πρέπει να έχουν τη μορφή συχνοτήτων. Αν και ενδιαφερόμαστε για τις διαφορές στην επίδραση της ανεξάρτητης μεταβλητής, το τεστ ουσιαστικά εξετάζει τη σχέση μεταξύ των κατηγοριών στις στήλες και τις γραμμές ενός πίνακα.

2

Το στατιστικό κριτήριο χ^2

- **Μη παραμετρική** στατιστική δοκιμασία
- Απλό στον υπολογισμό του και εξαιρετικά δημοφιλές στις κοινωνικές επιστήμες
- Οι προϋποθέσεις για τη χρήση του ικανοποιούνται με σχετική ευκολία
- Προκειμένου να υπολογίσουμε τον ελάχιστο αριθμό συμμετεχόντων, μπορούμε να ακολουθήσουμε τον εξής απλό κανόνα: **για κάθε κατηγορία θα πρέπει να έχουμε περίπου 20 συμμετέχοντες**
- Χρησιμοποιείται για την ερμηνεία συχνοτήτων που προέρχονται μόνο από ένα δείγμα (ως δείκτης προσαρμογής) ή από δύο ή περισσότερα δείγματα (ως τεστ ανεξαρτησίας)

3

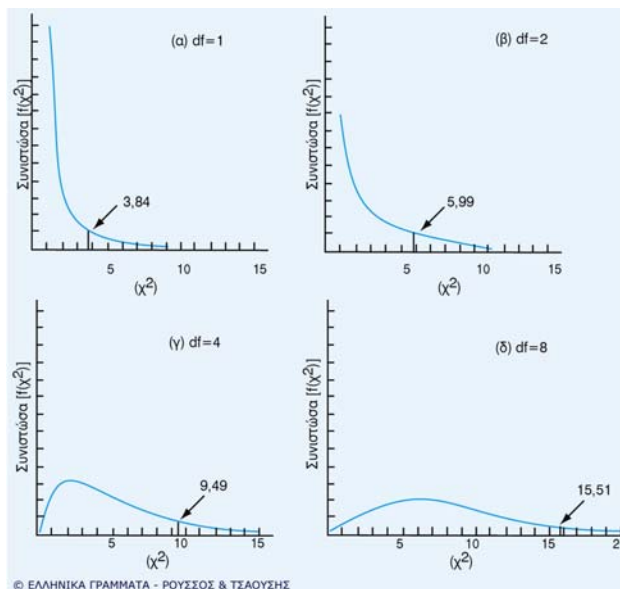
Το χ^2 για ένα δείγμα

- Εξετάζει αν υπάρχει διαφορά μεταξύ των δεδομένων που έχουν συλλεχθεί κατά τη διάρκεια της έρευνας (πραγματικές συχνότητες) και αυτών που θα περιμέναμε να εμφανιστούν αν ίσχυε η μηδενική υπόθεση (αναμενόμενες συχνότητες).
- Ο δείκτης προσαρμογής χρησιμοποιείται επίσης προκειμένου να αποφασίσουμε αν ένα μεγάλο δείγμα προσεγγίζει τη μορφή της κανονικής κατανομής ή όχι.
- **Πραγματικές συχνότητες:** Οι συχνότητες που παρατηρήθηκαν κατά τη διεξαγωγή της έρευνας
- **Αναμενόμενες συχνότητες:** Οι τιμές των συχνοτήτων που θα εμφανίζονταν αν ίσχυε η μηδενική υπόθεση
- Ο τύπος:

$$\chi^2 = \sum \frac{(\Pi - A)^2}{A}$$

4

χ^2 κατανομές



Howell, 1999

5

Ένα παράδειγμα

Ένας ερευνητής μελετάει τον τρόπο με τον οποίο οι φοιτητές οργανώνουν τη μελέτη τους. Επέλεξε τυχαία 120 φοιτητές διαφόρων σχολών και τους ζήτησε να συμπληρώσουν ένα ερωτηματολόγιο, το οποίο επιτρέπει να καθοριστεί ο τρόπος μελέτης τους. Συγκεκριμένα, η αξιολόγηση των απαντήσεων που δίνει το άτομο επιτρέπει στον ερευνητή να κατηγοριοποιήσει τον τρόπο μελέτης του ως: α) μεθοδική (καθημερινή μελέτη), β) ακανόνιστη (περίοδοι εξαιρετικά έντονης μελέτης), ή γ) συνδυαστική (συνδυασμός και των δύο προηγούμενων).

Οι υποθέσεις:

- **Μηδενική υπόθεση:** Οι συχνότητες των τριών τύπων μελέτης δεν είναι διαφορετικές μεταξύ τους (υπόθεση διπλής κατεύθυνσης).
- **Εναλλακτική υπόθεση:** Οι συχνότητες των τριών τύπων μελέτης είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

6

Τα δεδομένα και το αποτέλεσμα

Τρόπος μελέτης			Σύνολο
<i>Μεθοδική</i>	<i>Ακανόνιστη</i>	<i>Συνδυαστική</i>	
51	27	42	120

$$\chi^2(2)=7,34, p<,05$$

7

Το χ^2 για δύο ή περισσότερα δείγματα

- Μια δεύτερη χρήση του στατιστικού κριτηρίου χ^2 είναι ως στατιστικό κριτήριο για τον έλεγχο της ανεξαρτησίας μεταξύ δύο μεταβλητών. Δηλαδή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σύγκριση δύο ή περισσότερων δειγμάτων, για να εξεταστεί αν οι συχνότητες των διάφορων κατηγοριών μπορούν να προκύψουν τυχαία ή είναι συστηματικές.
- **Πίνακας σύμπτωσης:** Πίνακας στον οποίο κάθε τιμή ταξινομείται ως προς δύο μεταβλητές ταυτόχρονα

8

Ένα παράδειγμα

- Ένας ερευνητής θέλει να ελέγξει αν μια μέθοδος διδασκαλίας είναι αποτελεσματικότερη από τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Για τον σκοπό αυτό επιλέγει δύο τμήματα μιας τάξης ενός σχολείου και ζητάει από ένα δάσκαλο να διδάξει στο πρώτο τμήμα (το οποίο αποτελείται από 44 μαθητές) ένα γνωστικό αντικείμενο με τη νέα μέθοδο διδασκαλίας και στο δεύτερο τμήμα (που αποτελείται από 42 μαθητές) το ίδιο γνωστικό αντικείμενο χρησιμοποιώντας την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας.
- Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας και στα δύο τμήματα, ο ερευνητής υποβάλλει τους μαθητές και των δύο τμημάτων στην ίδια γραπτή δοκιμασία για τον έλεγχο της κατανόησης του γνωστικού αντικειμένου που διδάχτηκαν.
- Η γραπτή αυτή δοκιμασία δίνει στον ερευνητή τη δυνατότητα να κατηγοριοποιήσει την επίδοση των μαθητών ως: α) χαμηλή, β) μέτρια, ή γ) υψηλή.

9

Τα δεδομένα

Μέθοδος διδασκαλίας	Επίδοση των μαθητών			Σύνολα
	Χαμηλή	Μέτρια	Υψηλή	
Νέα μέθοδος	6	15	23	44
Παραδοσιακή μέθοδος	10	8	24	42
Σύνολα	16	23	47	86

10

Υπολογισμός των αναμενόμενων συχνοτήτων

Οι αναμενόμενες συχνότητες στο παράδειγμά μας θα υπολογιστούν από τους συνολικούς αριθμούς των μαθητών κάθε τάξης και από τους συνολικούς αριθμούς κάθε επιπέδου επίδοσης σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο:

$$A = \frac{\Gamma \times \Sigma}{T}$$

Όπου,

Γ = το σύνολο των συχνοτήτων της αντίστοιχης γραμμής,

Σ = το σύνολο των συχνοτήτων της αντίστοιχης στήλης, και

T = το σύνολο των συχνοτήτων όλων των φατνίων.

11

Υποθέσεις και αποτέλεσμα

■ **Μηδενική υπόθεση:** Οι δύο μεταβλητές (επίδοση και μέθοδος διδασκαλίας) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, τα ποσοστά των μαθητών με «χαμηλή», «μέτρια» και «υψηλή» επίδοση θα είναι ίσα και για τις δύο μεθόδους διδασκαλίας.

■ **Εναλλακτική υπόθεση:** Οι δύο μεταβλητές είναι εξαρτημένες (σχετίζονται μεταξύ τους). Δηλαδή, τα ποσοστά των μαθητών με «χαμηλή», «μέτρια» και «υψηλή» επίδοση θα είναι διαφορετικά για τις δύο μεθόδους διδασκαλίας.

$$\chi^2(2)=3.11, ns$$

12

Τα αποτελέσματα από το SPSS

Μέθοδος * Επίδοση Crosstabulation

Count		Επίδοση			Total
		Χαμηλή	Μέτρια	Υψηλή	
Μέθοδος	Νέα μέθοδος	6	15	23	44
	Παραδοσιακή μέθοδος	10	8	24	42
Total		16	23	47	86

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	3,107 ^a	2	,212
Likelihood Ratio	3,150	2	,207
Linear-by-Linear Association	,099	1	,753
N of Valid Cases	86		

a. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 7,81.

13

Περιορισμοί στη χρήση του χ^2

- ❑ Οι συμμετέχοντες πρέπει να εμφανίζονται μία μόνο φορά (σε ένα μόνο φαντίο) στον πίνακα σύμπτωσης. Δηλαδή, δεν επιτρέπεται να περιλαμβάνονται δύο παρατηρήσεις από το ίδιο άτομο στον πίνακα, ούτε όμως και να παραλείπονται δεδομένα από κανένα συμμετέχοντα.
- ❑ Στα φαντίνια του πίνακα πρέπει να εμφανίζονται πραγματικές συχνότητες και όχι ποσοστά ή αναλογίες.
- ❑ Το σύνολο των αναμενόμενων συχνοτήτων πρέπει να είναι ίσο με το σύνολο των πραγματικών συχνοτήτων
- ❑ Ένας μεγάλος αριθμός χαμηλών αναμενόμενων συχνοτήτων αυξάνει σημαντικά τον κίνδυνο για ένα σφάλμα Τύπου I

14

Περιορισμοί στη χρήση του χ^2 (συνέχεια)

- Οι αναμενόμενες συχνότητες εξαρτώνται απόλυτα από το πλήθος των συμμετεχόντων στην έρευνα που έχει πραγματοποιηθεί. Επομένως, ο απλούστερος και συγχρόνως ο ασφαλέστερος τρόπος για να αποφευχθεί το πρόβλημα είναι να καταβληθεί προσπάθεια να συγκεντρωθούν δεδομένα από αρκετούς συμμετέχοντες (τουλάχιστον 20 σε κάθε φαντίο του πίνακα σύμπτωσης).
- Όταν ο πίνακας σύμπτωσης είναι μικρός (9 ή λιγότερα φαντίνια), όλες οι αναμενόμενες συχνότητες θα πρέπει να είναι ίσες ή μεγαλύτερες του 5
- Αν έχουμε περισσότερους από 20 συμμετέχοντες, το χ^2 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί εφόσον τρία ή περισσότερα φαντίνια έχουν αναμενόμενη συχνότητα μικρότερη από 5

15

Διόρθωση Yates ή όχι;

- **Διόρθωση Yates:** Τροποποίηση στον υπολογισμό του χ^2 όταν οι βαθμοί ελευθερίας είναι 1
- Ο τύπος σε μια τέτοια περίπτωση γίνεται:

$$\chi^2 = \sum \frac{(|\Pi - A| - 0.5)^2}{A}$$

- Σήμερα, πολλοί στατιστικολόγοι θεωρούν τη διόρθωση Yates πολύ συντηρητική (η διόρθωση που κάνει στο χ^2 είναι πολύ μεγάλη) και υποστηρίζουν ότι μπορεί να οδηγήσει αντίστοιχα σε ένα σφάλμα Τύπου II.

16