ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

M.C.CHAKI

ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
M.C.CHAKI

ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ: ΧΑΡΗΣ ΣΤΑΥΡΙΝΟΣ
ΕΠΙΒΛΕΨΗ: ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΣΤΑΥΡΙΝΟΣ

2009

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΟΥ ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗΣ

Η τανυστική ανάλυση είναι ένας κλάδος, εξ ολοκλήρου συσχετισμένος με ένα παλαιό πρόβλημα των καλούμενων διαφορικών αναλλοίωτων της γεωμετρίας Riemann. Οι διαφορικές αναλλοίωτες είχαν εισαχθεί από τους Riemann, Beltrani, Christoffelκαι Lipschiz. Η νέα μορφή τους εισήχθη από τον Ricci(1853-1925), που διερεύνησε γεωμετρικές ιδιότητες και την διατύπωση φυσικών νόμων με τρόπο ανεξάρτητο από το σύστημα συντεταγμένων (1887-1896) και έδωσε την πρώτη συστηματική εργασία του το 1892, με εφαρμογές της στη Διαφορική Γεωμετρία και στην Φυσική.

Το όνομα τανυστική ανάλυση δόθηκε από τον Albert Einstein(1879-1955) το 1916. Ένας τανύσης είναι ένα σύνολο συναρτήσεων (συνιστωσών), καθορισμένων ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων, οι οποίες μετασχηματίζονται δι' αλλαγής των συντεταγμένων σύμφωνα με ορισμένους νόμους. Κάθε συνιστώσα στο ένα σύστημα είναι γραμμική ομογενής συνάρτηση των συνιστωσών του άλλου συστήματος συντεταγμένων. Αν οι συνιστώσες του ενός τανυστή είναι ίσες με τις συνιστώσες του άλλου τανυστή στο ίδιο σύστημα, θα είναι ίσες σε όλα τα συστήματα. Η ισότητα τότε των τανυστών είναι αναλλοίωτη ως προς την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων. Ακόμα, η φυσική, γεωμετρική, ή καθαρά μαθηματική σημασία ενός τανυστή, διατηρείται αναλλοίωτη με την αλλαγή συστήματος. Το τελευταίο αυτό είναι ζωτικό για τη Θεωρία της Σχετικότητας, όπου οι ¨αντικειμενικοί' φυσικοί νόμοι είναι ανεξάρτητοι από τη θέση του παρατηρητή, δηλαδή από το σύστημα συντεταγμένων και γι' αυτό παριστάνονται από τανυστές.
Με βάση τους τανυστές, διαμορφώνεται ένας νέος τρόπος διατυπώσεως της γεωμετρίας Riemannκαι ιδιαιτέρως της καμπυλότητας του χώρου.
Ο Einsteinχρησιμοποίησε τανυστές του 4-χώρου για να εκφράσει την καμπυλότητα της γεωμετρίας Riemannκαι ιδιαιτέρως της καμπυλότητας του χωροχρόνου.
Οι Ricci-Curbastroκαι Tullio Levi-Civita(1873-1941) έδειξαν μέθοδο, δια της οποίας διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και φυσικοί νόμοι μπορούν να εκφραστούν τανυστικώς, ώστε να διατυπώνονται ανεξάρτητα από το σύστημα συντεταγμένων (1901).

Έτσι η τανυστική ανάλυση χρησιμοποιήθηκε για την έκφραση του μαθηματικώς αναλλοίωτου των φυσικών νόμων, πολύ χρόνο πριν ο Einsteinτην χρησιμοποιήσει για τους σκοπούς του.
Από το 1901 ως το 1915 η τανυστική ανάλυση περιοριζόταν σε ένα μικρό κύκλο μαθηματικών. Το 1916 ο Einstein με την έρευνά του άλλαξε την εικόνα της

καταστάσεως και διατύπωσε τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Οι μαθηματικοί τότε εξεπλάγησαν από τη γεωμετρία που αυτός εφάρμοσε στη θεωρία του.
Η ειδική θεωρία της Σχετικότητας του Einsteinτο 1905 διαμορφώθηκε με τη χρήση διανυσμάτων και τανυστών, αλλά η γενική περιλαμβάνοντας τις ιδιότητες των 4-διάστατων πολλαπλοτήτων Riemannτου χωροχρόνου, απαιτούσε ειδικό λογισμό τανυστών, συσχετισμένο με τις πολλαπλότητες αυτές. Αυτός ο λογισμός είχε ήδη δημιουργηθεί, χωρίς όμως να τον έχουν ήδη προσέξει οι φυσικοί.

Με την εφαρμογή των τανυστών και της γεωμετρίας Riemann στη θεωρία της σχετικότητας, αναζωπυρώθηκε το ενδιαφέρον για την τανυστική ανάλυση και την γεωμετρία αυτή.
Το 1917 ο Levi-Civitaβελτίωσε τη θεωρία Ricci-Curbastro, αφού εισήγαγε την έννοια της παραλλήλου μετατοπίσεως ή μεταφοράς διανύσματος.
Με την Θεωρία της Σχετικότητας, δημιουργήθηκε τάση σπουδής της γεωμετρίας Riemannη οποία οδήγησε στην εισαγωγή μη Riemannγεωμετριών.
Η γεωμετρία Ριεμανν καθορίζει το συσχετισμό των σημείων με βάση την απόστασή τους.

Το βιβλίο του M.C. Chaki αποτελεί ένα βασικό εισαγωγικό βιβλίο στον τανυστικό λογισμό. Ο διακεκριμένος επιστήμονας είχε διδάξει επί σειρά ετών τανυστές στο πανεπιστήμιο της Calcutta.
Μία πληθώρα ασκήσεων και λυμένων παραδειγμάτων αποτελεί ένα βασικό εργαλείο για την κατανόηση του τανυστικού λογισμού χρήσιμο σε κλάδους, όπως η Διαφορική Γεωμετρία, η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, η Κοσμολογία, ο Ηλεκτρομαγνητισμός, η Κοσμολογία, η Μηχανική κλπ Ελπίζω ότι φοιτητές και επιστήμονες των επιστημών κυρίως φυσικοί και μαθηματικοί θα βρουν χρήσιμο το βιβλίο του M. Chakiκαι θα εφοδιασθούν με γνώσεις στον τανυστικό λογισμό απαραίτητες για να αντεπεξέλθουν σε περισσότερο προχωρημένες έννοιες στην ειδικότητα που τους ενδιαφέρει. Έχοντας την επιμέλεια της μετάφρασης του βιβλίου Tensor CalculustouChaki θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Χάρη Σταυρινό για την υπομονή και την εργατικότητα στην γραφή όλου του κειμένου.

Αθήνα, 2009

Παναγιώτης Σταυρινός
Επίκουρος Καθηγητής

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ 1ης ΕΚΔΟΣΗΣ

Αυτό το βιβλίο γράφτηκε προκειμένου να χρησιμοποιηθεί ως βοήθημα στα μαθήματα των πανεπιστημίων της Ινδίας. Περιέχει πέντε κεφάλαια $0, I, II, III$ και IV, εκ των οποίων το κεφάλαιο 0 κάνει μία εισαγωγή στην προέλευση και τη φύση της έννοιας του τανυστή, ενώ το κεφάλαιο I παρέχει ορισμένα προαπαιτούμενα εργαλεία που θα χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια. Στο κεφάλαιο II αναπτύσσεται η Τανυστική Άλγεβρα σε ν διάστατο χώρο, ενώ στο κεφάλαιο III έχει επιλεγεί ο χώρος Riemann n διαστάσεων για την ανάπτυξη του Τανυστικού Λογισμού. Στο κεφάλαιο IV γίνεται μία εφαρμογή του $n-$διάστατου χώρου Ριεμανν στον συνήθη Διανυσματικό Λογισμό. Αυτό γίνεται προκειμένου να δείξουμε το μέγεθος της ισχύος που έχει ο Τανυστικός Λογισμός.

Έχει καταβληθεί κάθε προσπάθεια, προκειμένου να αναπτυχθεί το θέμα με έναν αυστηρό τρόπο. Όποτε θεωρήθηκε αναγκαίο έχουν παρατεθεί εξηγήσεις, προκειμένου να διασφαλιστεί η σαφήνεια. Για την αποφυγή παρανοήσεων και λάθος εντυπώσεων από τον αναγνώστη, παρευρίσκονται πολυάριθμες σημειώσεις στο κείμενο. Επίσης, υπάρχει μεγάλος αριθμός λυμένων παραδειγμάτων και ασκήσεων προς λύση με το αποτέλεσμά τους στο τέλος κάθε κεφαλαίου.

Ελπίζω ότι το βιβλίο αυτό θα φανεί χρήσιμο όχι μόνο στους προπτυχιακούς φοιτητές, αλλά και στους μεταπτυχιακούς που διδάσκονται τη Διαφορική Γεωμετρία με τη βοήθεια του Τανυστικού Λογισμού, αλλά και στους φοιτητές Πολυτεχνείων και όσων δίνουν κάποιες σχετικές εξετάσεις. Θα ήθελα να ευχαριστήσω την Δρ. Bandana Barua, Επίκουρη Καθηγήτρια στο Τμήμα Θεωρητικών Μαθηματικών, στο Πανεπιστήμιο της Calcuttaγια τις πολύτιμες υποδείξεις της για τη βελτίωση του βιβλίου. Θέλω επίσης να ευχαριστήσω τη Δεσποινίδα Manjusha Tarafdar, λέκτορα στο ίδιο Τμήμα του Πανεπιστημίου της Calcutta , η οποία μελέτησε ολόκληρο το χειρόγραφο και πρόσφερε κάποιες πολύτιμες υποδείξεις.

Τέλος, θα ήθελα να δείξω την ευγνωμοσύνη μου στους εκδότες και τυπογράφους για την επιμέλειά τους στην έκδοση του βιβλίου αυτού.

Κριτικές και προτάσεις για τη βελτίωση του βιβλίου θα είναι ευπρόσδεκτες.

Calcutta, M.C. Chaki
Σεπτέμβριος,1987

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ 2$^{\eta\varsigma}$ ΕΚΔΟΣΗΣ

Σε αυτή την έκδοση έχουν προστεθεί δύο νέα κεφάλαια, τα κεφάλαια V και VI τα οποία έχουν να κάνουν με τη συνήθη διανυσματική ανάλυση σε ένα τρισδιάστατο Ευκλείδειο Χώρο E_3 σε αναφορά με κυλινδρικά πολικά συστήματα συντεταγμένων και το τελευταίο έχει να κάνει με τη διανυσματική ανάλυση στον E_3 σε αναφορά με καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων. Επίσης, κάποιες τροποποιήσεις έχουν γίνει στο κεφάλαιο τρία. Αυτές οι τροποποιήσεις που έγιναν προκειμένου να γίνει το βιβλίο κατάλληλο για τα προπτυχιακά και μεταπτυχιακά μαθήματα στα πανεπιστήμια της Ινδίας. Επιπλέον, έχει αυξηθεί ο αριθμός των λυμένων παραδειγμάτων και των ασκήσεων, με τη βοήθεια της εμπειρίας του συγγραφέα μέσα από τα ερευνητικά του άρθρα. Όλα τα τυπογραφικά λάθη της πρώτης έκδοσης έχουν διορθωθεί.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως δύο από τους παλιούς φοιτητές μου δρ.Purnima Chakraborty και δρ.B.Chaki για τη βοήθεια που χρειάστηκα για την προετοιμασία των χειρογράφων των κεφαλαίων V και VI και για την πολύτιμη προσφορά τους συνολικά. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω το δρ. A. Konarκαι δρ. U.C.De , και οι δύο επίκουροι καθηγητές του τμήματος Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Kalyani, οι διάβασαν τα χειρόγραφα των κεφαλαίων V και VI και πρόσφεραν πολύτιμες υποδείξεις.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους εκδότες και τυπογράφους για την άριστη εργασία τους.

Κριτικές και προτάσεις για τη βελτίωση του βιβλίου θα ήταν ευπρόσδεκτες

Calcutta, M.C. Chaki
Ιούνιος, 1994

Περιεχόμενα

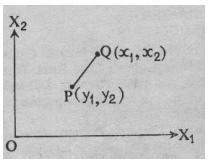
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

0.1 Τανυστής: Η μέθοδος του Γενικού Διαφορικού Λογισμού δημιουργήθηκε από τους Gauss, Riemann, Chrisoffel και Ricci. Σε αυτόν το γενικό λογισμό ο Ricci έδωσε το όνομα "Απόλυτος Διαφορικός Λογισμός " . Η πρώτη αναφορά * σε αυτό το αντικείμενο δημοσιεύτηκε από τον Ricci και τον μαθητή του Levi-Civita το 1901. Ο σπουδαίος φυσικός κρυστάλλων W.Voigt του Gottingen όρισε τους τανυστές και τους έδωσε αυτό το όνομα στην αξιοσημείωτη εργασία "Εγχειρίδιο της Φυσικής Κρυστάλλων " δημοσιευμένο το 1910†.Το πρώτο παράδειγμα ενός τανυστή το οποίο αναγνωρίζεται στη φυσική ήταν ένα σύστημα τάσεων ενός παραμορφωμένου στερεού. Το όνομα "τανυστής ", εξ άλλου, προέρχεται από τη λέξη τανύω (δηλαδή τεντώνω).

Οι όροι "τανυστής " και "τανυστικός λογισμός " εισήχθησαν ταυτόχρονα στη μελέτη Απόλυτου Διαφορικού Λογισμού μαζί με τη δημιουργία της γενικής θεωρίας της σχετικότητας που προτάθηκε από τους Einstein και Grassman στο κοινό τους σημείωμα "Εισαγωγή στη γενική σχετικότητα " που δημοσιεύτηκε το 1914‡.Ο τανυστής είναι μία γενίκευση του όρου διάνυσμα και ο Τανυστικός Λογισμός είναι μία γενίκευση του διανυσματικού λογισμού.

0.2 Διάνυσμα ενός δισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου E_2.

Σε αυτή την παράγραφο αναφέρουμε πως ο όρος τανυστής μπορεί να θεωρηθεί σαν μία γενίκευση του όρου διάνυσμα. Γι΄ αυτό ξεκινάμε με ένα Ευκλείδειο χώρο E_2 δύο διαστάσεων εφοδιασμένο με ένα σύστημα ορθογώνιων Καρτεσιανών συντεταγμένων. Έστω Q και P δύο σημεία του E_2 με τα (x_1, x_2) και τα (y_1, y_2) να είναι οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους (δες εικ.1). Χάριν ευκολίας παίρνουμε τις συντεταγμένες του σημείου σαν (x_1, x_2), παρ΄ ότι είναι συνηθισμένο να τις παίρνουμε ως (x, y).



*"Methdes de Calcul differentiel absolu et leurs applications", Mathimatische Annalen, Vol.54,1901

†Lehrbuch der Kristallphysik, Teubner, Berlin,1910.

‡Zeitschr. für Math. u. Phys. 62,1914.

Τότε οι συντεταγμένες ενός ευθυγράμμου τμήματος $\overline{PQ}$, δηλαδή του διανύσματος $\overrightarrow{PQ}$, είναι $(x_1 - y_1, x_2 - y_2)$*. Εκφράζοντας τα $x_1 - y_1$ και $x_2 - y_2$ ως z_1 και z_2 αντίστοιχα οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{PQ}$ μπορούν να εκφραστούν ως $z_i = x_i - y_i$ (1) $\quad i = 1, 2$. Έπειτα θεωρούμε έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό των αξόνων συντεταγμένων που δίνεται ως

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ \bar{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

όπου ο πίνακας $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ είναι ορθογώνιος με ορίζουσα 1.
Μπορούμε να εκφράσουμε τη (2) ως ακολούθως:

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j + b_i \tag{3}$$

όπου $(\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ οι συντεταγμένες των Q και P στο νέο σύστημα συντεταγμένων. Τότε οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{PQ}$ στο νέο σύστημα συντεταγμένων είναι $(\bar{x}_1 - \bar{y}_1, \bar{x}_2 - \bar{y}_2)$. Εκφράζουμε τα $(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)$ και $(\bar{x}_2 - \bar{y}_2)$ ως $\bar{z}_1$ και $\bar{z}_2$ αντίστοιχα. Τότε οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{PQ}$ μπορούν να εκφραστούν ως $\bar{z}_i = \bar{x}_i - \bar{y}_i$ (4) $\quad i = 1, 2$

Τώρα από την (3) έχουμε $\bar{x}_i - \bar{y}_i = (\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j + b_i) - (\sum_{j=1}^{2} a_{ij}y_j + b_i) = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}(x_i - y_j) = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}z_j$ (από την (1)). Από εδώ η (4) μπορεί να γραφεί ως

$$\bar{z}_i = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}z_j \tag{5}$$

$$\text{ή ως } \bar{z}_i = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} z_j \quad (6) \quad (\because \text{ από την(3) έχουμε } \; a_{ij} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j})$$

Η παραπάνω εξίσωση δείχνει ότι οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $\overrightarrow{PQ}$ του E_2 μετασχηματίζονται σύμφωνα με ένα προκαθορισμένο μετασχηματισμό που δίνεται από την (6), όταν αναφέρονται σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων. Αυτό επισημάνθηκε πρώτα από τον Felix Klein το 1872. Σύμφωνα με αυτή την παρατήρηση ένα διάνυσμα του E_2 μπορεί να νοηθεί ως ένα αντικείμενο το οποίο προσδιορίζεται σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων από ένα σύνολο συνιστωσών, το οποίο μετασχηματίζεται σύμφωνα με το νόμο που δίνεται από την (6), όταν αναφέρεται σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων.

*Chaki: "A Text Book of Analytic Geometry" Vol.II (3rd edition)1991. Theorem 1.3 Part II Page 30

Η σημασία του παραπάνω ορισμού του διανύσματος βρίσκεται στο γεγονός του ότι ένας τανυστής μπορεί να νοηθεί ως μία γενίκευση του διανύσματος, όταν ένα διάνυσμα προσδιορίζεται με αυτό τον τρόπο.
Επομένως, δείχνουμε ότι σε ένα E_2 υπάρχουν αντικείμενα τα οποία προσδιορίζονται σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων από ένα σύνολο συνιστωσών, το οποίο μετασχηματίζεται σύμφωνα με συγκεκριμένους κανόνες όταν αναφέρονται σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων.
Στη συνέχεια, εκτός αν δηλωθεί διαφορετικά, ένα διάνυσμα του E_2 του οποίου οι συνιστώσες σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων είναι A_1, A_2, θα γράφεται σαν διάνυσμα A_i.

Ένα αντικείμενο προερχόμενο από δύο διανύσματα:

Έστω A_i και B_i δύο διανύσματα του E_2 και έστω ένα αντικείμενο με συνιστώσες

$$A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1, A_2B_2$$

σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων. Εκφράζουμε τις συνιστώσες A_i και B_i σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων ως $\overline{A}_i$ και $\overline{B}_j$ αντίστοιχα. Τότε από την (5) έχουμε

$$\overline{A}_i = \sum a_{ik}A_k \quad \text{και } \overline{B}_j = \sum a_{il}B_l \quad k,l = 1,2$$

$$\text{Επομένως} \quad \overline{A}_i\overline{B}_j = \sum a_{ik}a_{jl}A_kB_l \tag{7}$$

Αν εκφράσουμε τα A_kB_l ως C_{kl} και τα $\overline{A}_i\overline{B}_j$ ως $\overline{C}_{ij}$, τότε μπορούμε να εκφράσουμε την (7) ως

$$\overline{C}_{ij} = \sum a_{ik}a_{jl}C_{kl}$$

$$\text{ή ως} \quad \overline{C}_{ij} = \sum \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_l}C_{kl} \quad (\text{από την (3) }) \tag{8}$$

Έτσι βλέπουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο με τις συνιστώσες C_{kl} σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων το οποίο μετασχηματίζεται σύμφωνα με το νόμο που δίνεται από την (8), όταν αναφέρεται σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων.

Ένα αντικείμενο προερχόμενο από τρία διανύσματα:

Στη συνέχεια παίρνουμε τρία διανύσματα A_i, B_j και C_k του E_2. Έστω ένα αντικείμενο με συνιστώσες τις

$$A_1B_1C_1, A_1B_1C_2, A_1B_2C_1, A_1B_2C_2,$$

$$A_2B_2C_2, A_2B_1C_2, A_2B_2C_1, A_2B_1C_1$$

σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων.

Εκφράζουμε ως $\bar{A}_i$, $\bar{B}_j$, $\bar{C}_k$ τις συντεταγμένες των A_i, B_j, C_k όταν αναφέρονται σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων. Τότε έχουμε

$$\bar{A}_i = \sum a_{il}A_l,\ \bar{B}_j = \sum a_{jm}B_m \text{ και } \bar{C}_k = \sum a_{kp}C_p \quad l, m, p = 1, 2$$

Επομένως,

$$\bar{A}_i\bar{B}_j\bar{C}_k = \sum a_{ik}a_{jm}a_{kp}A_lB_mC_p \tag{9}$$

Δηλώνουμε τα $\bar{A}_i\bar{B}_j\bar{C}_k$ με $\bar{d}_{ijk}$ και τα $A_lB_mC_p$ με d_{lmp} Τότε η (9) μπορεί να εκφραστεί ως

$$\bar{d}_{ijk} = \sum a_{il}a_{jm}a_{kp}d_{lmp}$$

$$\text{ή ως } \bar{d}_{ijk} = \sum \frac{\partial x_i}{\partial x_l}\frac{\partial x_j}{\partial x_m}\frac{\partial x_k}{\partial x_p}d_{lmp} \tag{10}$$

Έτσι βλέπουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο με συνιστώσες d_{lmp} σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων, οι οποίες μετασχηματίζονται σύμφωνα με το νόμο που δίνεται από την (10), όταν αναφερόμαστε σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων. Παρομοίως, από τη θεώρηση n διανυσμάτων μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο με συνιστώσες $D_{j_1j_2\ldots j_n}$ σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων το οποίο μετασχηματίζεται σύμφωνα με το νόμο

$$\overline{D}_{i_1i_2\ldots i_n} = \sum \frac{\partial \bar{x}_{i_1}}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial \bar{x}_{i_2}}{\partial x_{j_2}}\ldots\frac{\partial \bar{x}_{i_n}}{\partial x_{j_n}}D_{j_1j_2\ldots j_n} \tag{11}$$

όταν αναφέρεται σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων. Από τις (8), (10) και (11) έπεται ότι πέρα από τα διανύσματα υπάρχουν στο E_2 άλλα αντικείμενα, όπως εκείνα με συνιστώσες C_{kl}, d_{lmp}, $D_{j_1j_2\ldots j_n}$ σε ένα προκαθορισμένο σύστημα συντεταγμένων το οποίο μετασχηματίζεται σύμφωνα με τους νόμους που δίνονται από τις (8), (10) και (11) αντίστοιχα, όταν αναφέρονται σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων. Αν και σε πρώτη ματιά αυτοί οι τρεις νόμοι δείχνουν να είναι διαφορετικοί από το νόμο για ένα διάνυσμα, λίγο συλλογισμός αποκαλύπτει την ακόλουθη τυπική ομοιότητα σε όλους τους θεωρούμενους νόμους

(i)Στην περίπτωση ενός διανύσματος z_j, μόνο ένας όρος του τύπου $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j}$ εμφανίζεται σε κάθε όρο του αθροίσματος εκφράζοντας τον αντίστοιχο νόμο,

(ii)Στην περίπτωση ενός αντικειμένου με συνιστώσες C_{kl}, μόνο δύο όροι του τύπου $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_l}$ εμφανίζονται σε κάθε όρο της άθροισης εκφράζοντας τον αντί-

στοιχο νόμο,
(iii) Στην περίπτωση ενός αντικειμένου με συνιστώσες d_{lmp}, μόνο τρεις όροι του τύπου $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_l}\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_m}\frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_p}$ εμφανίζονται σε κάθε όρο της άθροισης εκφράζοντας τον αντίστοιχο νόμο
και
(iv)Στην περίπτωση ενός αντικειμένου με συνιστώσες $D_{j_1 j_2 ... j_n}$,μόνο n όροι του τύπου $\frac{\partial \bar{x}_{i_1}}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial \bar{x}_{i_2}}{\partial x_{j_2}}\cdots\frac{\partial \bar{x}_{i_n}}{\partial x_{j_n}}$ εμφανίζονται σε κάθε όρο της άθροισης εκφράζοντας τον αντίστοιχο νόμο.
Λόγω αυτής της ομοιότητας τύπων, αντικείμενα μαζί με συνιστώσες C_{kl}, d_{lmp}, $...D_{j_1 j_2 ... j_n}$ μπορούν να περιληφθούν κάτω από ένα γενικό όρο ο οποίος μπορεί να διαχωριστεί σε διαφορετικές κλάσεις σύμφωνα με τον αριθμό των δεικτών που εμφανίζονται στις συνιστώσες τους.
Πράγματι, ένας τέτοιος γενικός όρος είναι ο όρος τανυστής και αντικείμενα με συνιστώσες C_{kl}, d_{lmp}, $...D_{j_1 j_2 ... j_n}$, z_j καλούνται τανυστές τάξης 2,3 $...n$ και 1 αντίστοιχα. Με άλλα λόγια, ένας τανυστής του E_2 μπορεί να νοηθεί ως μία γενίκευση του διανύσματος του E_2, η οποία αναφέρεται στον τρόπο μετασχηματισμού
Ένας τανυστής του E_2 είναι έτσι απόρροια της θεώρησης ορθογώνιου μετασχηματισμού των αξόνων συντεταγμένων. Παρόμοια ένας Καρτεσιανός τανυστής του E_n μπορεί να ληφθεί σαν γενίκευση του διανύσματος του E_n.
Αν θεωρήσουμε ένα γενικό χώρο αντί του E_n, τότε ο γενικός τανυστής αυτού του χώρου μπορεί να ληφθεί από τη θεώρηση γενικού μετασχηματισμού του αντίστοιχου χώρου.
Σχετικά με την έννοια του τανυστή μπορούν να υπογραμμιστούν τα ακόλουθα:
(α) Αυτός είναι ένα αντικείμενο του χώρου και εξαρτάται από τη φύση του μετασχηματισμού του συστήματος συντεταγμένων και τη φύση του νόμου σύμφωνα με τον οποίο οι συνιστώσες του σε ένα σύστημα μετασχηματίζονται, όταν αναφέρεται σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων.
(β) Οι συνιστώσες ενός τανυστή μπορούν να επιλεχθούν αυθαίρετα σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Οι συνιστώσες του σε κάθε άλλο σύστημα είναι τότε μοναδικά προσδιορισμένες από τον αντίστοιχο νόμο μετασχηματισμού.
(γ) Οι συνιστώσες που περιγράφουν ένα τανυστή γενικά αλλάζουν με την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων, αλλά η ουσία ενός τανυστή δεν αλλάζει με την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων.
(δ) Ένας τανυστής αναπαριστά ένα μαθηματικό αντικείμενο το οποίο υπάρχει σε ένα σημείο όπως μία δύναμη αναπαριστά ένα φυσικό αντικείμενο το οποίο υπάρχει σε ένα σημείο.

0.3 Τανυστικό Πεδίο και Τανυστικός Λογισμός

Αν ένας τανυστής προσδιορίζεται σε κάθε σημείο του χώρου, λέμε ότι έχουμε ένα τανυστικό πεδίο στο χώρο. Ο Τανυστικός Λογισμός ασχολείται ουσιωδώς με τη μελέτη των τανυστικών πεδίων. Για τον Τανυστικό Λογισμό ο J.A. Schouten έδωσε το όνομα "Λογισμός Ricci ". Τα ονόματα - Γενικός Διαφορικός Λογισμός, Απόλυτος Διαφορικός Λογισμός και Λογισμός Ricci τώρα χρησιμοποιούνται σπανίως. Αυτοί οι όροι έχουν τώρα αντικατασταθεί από τον όρο "Τανυστικός Λογισμός ". Φυσικά και γεωμετρικά γεγονότα έχουν το χαραλτηριστικό του ότι αν και μπορεί να έχουν καθοριστεί από τη χρησιμοποίηση συστημάτων συντεταγμένων τα περιεχόμενά τους είναι ανεξάρτητα από τέτοια συστήματα. Αυτό το χαρακτηριστικό κυριαρχεί επίσης και σε ένα τανυστή, δηλαδή αν και χρησιμοποιούνται συστήματα συντεταγμένων για να περιγράψουν τανυστές, οι ιδιότητές τους είναι ανεξάρτητες από τα συστήματα συντεταγμένων. Για αυτό το λόγο ο Τανυστικός Λογισμός είναι ένα ιδανικό εργαλείο για τη μελέτη γεωμετρικών και φυσικών αντικειμένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Ι.0 Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε την έννοια των συστημάτων διαφόρων τάξεων και θα θεωρήσουμε μερικές συμβάσεις και σύμβολα και μερικά αποτελέσματα στους πίνακες και τις ορίζουσες που θα χρησιμοποιούνται συχνά αργότερα.

Ι.1 Συστήματα διαφόρων τάξεων

Ας θεωρήσουμε δύο ποσότητες. Αυτές μπορούν να δηλωθούν με a_1, a_2 ή με a^1, a^2*. Στην πρώτη περίπτωση θα μπορούν να αναπαρίστανται με το σύμβολο a_i και στη δεύτερη με το a^i, όπου το i παίρνει τιμές 1 και 2. Αν θεωρήσουμε τέσσερις ποσότητες, τότε μπορούν να δηλωθούν με οποιοδήποτε από τους παρακάτω τρόπους:

(1) a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}

(2) a^{11}, a^{22}, a^{12}, a^{21}

(3) a_1^1 , a_2^2, a_2^1, a_1^2

Έτσι αυτές μπορούν να αναπαρασταθούν από τα σύμβολα με δείκτες a_{ij}, a^{ij}, a_j^i αντίστοιχα, όπου κάθε ένας από τους δείκτες παίρνει τις τιμές 1 και 2.
Τις εκφράσεις a_i, a^i, a_{ij}, a^{ij} και a_j^i θα τις καλούμε *συστήματα*. Κάθε ένα από τα a_i και a^i καλείται ένα *απλό σύστημα* ή ένα *σύστημα πρώτης τάξεως* του οποίου τα a_1, a_2 και a^1, a^2 καλούνται οι αντίστοιχες συνιστώσες τους. Κάθε μία από τις εκφράσεις a_{ij}, a^{ij}, a_j^i καλείται ένα *διπλό σύστημα* ή ένα *σύστημα δευτέρας τάξεως* του οποίου οι αντίστοιχες συνιστώσες είναι $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$· $a^{11}, a^{22}, a^{12}, a^{21}$ και $a_1^1, a_2^2, a_2^1, a_1^2$. Με παρόμοιο τρόπο έκφρασης μπορούμε να πάρουμε ένα σύστημα m-στής τάξεως. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο αριθμός των συνιστωσών ενός συστήματος εξαρτάται από την τάξη και από τον αριθμό των τιμών των οποίων οι δείκτες μπορούν να πάρουν. Έτσι αν ο δείκτης ή ο καθένας από τους δείκτες ενός συστήματος μπορούν να πάρουν τιμές 1 και 2, τότε ο αριθμός των συνιστωσών είναι 2, 2^2 ή 2^3 σύμφωνα με το αν είναι πρώτης, δευτέρας ή τρίτης τάξεως. Γενικά, αν οι δείκτες του συστήματος μπορούν να πάρουν τις τιμές 1,2,3...n, τότε ο αριθμός των συνι-

*πρέπει να θυμόμαστε ότι στα a^1 και a^2 δε σημαίνει ότι το a υψώνεται στη δύναμη 1 και 2, αλλά τα 1 και 2 χρησιμοποιούνται για να διαχωρίσουμε τις δύο ποσότητες.

στωσών είναι n, n^2,n^3 κτλ. σύμφωνα με το αν είναι πρώτης, δευτέρας, τρίτης τάξεως κτλ.

Σημείωση 1: Ως ένα σύστημα τάξεως μηδέν, μπορούμε να εννοούμε μία απλή ποσότητα που δεν έχει δείκτες, όπως η α.

Σημείωση 2: Οι πάνω και κάτω δείκτες ενός συστήματος καλούνται και οι δείκτες της *ανταλλοιώτητας* και *συναλλοιώτητας* αντίστοιχα. Έτσι για ένα σύστημα A^i_{jk} ο δείκτης i είναι ο δείκτης της ανταλλοιώτητας και οι δείκτες j, k είναι δείκτες της συναλλοιώτητας. Επομένως, το σύστημα A^{ij} καλείται ένα ανταλλοίωτο σύστημα, το σύστημα A_{ij} καλείται ένα συναλλοίωτο σύστημα και το σύστημα A^i_j καλείται ένα μεικτό σύστημα.

I.2 Σύμβαση Άθροισης

Ας θεωρήσουμε μία άθροιση $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x^i x^k$. Προκειμένου να αποφύγουμε αυτόν τον άκομψο τρόπο έκφρασης χρησιμοποιώντας τα (Σ) μπορούμε να χειριστούμε τη *σύμβαση* που χρησιμοποίησε ο A.Einstein η οποία ονομάστηκε σύμβαση άθροισης του Einstein.

Βουβός δείκτης: Όταν σε μία έκφραση με δείκτες ένας δείκτης εμφανίζεται μια φορά σαν ένας κάτω δείκτης και πάλι σαν ένας άνω δείκτης, τότε ο δείκτης καλείται *βουβός*. Έτσι στην έκφραση $a_i x^i$ ο δείκτης i είναι βουβός και στην έκφραση $a_{ik}x^i x^k$ αμφότεροι οι δείκτες i και k είναι βουβοί.

Ελεύθερος δείκτης: Αν σε μία έκφραση με δείκτες ένας δείκτης δεν είναι βουβός, τότε καλείται *ελεύθερος*. Έτσι στην έκφραση $a_{ik}x^i$ ο δείκτης i είναι βουβός, ενώ ο k είναι ελεύθερος.

Η σύμβαση άθροισης μπορεί τώρα να εκφρασθεί ως εξής: Αν σε μία έκφραση με δείκτες εμφανίζεται ένας βουβός δείκτης τότε η έκφραση πρέπει να θεωρηθεί σαν μία άθροιση και αθροίζεται δίνοντας στο δείκτη όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει. Έτσι η έκφραση $a_i x^i$ στην οποία εμφανίζεται ένας βουβός δείκτης i, θα είναι σύμφωνα με αυτή την έννοια σύμβασης, η άθροιση

$$a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n \tag{1}$$

αν ο δείκτης i μπορεί να πάρει όλες τις τιμές από 1 έως n. Παρομοίως, σύμφωνα με αυτή τη σύμβαση η άθροιση $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x^i x^k$ μπορεί να γραφτεί σαν $a_{ik}x^i x^k$, επειδή σε αυτή την έκφραση εμφανίζονται δύο βουβοί δείκτες i και k.

Σημείωση 1. Σημειώνεται ότι το όνομα βουβός είναι κατά κάποιο τρόπο εκφραστικό κατά λέξη, επειδή ένας τέτοιος δείκτης δεν επηρεάζει την αλλαγή συμβόλων. Έτσι στην άθροιση $a_i x^i$ ο βουβός δείκτης i μπορεί να αντικατασταθεί από ένα άλλο γράμμα k, έτσι $a_i x^i = a_k x^k$. Αυτή η ιδιότητα ενός βουβού δείκτη είναι ανάλογη της ιδιότητας μίας μεταβλητής μίας ολοκλήρωσης ενός ορισμένου ολοκληρώματος, π.χ.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy \tag{2}$$

Σημείωση 2. Επιμένουμε στην υπενθύμιση του ότι αν σε μία έκφραση εμφανίζονται δύο βουβοί δείκτες, τότε αυτοί οι δείκτες δε μπορούν να δηλωθούν με το ίδιο γράμμα. Έτσι στην έκφραση $a_{ij}x^ix^j$ στην οποία i και j είναι δύο βουβοί δείκτες, το ίδιο γράμμα k δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για i και j π.χ. $a_{ij}x^ix^j$ δε μπορεί να γραφεί ως $a_{kk}x^kx^k$. Επιπλέον, αν σε μία έκφραση εμφανίζονται και βουβοί και ελεύθεροι δείκτες, τότε οι βουβοί δείκτες δε μπορούν να δηλωθούν από ένα γράμμα που δηλώνει ελεύθερο δείκτη. Έτσι στην έκφραση $a_{ik}x^k$ ο βουβός δείκτης k δε μπορεί να δηλωθεί από το γράμμα i το οποίο είναι ένας ελεύθερος δείκτης π.χ. το $a_{ik}x^k$ δε μπορεί να γραφεί ως $a_{ii}x^i$.

I.3 Σύμβολα του Kronecker

Σε αυτή την παράγραφο θα θεωρήσουμε ένα ειδικό σύστημα δευτέρου βαθμού (δες I.1) εκφραζόμενο ως $\delta^i_j, i, j = 1, ...n$ το οποίο προσδιορίζεται ως ακολούθως:

$$\left.\begin{aligned} \delta^i_j &= 1 \text{ για } i = j \\ &= 0 \text{ για } i \neq j \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Ένα τέτοιο σύστημα καλείται *σύμβολο του Kronecker*.Καλείται επίσης και δέλτα του Kronecker.
Μπορούμε τώρα να θεωρήσουμε μερικές ιδιότητες αυτού του συστήματος. Αν $x^1, x^2, ...x^n$ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές τότε

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial x^i}{\partial x^j} &= 1 \text{ για } i = j \\ &= 0 \text{ για } i \neq j \end{aligned}\right\}$$

$$\text{Επομένως } \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j \tag{1.2}$$

Ακολουθώντας τη σύμβαση του Einstein παίρνουμε

$$\delta^i_i = \delta^1_1 + \delta^2_2 + ... + \delta^n_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n \tag{1.3}$$

Ακόμα, $\delta^i_j a^j = \delta^i_1 a^1 + \delta^i_2 a^2 + \ldots \delta^i_n a^n$
Επομένως,$\delta^1_j a^j = \delta^1_1 a^1 + \delta^1_2 a^2 + \ldots \delta^1_n a^n = \delta^1_1 a^1 = a^1$
Παρομοίως,$\delta^2_j a_i = a_2, \ldots \delta^n_j = a^n$
Επομένως,$\delta^i_j a^j = a^i$ (1.4)
Παρομοίως, $\delta^i_j a_i = a_j$ (1.5)
Τώρα, $\delta^i_j a_{ik} = \delta^1_j a_{1k} + \delta^2_j a_{2k} + ...\delta^n_j a_{nk}$

Επομένως, $\delta^i_1 a_{ik} = \delta^1_1 a_{1k} + \delta^2_1 a_{2k} + ...\delta^n_1 a_{nk} = \delta^1_1 a_{1k} = a_{1k}$ για κάθε k
Παρομοίως, $\delta^i_2 a_{ik} = a_{2k}, \ldots\ldots \delta^i_n a_{ik} = a_{nk}$ για κάθε k

Επομένως, $\delta^i_j a_{ik} = a_{jk}$ (1.6) Παρομοίως, $\delta^i_j a_{ki} = a_{kj}$ (1.6′) Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι

$$\delta^i_j a^{jk} = a^{ik} \tag{1.7}$$

$$\delta^i_j a^{kj} = a^{ki} \tag{1.7'}$$

Σημείωση1. Οι τύποι (1.4),(1.5),(1.6),(1.6′),(1.7),(1.7′) δείχνουν ότι το σύμβολο δ^i_j μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε ένα δείκτη με κάποιον άλλο. Για παράδειγμα, αν σε μία έκφραση a^{jk} θέλουμε να αντικαταστήσουμε το j με το δείκτη i, τότε έχουμε να πολλαπλασιάσουμε a^{jk} με δ^i_j έτσι ώστε $a^{jk}\delta^i_j = a^{ik}$ (δες 1.7). Για αυτό το λόγο το σύμβολο δ^i_j μερικές φορές καλείται *τελεστής αντικατάστασης*.

Σημείωση 2. Μαζί με το δ^i_j ακολουθούν δύο συστήματα δευτέρας τάξεως που χρησιμοποιούνται μερικές φορές:

$$\delta^{ij} = \delta_{ij} = \delta^i_j \tag{1.8}$$

Έτσι, $\delta_{ij} = 1$ για $i = j$
$= 0$ για $i \neq j$
Ακόμα, $\delta^{ij} = 1$ για $i = j$
$= 0$ για $i \neq j$

Αυτά τα συστήματα καλούνται επίσης και σύμβολα του Kronecker ή δέλτα του Kronecker

Συστήματα-e

Σε αυτή την παράγραφο θα θεωρήσουμε τέσσερα ειδικά συστήματα, δύο από τα οποία είναι δευτέρας τάξεως και δύο από αυτά τρίτης τάξεως. Αναπαριστώνται με e_{ij}, e^{ij} και e_{ijk},e^{ijk} αντίστοιχα. Στις πρώτες δύο περιπτώσεις οι δείκτες παίρνουν τιμές 1 και 2 ενώ στις τελευταίες δύο παίρνουν τιμές 1, 2, 3. Επομένως, ο αριθμός των συνιστωσών σε κάθε μια από τις δύο πρώτες είναι 4 και των επόμενων δύο 27 (δες Ι.1). Τα συστήματα προσδιορίζονται ως ακολούθως:

$$\left.\begin{array}{l} e_{11} = 0, e_{22} = 0, e_{12} = 1, e_{21} = -1 \\ e^{11} = 0, e^{22} = 0, e^{12} = 1, e^{21} = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{r} (1.9) \\ (1.10) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c} e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1 \\ e_{213} = e_{321} = e_{132} = -1 \\ \text{και οι εναπομείνασες 21 συνιστώσες είναι μηδέν} \\ e^{123} = e^{231} = e^{312} = 1 \\ e^{213} = e^{321} = e^{132} = -1 \\ \text{και οι εναπομείνασες 21 συνιστώσες είναι μηδέν} \end{array}\right\} \begin{array}{r} \\ \\ (1.11) \\ \\ (1.12) \\ \\ \end{array}$$

Αυτά τα συστήματα καλούνται συστήματα e δευτέρας και τρίτης τάξεως αντίστοιχα.

Με τέτοιου τύπου συστήματα και το δ του Kronecker , οι αποδείξεις ενός αριθμού ιδιοτήτων των οριζουσών είναι αξιοσημείωτα απλοποιημένες. Είναι επίσης χρήσιμα για σύντομη γραφή διαφορετικών εκφράσεων σημαντικών για τη θεωρία των οριζουσών. Μπορούμε τώρα να επαληθεύσουμε μερικά αποτελέσματα των συστημάτων$-e$ δευτέρας και τρίτης τάξεως.

συστήματα$-e$ δευτέρας τάξεως:

Έστω

$$\left|a^i_j\right| = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix}$$

Τότε $\left|a^i_j\right| = a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1 = e_{12} a^1_1 a^2_2 + e_{21} a^2_1 a^1_2$ ($\because e_{12} = 1$ και $e_{21} = -1$)
$= e_{ij} a^i_1 a^j_2$ (1.13) (από τη σύμβαση άθροισης)

Παρομοίως μπορεί να δειχθεί ότι

$$\left|a^i_j\right| = e^{ij} a^1_i a^2_j \tag{1.14}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την έκφραση $e_{ij} a^i_p a^j_q$, όπου οι δείκτες p και q είναι ελεύθεροι και μπορούν να τους ανατεθούν οι τιμές 1 και 2.
Έχουμε $e_{ij} a^i_1 a^j_2 = e_{12} a^1_1 a^2_2 + e_{21} a^2_1 a^1_2 = e_{12} a^1_1 a^2_2 - e_{12} a^2_1 a^1_2 = e_{12} \left|a^i_j\right|$
Έτσι, $e_{ij} a^i_1 a^j_2 = e_{12} \left|a^i_j\right|$ (1.15)
Παρομοίως, $e_{ij} a^i_2 a^j_1 = e_{21} \left|a^i_j\right|$ (1.16)
Από τις (1.15) και (1.16) μπορούμε να γράψουμε

$$e_{ij} a^i_p a^j_q = e_{pq} \left|a^i_j\right|$$

$$\text{ή} \quad e_{pq} \left|a^i_j\right| = e_{ij} a^i_p a^j_q \tag{1.17}$$

Παρόμοια μπορεί να δειχθεί ότι

$$\left|a^i_j\right| e^{pq} = e^{ij} a^p_i a^q_j \tag{1.18}$$

συστήματα $-e$ τρίτης τάξεως:

$$\text{Αν πάρουμε } \left|a^i_j\right| = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix}$$

τότε μπορεί να δειχθεί ότι όπως στις περιπτώσεις των (1.13),(1.14),(1.17) και

(1.18) λαμβάνονται τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\left|a^i_j\right| = e_{ijk}a^i_1a^j_2a^k_3 \tag{1.19}$$

$$\left|a^i_j\right| = e^{ijk}a^1_ia^2_ja^3_k \tag{1.20}$$

$$\left|a^i_j\right| e_{pqr} = e_{ijk}a^i_pa^j_qa^k_r \tag{1.21}$$

$$\left|a^i_j\right| e^{pqr} = e^{ijk}a^p_ia^q_ja^r_k \tag{1.22}$$

Σημείωση 1. Οι παραπάνω ορισμοί συστημάτων−e δευτέρας και τρίτης τάξεως μπορούν προφανώς να επεκταθούν στον προσδιορισμό συστημάτων−e n−ης τάξεως $e_{i_1i_2\ldots i_n}$ και $e^{i_1i_2\ldots i_n}$ περικλείοντας n δείκτες και αν

$$\left|a^i_j\right| = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^n_1 & a^n_2 & a^n_n \end{vmatrix}$$

τότε τα αποτελέσματα μπορούν να ληφθούν παρόμοια με τις (1.19),(1.20),(1.21) και (1.22).
Σημείωση 2. Το γινόμενο $e^{i_1i_2\ldots i_n}e_{j_1j_2\ldots j_n}$ καλείται γενικευμένο δέλτα του Kronecker και εκφράζεται με το σύμβολο $\delta^{i_1i_2\ldots i_n}_{j_1j_2\ldots j_n}$.

Έτσι τα $e^{ijk}e_{pqr}$ και $e^{ij}e_{pq}$ είναι γενικευμένα δέλτα του Kronecker και εκφράζονται με τα σύμβολα δ^{ijk}_{pqr} και δ^{ij}_{pq} αντίστοιχα.
Μπορεί να δειχθεί ότι όταν οι δείκτες παίρνουν τιμές από 1 έως 3, το δ^{ij}_{pq} έχει τις ακόλουθες τιμές:

1) είναι ίσο με μηδέν όταν $i = j$ ή $p = q$ ή όταν i, j και p, q δεν σχηματίζονται από τους ίδιους αριθμούς.

2) Όταν i, j και p, q σχηματίζονται από τους ίδιους αριθμούς, αυτό είναι $= +1$ ή -1 σύμφωνα με το αν τα ij είναι μία ζυγή μετάθεση ή μία περιττή μετάθεση των pq.

Έτσι $\delta^{11}_{pq} = 0, \delta^{ij}_{22} = 0, \delta^{12}_{23} = 0, \delta^{12}_{12} = 1, \delta^{12}_{21} = -1$ σημειώνεται ότι $e^{ijk}e_{pqk} = \delta^{ij}_{pq}$ και $e^{ijk}e_{pjk} = 2\delta^i_p$

$I.5$ Εφαρμογές στους πίνακες και στις ορίζουσες συστημάτων δευτέρας τάξεως

Είναι γνωστό ότι αν το πεδίο τιμών των δεικτών ενός συστήματος δευτέρας τάξεως είναι από 1 έως n, τότε ο αριθμός των συνιστωσών είναι n^2 (δες I.1). Ένα σύστημα δευτέρας τάξεως μπορεί να είναι τριών τύπων, δηλαδή a^i_j, a_{ij}, και a^{ij}. Από τους πίνακες συστημάτων δευτέρας τάξεως θεωρούμε τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^n_1 & a^n_2 & a^n_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{n1} & a^{n2} & a^{nn} \end{pmatrix},$$

καθένας από τους οποίους είναι ένας $n \times n$ πίνακας.
Θα επαληθεύσουμε τώρα τα ακόλουθα αποτελέσματα σε πίνακες και ορίζουσες

συστημάτων δευτέρας τάξεως. Θα χρησιμοποιούνται συχνά στα επόμενα.

(1) Αν $a^i_j b^j_p = c^i_p$, τότε $(a^i_j)(b^j_p) = (c^i_p)$ και $\left|a^i_j\right|\left|b^j_p\right| = \left|c^i_p\right|$ (1.23)

(2) Αν $a_{ij} b^{ik} = c^k_j$, τότε $(b^{ik})^*(a_{ij}) = (c^k_j)$ και $\left|b^{ik}\right|\left|a_{ij}\right| = \left|c^k_j\right|$ (1.24)
όπου $(b^{ik})^*$ είναι ο ανάστροφος του (b^{ik})

(3) Αν $a^i_k b^p_j c^k_p = d^i_j$, τότε $(a^i_k)(c^k_p)(b^p_j) = (d^i_j)$ και $\left|a^i_k\right|\left|c^k_p\right|\left|b^p_j\right| = \left|d^i_j\right|$ (1.25)

(4) Αν $a^p_i a^q_j b_{pq} = d_{ij}$, τότε $(a^p_i)^*(b_{pq})(a^q_j) = (d_{ij})$
και $\left|a^p_i\right|\left|b_{pq}\right|\left|a^q_j\right| = \left|d_{ij}\right|$ (1.26)

(5) Αν $a^i_p a^j_q b^{pq} = d^{ij}$, τότε $(a^i_p)(b^{pk})(a^j_q)^* = (d^{ij})$
και $\left|a^i_p\right|\left|b^{pq}\right|\left|a^j_q\right| = \left|d^{ij}\right|$ (1.27)

Μπορούμε να αποδείξουμε αυτά τα αποτελέσματα παίρνοντας το πεδίο τιμών των δεικτών από 1 σε 2. Αλλά τα αποτελέσματα ισχύουν, γενικά, όταν οι τιμές κυμαίνονται από 1 έως n.
Περίπτωση (1). Έχουμε $a^i_j b^j_p = a^i_1 b^1_p + a^i_2 b^2_p$ Από εδώ, $c^i_p = a^i_1 b^1_p + a^i_2 b^2_p$ Επομένως,

$$\begin{pmatrix} c^1_1 & c^1_2 \\ c^2_1 & c^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 b^1_1 + a^1_2 b^2_1 & a^1_1 b^1_2 + a^1_2 b^2_2 \\ a^2_1 b^1_1 + a^2_2 b^2_1 & a^2_1 b^1_2 + a^2_2 b^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1_1 & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 \end{pmatrix}$$

Επομένως $(c^i_p) = (a^i_j)(b^j_p)$ Παίρνοντας την ορίζουσα κάθε πλευράς παίρνουμε $\left|c^i_p\right| = \left|a^i_j\right|\left|b^j_p\right|$ ($\because |AB| = |A|\,|B|$, όπου A και B είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες). Αυτό είναι και η απόδειξη της (1.23).
Περίπτωση(2). Έχουμε $a_{ij} b^{ik} = a_{1j} b^{1k} + a_{2j} b^{2k}$. Άρα $c^k_j = a_{1j} b^{1k} + a_{2j} b^{2k}$ Επομένως

$$\begin{pmatrix} c^1_1 & c^1_2 \\ c^2_1 & c^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b^{11} + a_{21} b^{21} & a_{12} b^{11} + a_{22} b^{21} \\ a^{11} b^{12} + a_{21} b^{22} & a_{12} b^{12} + a_{12} b^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ή $(c^k_j) = (b^{ik})^*(a_{ij})$. Παίρνοντας τις ορίζουσες στις δύο πλευρές έχουμε $\left|c^k_j\right| = |(b^{ij})^*|\,|a_{ij}|$ ($\because |A^*| = |A|$) Αυτό είναι και η απόδειξη την (1.24). Τα άλλα τρία αποτελέσματα μπορούν να αποδειχθούν παρομοίως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Βρείτε τον αριθμό των συνιστωσών ενός συστήματος πέμπτης τάξεως στο οποίο κάθε ένας από τους δείκτες παίρνει τιμές από 1 έως 8.
Ο αριθμός των συνιστωσών ενός συστήματος r-ης τάξεως στο οποίο κάθε δείκτης παίρνει τιμές από 1 έως n είναι n^r. Εδώ $n = 8$ και $r = 5$. Επομένως, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 8^5.
2. Προσδιορίστε τον αριθμό των τύπων ενός συστήματος τέταρτης τάξεως. Ένα σύστημα τέταρτης τάξεως περιέχει 4 δείκτες. Αυτοί οι τέσσερις δείκτες μπορούν να εμφανίζονται με τους ακόλουθους τρόπους:

(1) Όλοι τους να είναι άνω

(2) " " " κάτω

(3) ένας από αυτούς να είναι άνω και οι εναπομένοντες τρεις να είναι κάτω

(4) δύο από αυτούς είναι άνω και οι εναπομένοντες δύο είναι κάτω

(5) τρεις από αυτούς είναι άνω και ο εναπομένων ένας κάτω.

Έτσι υπάρχουν πέντε τύποι ενός συστήματος τετάρτης τάξεως,
δηλαδή a_{ijkl},a^{ijkl},a^i_{jkl},a^{ij}_{kl},a^{ijk}_l.
3. Εκφράστε την άθροιση $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk}u^iu^ju^k$ χρησιμοποιώντας τη σύμβαση άθροισης.
Αφού κάθε ένας από τους δείκτες i, j, k εμφανίζεται δύο φορές, μία σαν κάτω δείκτης και μία πάλι σαν άνω δείκτης, η ζητούμενη έκφραση είναι η $a_{ijk}u^iu^ju^k$
4. Γράψτε όλους τους όρους της άθροισης $b_{ij}u^iv^j$ που εκφράζεται στη σύμβαση άθροισης στην οποία κάθε δείκτης παίρνει τιμές από 1 έως 3. Από τη στιγμή που οι δείκτες i και j είναι και οι δύο βουβοί

$$b_{ij}u^iv^j = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} b_{ij}u^iv^j$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(b_{i1}u^iv^1 + b_{i2}u^iv^2 + b_{i3}u^iv^3)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} b_{i1}u^iv^1 + \sum_{i=1}^{3} b_{i2}u^iv^2 + \sum_{i=1}^{3} b_{i3}u^iv^3$$

$$= (b_{11}u^1v^1+b_{21}u^2v^1+b_{31}u^3v^1)+(b_{12}u^1v^2+b_{22}u^2v^2+b_{32}u^3v^2)+(b_{13}u^1v^3+b_{23}u^2v^3+b_{33}u^3v^3)$$

$$= b_{11}u^1v^1+b_{22}u^2v^2+b_{33}u^3v^3+b_{12}u^1v^2+b_{21}u^2v^1+b_{13}u^1v^3+b_{31}u^3v^1+b_{23}u^2v^3+b_{32}u^3v^2$$

5. Εκτιμήσατε το $\delta^i_r\delta^r_j$ στο οποίο οι δείκτες παίρνουν όλες τις τιμές από 1 έως n.
Έχουμε $\delta^i_r\delta^r_j = \delta^i_1\delta^1_j + \delta^i_2\delta^2_j + \cdots + \delta^i_n\delta^n_j$
Έτσι, $\delta^1_r\delta^r_j = \delta^1_1\delta^1_j + \delta^1_2\delta^2_j + \cdots + \delta^1_n\delta^n_j$
$= \delta^1_j + 0 + 0 + \cdots + 0 = \delta^1_j$
Επομένως, $\delta^1_r\delta^r_j = \delta^1_j$ (1) για όλα τα j
Παρομοίως $\delta^2_r\delta^r_j = \delta^2_j$ (2) ”
.....
$\delta^n_r\delta^r_j = \delta^n_j$ (n) ”
Από τις εξισώσεις (1),(2)...(n) έπεται ότι $\delta^i_r\delta^r_j = \delta^i_j$
6. Εκτιμήσατε το $\delta^p_i\delta^q_j a_{pq}$ $(i, j, q, p : 1, 2, ..., n)$
Έχουμε $\delta^p_i\delta^q_j a^p_q = \delta^p_i a_{pj}$ (από την (1.6′))

$= a_{ij}$ (από την (1.6))

7. Εκτιμήσατε το $\delta^i_j\delta^j_l\delta^l_k$, όπου οι δείκτες παίρνουν όλες τις τιμές από 1 έως n.
Έχουμε $\delta^i_j\delta^j_l\delta^l_k = \delta^i_l\delta^l_k$ (από την ασκ.5)
$= \delta^i_k$ (από την ασκ.5)
8. Αν $x^i = a^i_p y^p$ και $z^i = b^i_q x^q$,δείξτε ότι

$$z^i = b^i_p a^p_q y^q$$

Από την $x^i = a^i_p y^p$ έχουμε

$$x^q = a^q_p y^p \tag{1}$$

Από εδώ, $z^i = b^i_q a^q_p y^p$ (από την (1))
$= b^i_p a^p_q y^q$ (αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες q και p από p και q αντίστοιχα).
9. Υπολογίστε το $e_{ij}e^{ik}$, όπου τα e_{ij} και e^{ij} είναι e συστήματα δεύτερης τάξης, αν $i, j = 1, 2$.
Έχουμε $e_{ij}e^{ik} = e_{1j}e^{1k} + e_{2j}e^{2k}$ (1)
Όταν $j = k$, έστω 1, η δεξιά πλευρά της (1) είναι

$$= e_{11}e^{11} + e_{21}e^{21} = 0 + (-1)(-1) = 1(\text{από τις (1.9) και (1.10))}$$

Παρομοίως, όταν $j = k = 2$, η δεξιά πλευρά της (1) είναι ίση με 1
Έτσι, όταν $j = k$, $e_{ij}e^{ik} = 1$ (2)
Επίσης όταν $j \neq k$, πείτε $j = 1, k = 2$ ή $j = 2, k = 1$
η δεύτερη πλευρά της (1) είναι ίση με 0
Έτσι, όταν $j \neq k$, $e_{ij}e^{ik} = 0$ (3)
Από τις (2) και (3) έχουμε $e_{ij}e^{ik} = \delta^k_j$
10. Αν $\alpha_{pq}x^p x^q = 0$ για όλες τις τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών $x^1, x^2, ...x^n$

και τα α_{pq} είναι σταθερές, να δείξετε ότι $\alpha_{ji} + \alpha_{ij} = 0$
Διαφορίζοντας την $\alpha_{pq}x^p x^q = 0 \quad (1)$ ως προς τα x^i παίρνουμε

$$\alpha_{pq}x^p \frac{\partial x^q}{\partial x^i} + \alpha_{pq}x^q \frac{\partial x^p}{\partial x^i} = 0$$

ή

$$\alpha_{pq}x^p \delta_i^q + \alpha_{pq}x^q \delta_i^p = 0 \quad (\text{από την } (1.2\ )\ )$$

ή

$$\alpha_{pi}x^p + \alpha_{iq}x^q = 0....(2) \quad (\text{από την } (1.6) \text{ και } (1.6'\ )\ )$$

Τώρα διαφορίζοντας τη (2) ως προς x^j παίρνουμε

$$\alpha_{pi}\frac{\partial x^p}{\partial x^j} + \alpha_{iq}\frac{\partial x^q}{\partial x^j} = 0$$

ή

$$\alpha_{pi}\delta_j^p + \alpha_{iq}x^q \delta_j^p = 0 \quad (\text{από την } (1.2\ )\ )$$

ή

$$\alpha_{ji} + \alpha_{ij} = 0 \quad (\text{από την } (1.6) \text{ και } (1.6'\ )\ )$$

11. Αν

$$|\alpha_j^i| = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{vmatrix} \text{ και } |b_j^i| = \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{vmatrix}$$

Να δείξετε ότι $|\alpha_j^i||b_m^k| = |c_j^i|$
όπου $\qquad c_m^i = \alpha_p^i b_m^p \qquad (1)$

$$\begin{aligned}
\text{έχουμε} |\alpha_j^i||b_m^k| &= |\alpha_j^i| e_{kms} b_1^k b_2^m b_3^s && ((1.19\ )) \\
&= (e_{kms}|\alpha_j^i|) b_1^k b_2^m b_3^s \\
= (e_{ijt}\alpha_k^i \alpha_m^j \alpha_s^t) b_1^k b_2^m b_3^s & && ((\text{από την } (1.21\ )\ )) \\
&= e_{ijt}(\alpha_k^i b_1^k)(\alpha_m^j b_2^m)(\alpha_s^t b_3^s) \\
&= e_{ijt} c_1^i c_2^j c_3^t && ((\text{από την } (1\ )\ )) \\
&= |c_j^i| && ((\text{από την } (1.19\ )\ ))
\end{aligned}$$

Σημείωση. Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί προταθεί ως ακολούθως:

$$|\alpha_j^i||b_m^k| = |\alpha_p^i b_m^p| \qquad (2)$$

Σημειώνεται ότι η (2) είναι το γνωστό αποτέλεσμα στον πολλαπλασιασμό δύο οριζουσών τρίτης τάξης. Έτσι αυτό το παράδειγμα δίνει μία εύκολη παραγωγή αυτού του γνωστού αποτελέσματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε τον αριθμό των συνιστωσών ενός συστήματος έκτης τάξης στο οποίο κάθε ένας από τους δείκτες παίρνει τιμές από το 1 ως το 7.
2. Προσδιορίστε τον αριθμό των τύπων ενός συστήματος πέμπτης τάξης.
3. Εκφράστε κάθε ένα από τα ακόλουθα αθροίσματα χρησιμοποιώντας τη σύμβαση άθροισης:
$(i) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ijk} u^i v^i \quad (ii) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ijk} u_p^i u_q^j u_r^k$
4. Γράφτε όλους τους όρους σε κάθε ένα από τα ακόλουθα αθροίσματα που εκφράζονται στη σύμβαση άθροισης:

(i) $\alpha_{ijk} u^k$ / $k = 1, 2, ...n$

(ii) $\delta_{ij} u^i u^j$ / $i, j = 1, 2, ...n$

(iii) $T_{ijk} u^i u^j u^k$ / $i, j, k = 1, 2, 3$

5. Υπολογίστε κάθε ένα από τα ακόλουθα: (σύνολο τιμών 1 ως n)

$$(i)\delta_q^p A_p^{st\cdot} \quad (ii)\delta_j^i \delta_l^k A^{jl\cdot} \quad (iii)\alpha^j \alpha_i \delta_j^{i\cdot} \quad (iv)\delta_k^i \delta_l^k \delta_i^l (CalcuttaUn.1984)^{\cdot}$$
$$(v)\delta_j^i \delta_l^j \delta_k^l \delta_i^k \quad (vi)\delta_{ij}\delta^{ij}.$$

6. Αν $x^i = \alpha_p^i y^p$ και $y^i = b_q^i z^q$, να δείξετε ότι

$$x^i = \alpha_q^i b_p^q z^p$$

7. Αν $A = \alpha_p x^p$ για όλες τις τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών $x^1, \ldots, x^n$ και τα α_p είναι σταθερές να δείξετε ότι

$$\frac{\partial(\alpha_p x^p)}{\partial x^j} = \alpha$$

8. Αν $\alpha_{pqr} x^p x^q x^r = 0$ για όλες τις τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών $x^1, x^2, ...x^n$ και τα α_{pqr} είναι σταθερές, να δείξετε ότι

$$\alpha_{kji} + \alpha_{jki} + \alpha_{ikj} + \alpha_{ijk} + \alpha_{kij} + \alpha_{jik} = 0$$

9. Αν α_s^r είναι ένα διπλό σύστημα τέτοιο ώστε $\alpha_m^r \alpha_s^m = \delta_s^r$, να δείξετε ότι

$$|\alpha_s^r| = \pm 1$$

10. Υπολογίστε το $e_{ijk} e^{ijk}$, όπου e_{ijk} και e^{ijk} είναι $e-$συστήματα τρίτης τάξης, αν $i, j, k = 1, 2, 3$

11. Αν το α^i_j είναι ένα διπλό σύστημα το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $\alpha^p_t\alpha^t_q = \delta^p_q$ να δείξετε ότι είτε

$$|\alpha^p_t - \delta^p_t| = 0 \quad \text{ή} \quad |\alpha^p_t + \delta^p_t| = 0$$

(Υπόδειξη

$$\begin{aligned} |\alpha^p_t - \delta^p_t||\alpha^t_q| &= |\alpha^p_t\alpha^t_q - \alpha^t_q\delta^p_t| \\ &= |\delta^p_q - \alpha^p_q| = -|\alpha^p_q - \delta^p_q| \end{aligned} \tag{1}$$

Τώρα $|\alpha^t_q| = +1$ ή -1 από την ασκ.9
Αν $|\alpha^t_q| = 1$, από την (1) έπεται ότι $2|\alpha^p_t - \delta^p_t| = 0$ ή, $|\alpha^p_t - \delta^p_t| = 0$. Αν $|\alpha^t_q| = -1$, παρομοίως παίρνουμε $|\alpha^p_t + \delta^p_t| = 0$)
12. Να δείξετε ότι

$$e_{imn}e^{irs} = \begin{vmatrix} \delta^r_m & \delta^r_n \\ \delta^s_m & \delta^s_n \end{vmatrix}$$

(Υπόδειξη: $e_{imn}e^{irs} = \delta^{rs}_{mn}$ (δες σημείωση 2 του $I.4$))
13. Να δείξετε ότι $e_{imn}e^{irs}\alpha^{mn} = \alpha^{rs} - \alpha^{sr}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. 7^6, 2.6, $3(i)\alpha_{ijk}u^iv^j \cdot (ii)\alpha_{ijk}u^i_pu^j_qu^k_r$
4.$(i)\alpha_{ij1}u^1 + \alpha_{ij2}u^2 + ... + \alpha_{ijn}u^n$
$(ii)(u^1)^2 + (u^2)^2 + ... + (u^n)^2$

$$(iii)T_{111}u^1u^1u^1 + T_{222}u^2u^2u^2 + T_{333}u^3u^3u^3$$

$$\begin{aligned} &+(T_{123} + T_{231} + T_{312} + T_{213} + T_{321} + T_{132})u^1u^2u^3 \\ &+(T_{112} + T_{121} + T_{211})u^1u^1u^2 \\ &+(T_{113} + T_{131} + T_{311})u^1u^1u^3 \\ &+(T_{223} + T_{232} + T_{322})u^2u^2u^3 \\ &+(T_{221} + T_{212} + T_{122})u^2u^2u^1 \\ &+(T_{331} + T_{313} + T_{133})u^3u^3u^1 \\ &+(T_{332} + T_{233} + T_{323})u^3u^3u^2 \end{aligned}$$

5.$(i)A^{st}_q$, $(ii)A^{ik}$, $(iii)\alpha^j\alpha_j$, $(iv)n$, $(v)n$, $(vi)n$
10. 6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΑΝΥΣΤΩΝ ΣΕ $n-$ ΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

ΙΙ.0 Στο κεφάλαιο Ι εισάχθηκε η έννοια συστημάτων διαφόρων τάξεων. Μπορούν να ανακαλεστούν από την Εισαγωγή κάποια συστήματα στον Ευκλείδειο χώρο 2-διαστάσεων που ονομάστηκαν τανυστές μαζί με τους επιτρεπτούς ορθογώνιους μετασχηματισμούς συντεταγμένων του E_2, όταν οι συνιστώσες τους μετασχηματίζονται σύμφωνα με τους καθορισμένους κανόνες στο μετασχηματισμό των συντεταγμένων από το ένα σύστημα συντεταγμένων στο άλλο. Μπορεί ακόμα να ανακαλεστεί το ότι στην Εισαγωγή ήταν επίσης εκφρασμένο το ότι οι τανυστές μπορούν να εισαχθούν παρόμοια σε ένα γενικό χώρο σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς των συντεταγμένων. Αυτή η θέση αναπτύσσεται στο παρόν κεφάλαιο για ένα τύπο χώρου που καλείται $n-$διάστατος χώρος και ορίζουμε συστήματα διάφορων τάξεων σε αυτόν ως τανυστές. Οι συνιστώσες αυτών μετασχηματίζονται σύμφωνα με τους προκαθορισμένους κανόνες του χώρου. Στην πραγματικότητα, σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσουμε την άλγεβρα των τανυστών σε ένα $n-$διάστατο χώρο, ο ορισμός του οποίου δίνεται στην επόμενη παράγραφο.

ΙΙ.1 $n-$**διάστατος χώρος:** ένα διατεταγμένο σύνολο από $n-$ πραγματικούς αριθμούς $x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n$ καλείται μία $n-$άδα πραγματικών αριθμών και εκφράζεται ως $(x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n)$. Το σύνολο όλων των $n-$άδων των πραγματικών αριθμών λέγεται ότι φτιάχνει ένα $n-$διάστατο αριθμητικό συνεχές και κάθε $n-$άδα καλείται σημείο του συνεχούς. Ένα τέτοιο συνεχές μπορεί να δηλωθεί ως S_n. Κάποιες φορές ένας S_n καλείται ένας $n-$διάστατος χώρος, επειδή μπορεί να προικιστεί με τη δομή ενός $n-$διάστατου γραμμικού χώρου. Για να αναπτύξουμε την άλγεβρα τανυστών σε ένα S_n θεωρείται ότι ένα σύστημα συντεταγμένων μπορεί να τεθεί μέσα σε αυτό με ένα προκαθορισμένο τρόπο έκφρασης. Αυτό υπονοεί ότι οι συντεταγμένες $(x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n)$ μπορούν να ανατεθούν σε κάθε σημείο του S_n υπακούοντας σε ένα επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων δίνοντας έτσι μία ένα-προς -ένα αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του S_n και συνόλων όλων των συντεταγμένων σαν του $(x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n)$. Αν $(x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n)$ είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου P, μπορούμε να γράψουμε ότι x^i είναι οι συντεταγμένες του P. Το αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων μπορεί να δηλωθεί ως (x^i).

ΙΙ.2 Μετασχηματισμός συντεταγμένων στον S_n Έστω x^i οι συντεταγμένες ενός σημείου P σύμφωνα με ένα σύστημα συντεταγμένων και $\bar{x}^i$ να είναι οι συντεταγμένες του ίδιου σημείου σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων και

τα δύο συστήματα να συσχετίζονται με τις εξισώσεις

$$\bar{x}^i = \phi^i(x^1, \ldots\ldots x^n), i = 1, 2 \ldots n \tag{2.1}$$

όπου ϕ^i είναι απλές συνεχείς συναρτήσεις των $(x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n)$ και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε επιθυμητού βαθμού και η ορίζουσα να είναι

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\phi^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\phi^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial\phi^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\phi^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\phi^2}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial\phi^n}{\partial x^1} & \frac{\partial\phi^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\phi^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.2}$$

Αυτή η ορίζουσα καλείται Ιακοβιανή του μετασχηματισμού (2.1) και εκφράζεται ως $\frac{\partial\phi^i}{\partial x^i}, \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^i}$ ή, $\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}$. Σαν αποτέλεσμα της (2.2) οι συναρτήσεις ϕ^i είναι ανεξάρτητες και οι εξισώσεις (2.1) μπορούν να λυθούν για τα x^i σαν συναρτήσεις των $\bar{x}^i$ δίνοντας

$$x^i = \psi^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n), \quad i = 1, ...n \tag{2.3}$$

Οι σχέσεις (2.1) και (2.3) καλούνται τύποι μετασχηματισμών συντεταγμένων του S_n. Βοηθούν στον προσδιορισμό συντεταγμένων κάθε σημείου του S_n σε σχέση με ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων, όταν η συνάρτηση που δίνει τη σχέση των συντεταγμένων του ίδιου σημείου σε σχέση με το άλλο σύστημα συντεταγμένων είναι γνωστή. Υπάρχει σχέση μεταξύ των Ιακοβιανών των (2.1) και (2.3), η αληθινή φύση των οποίων βρίσκεται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.1 Αν J και J' είναι οι Ιακοβιανές των μετασχηματισμών (2.1) και (2.3), τότε $JJ' = 1$.

Απόδειξη. Επειδή τα $\bar{x}^i$ είναι ανεξάρτητα και τα x^i είναι επίσης ανεξάρτητες συναρτήσεις των $\bar{x}^i$, από τον τύπο της μερικής διαφόρισης και της σύμβασης άθροισης μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial\bar{x}^j} = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j} \quad p = 1, 2 \ldots n$$

$$\text{ή} \quad \delta^i_j = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}, \qquad (^*)(\text{από την}(1.2))$$

$$\text{Επομένως} \left|\delta^i_j\right| = \left|\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\right| \left|\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}\right| (\text{Από την } (1.23),$$

$$\text{ή}, 1 = \left|\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\right| \left|\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}\right| (\because \left|\delta^i_j = 1\right|)$$

$$\text{ή} \quad 1 = JJ' \quad (J = \left|\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\right| \text{και} J' = \left|\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}\right|)$$

σημείωση 1. Επειδή $JJ' = 1, epib'alletaiJ' \neq 0$

σημείωση 2. Μαζί με την εξίσωση σημειωμένη με αστερίσκο, δηλαδή την $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} = \delta^i_j$ (2.4) υπάρχει μια άλλη παρόμοια εξίσωση $\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j} = \delta^i_j$ (2.5) Και οι δύο αυτές εξισώσεις θα χρησιμοποιούνται συχνά σε αυτό το βιβλίο. Ο αναγνώστης θα το βρει από κει και πέρα χρήσιμο να τις θυμάται. Στην Εισαγωγή, οι τανυστές στον E_2 έχουν ήδη θεωρηθεί σαν γενικεύσεις διανυσμάτων στον E_2. Θα δειχθεί ότι στον S_n επίσης τανυστές και διανύσματα μπορούν να συμπεριφερθούν παρόμοια. Επομένως, ξεκινάμε τη συζήτησή μας με αναλλοίωτα και διανύσματα του S_n.

II.3 Αναλλοίωτα και διανύσματα

(i) Αναλλοίωτα:

Έστω ϕ μία συνάρτηση n συντεταγμένων x^i σε ένα σύστημα (x^i) στο S_n και $\bar{\phi}$ να είναι ο μετασχηματισμός του σε ένα άλλο σύστήμα συντεταγμένων $(\bar{x}^i)$. Τότε το ϕ καλείται αναλλοίωτο του S_n σε σχέση με τους μετασχηματισμούς (2.1) αν $\bar{\phi} = \phi$. (2.6)

Σημείωση. Το αναλλοίωτο καλείται επίσης και *βαθμωτό*.

Έστω ϕ ένα αναλλοίωτο του S_n. Τότε $\bar{\phi}(\bar{x}^1, \ldots \bar{x}^n) = \phi(x^1, \ldots x^n) = \phi[\psi^1(\bar{x}^1, \ldots \bar{x}^n), \ldots \psi^n(\bar{x}^1, \ldots \bar{x}^n)]$(από την (2.3)) (2.7)

Από την (2.7) έχουμε,

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial \phi}{\partial x^j} \qquad (\because \bar{\phi} = \phi) \tag{2.8}$$

Τώρα τα $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ μπορούν να θεωρηθούν ως οι συνιστώσες ενός συστήματος πρώτης τάξεως του τύπου A_i και η εξίσωση (2.8) δείχνει ότι αυτές οι συνιστώσες μετασχηματίζονται σύμφωνα με ένα προκαθορισμένο κανόνα στους μετασχηματισμούς συντεταγμένων από ένα σύστημα (x^i) σε ένα άλλο σύστημα $(\bar{x})^i$. Ο κανόνας που εκφράζεται από τη (2.8) οδηγεί στον προσδιορισμό ενός συναλλοίωτου διανύσματος του S_n.

Συναλλοίωτα διανύσματα:

Έστω A_i ένα σύνολο συναρτήσεων n συντεταγμένων x^i σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων (x^i). Τότε το A_i λέγεται ότι σχηματίζει τις συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος αν αυτές οι συνιστώσες μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα στην αλλαγή συστήματος συντεταγμένων από (x^i) σε ένα άλλο σύστημα $(\bar{x}^i)$:

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} A_j \tag{2.9}$$

Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό οι ποσότητες $\frac{\partial \phi}{\partial x^j}$, που θεωρήθηκαν παραπάνω, σχηματίζουν τις συντεταγμένες ενός συναλλοίωτου διανύσματος.

Αυτό το συναλλοίωτο διάνυσμα καλείται βαθμίδα της ϕ και εκφράζεται ως **grad**ϕ ή, $\nabla\phi$.

Ο τύπος που εκφράζει τις συνιστώσες A_i σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i)

σχετικά με εκείνες του συστήματος συντεταγμένων $(\bar{x}^i)$ λαμβάνεται ως ακολούθως: Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές της (2.9) με $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\bar{A}_i &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}A_j \\ &= \delta^i_j A_j \quad (\text{από την } (2.5\ )\ ) \\ &= A_p \quad (\text{από την } (1.5\ )\ ) \end{aligned}$$

Άρα ο τύπος είναι

$$A_p = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\bar{A}_i \tag{2.10}$$

Σημείωση 1 Από τη στιγμή που ένα σύστημα έχει μόνο κάτω δείκτες καλείται ένα συναλλοίωτο σύστημα διανυσμάτων (δες σημείωση 2 της 1.1) με συνιστώσες A_i, προσδιορισμένες από τη (2.9), που καλούνται συναλλοίωτα διανύσματα.

Σημείωση 2. Θα είναι χρήσιμο για τον αναγνώστη να μνημονεύσει τους κανόνες (2.9) και (2.10) σημειώνοντας το ότι στην τυπική περίπτωση ο ελεύθερος δείκτης συσχετίζεται με τα σύμβολα με παύλα και στις δύο πλευρές ενώ στην τελευταία περίπτωση ο ελεύθερος δείκτης συσχετίζεται με το σύμβολο δίχως παύλα και στις δύο πλευρές.

Στη συνέχεια θεωρούμε τον τύπο μετασχηματισμών (2.1). Από αυτό παίρνουμε

$$d\bar{x}^i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \phi^i}{\partial x^j}dx^j = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}dx^j$$

ή από τη σύμβαση άθροισης

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}dx^j \tag{2.11}$$

Τώρα, τα dx^i μπορούν να θεωρηθούν σαν συνιστώσες ενός συστήματος πρώτης τάξεως του τύπου A^i και η εξίσωση (2.11) δείχνει ότι αυτές οι συνιστώσες μετασχηματίζονται σύμφωνα με ένα δοσμένο κανόνα μετασχηματισμού συντεταγμένων από ένα σύστημα (x^i) σε ένα άλλο $(\bar{x}^i)$. Ο κανόνας που εκφράζεται από τη (2.11) οδηγεί στον ορισμό του ανταλλοίωτου διανύσματος του S_n.

(iii) Ανταλλοίωτα διανύσματα:

Έστω A^i ένα σύνολο από n συναρτήσεις n συντεταγμένων x^i σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων (x^i). Τότε τα A^i λέγεται ότι κατασκευάζουν τις συνιστώσες ενός *ανταλλοίωτου διανύσματος* αν αυτές οι συνιστώσες μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα στην αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων από (x^i) σε ένα άλλο σύστημα $(\bar{x}^i)$:

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}A^j \tag{2.12}$$

Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό οι ποσότητες dx^i, που θεωρούνται παραπάνω, κατασκευάζουν τις *συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου διανύσματος*.
Ο τύπος που εκφράζει τις συνιστώσες A^i σε ένα σύστημα (x^i) σε σχέση με αυτές σε άλλα συστήματα συντεταγμένων $(\bar{x}^i)$ λαμβάνονται ως ακολούθως.
Πολλαπλασιάζοντας κάθε πλευρά της (2.12) με $\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\bar{A}^i &= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}A^j = \delta^p_j A^j && \text{(από την (2.5))} \\ &= A^p && \text{(από την (1.4))} \end{aligned}$$

Επομένως, ο ζητούμενος τύπος είναι

$$A^p = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\bar{A}^i \tag{2.13}$$

Σημείωση 1. Από τη στιγμή που ένα σύστημα έχει μόνο άνω δείκτες καλείται ένα ανταλλοίωτο σύστημα διανυσμάτων (δες σημείωση 2 του I.1) με συνιστώσες A^i, προσδιορισμένες από τη (2.12), που καλούνται ανταλλοίωτα διανύσματα.

Σημείωση 2. Στους κανόνες (2.12) και (2.13) μπορεί να σημειωθεί ότι στην πρώτη περίπτωση ο ελεύθερος δείκτης συσχετίζεται με τα σύμβολα με παύλα και στις δύο πλευρές ενώ στην τελευταία περίπτωση ο ελεύθερος δείκτης συσχετίζεται με το σύμβολο δίχως παύλα και στις δύο πλευρές.

Σημείωση 3.Ορίζουμε το dx^i ως το πρωτότυπο όλων των ανταλλοίωτων διανυσμάτων και το $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$, όπου ϕ είναι ένα αναλλοίωτο, είναι το πρωτότυπο όλων των συναλλοίωτων διανυσμάτων. Οι κανόνες (2.9) και (2.12) παίζουν θεμελιώδεις ρόλους στην τανυστική θεωρία του S_n και θα είναι χρήσιμο να τους θυμόμαστε.

Σημείωση 4. (πολύ σημαντική) Παρατηρούμε ότι στο S_n το συναλλοίωτο ή το ανταλλοίωτο ενός διανύσματος είναι μια ποσότητα η οποία δε μπορεί να δεχθεί μεταβολές (η παράγωγός της δεν ακολουθεί τον κανόνα μετασχηματισμού). Θα δούμε στο κεφάλαιο *III* ότι σε ένα *Riemannian* χώρο μπορούμε να ορίσουμε μεταβολές μεταξύ ξεχωριστών τύπων διανυσμάτων. Αλλά στον S_n είναι αδύνατο. (δείτε επίσης την παράδειγμα 7 αυτού του κεφαλαίου)

Σημείωση 5. Μπορεί να αναρωτηθεί κανείς γιατί να υπάρχει μόνο ένας τύπος διανύσματος στον E_3 και γιατί ένα τέτοιο διάνυσμα λαμβάνεται πάντα με ένα κάτω δείκτη. Ο λόγος είναι ότι εξ αιτίας της ιδιαιτερότητας της δομής ενός E_3, οι δύο τύποι διανυσμάτων συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο κάτω από ορθογώνιους μετασχηματισμούς (δες το λυμένο πρόβλημα 20 στις ασκήσεις του αυτού του κεφαλαίου) για τους οποίους μόνο ένα τύπο διανύσματος χρειάζεται να θεωρήσουμε. Για ευκολία, λαμβάνεται ο τύπος με τον κάτω δείκτη.

Στην αρχή αυτής της παραγράφου ορίστηκε ένα αναλλοίωτο. Τώρα θα δώσουμε ένα παράδειγμα για να δείξουμε την ύπαρξή του.

Παράδειγμα Αν A^i και B_i είναι ένα ανταλλοίωτο και ένα συναλλοίωτο διάνυσμα αντίστοιχα, τότε η άθροιση A^iB_i είναι ένα αναλλοίωτο.

Απόδειξη. Έχουμε $\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j$ (από την 2.12)
και $\bar{B}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} B_k$ (από την (2.9))
Επομένως, $\bar{A}^i \bar{B}_i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} B_k$

$$= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A^j B_k = \delta^k_j A^j B_k = \delta^k_j A^j B_k \quad \text{(από την (2.5))}$$

$$= A^k B_k$$

$$= A^i B_i \quad \text{(αντικαθιστώντας το βουβό δείκτη } k \text{ με } i\text{)}$$

Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη σύμφωνα με την (2.6).
Στην επόμενη παράγραφο θεωρούμε συστήματα τάξεως δύο των τύπων A^{ij} και A_{ij} και ορίζουμε ανταλλοίωτους και συναλλοίωτους τανυστές τάξεως δύο στον S_n.

II.4 Ανταλλοίωτοι και συναλλοίωτοι τανυστές τάξεως δύο

(i) **Ανταλλοίωτοι τανυστές τάξεως δύο:**

Έστω A^{ij} ένα σύνολο από n^2 συναρτήσεις n συντεταγμένων x^i σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων (x^i). Τότε τα A^{ij} λέγεται ότι κατασκευάζουν τις συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή τάξεως δύο αν αυτές οι συνιστώσες μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα στην αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων από (x^i) σε ένα άλλο σύστημα $(\bar{x}^i)$.

$$\bar{A}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} A^{kp} \tag{2.14}$$

Ο τύπος που εκφράζει τις συνιστώσες A^{ij} σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i) σε όρους αυτών σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων $(\bar{x}^i)$ λαμβάνεται ως ακολούθως:

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (2.14) με $\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \bar{A}^{ij} &= \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} A^{kp} \\
&= \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} A^{kp} \\
&= \delta^r_k \delta^s_p A^{kp} && \text{((Από την (2.5)))} \\
&= A^{rs} && \text{(Από τις (1.7) και (1.7′))}
\end{aligned}$$

Επομένως, $A^{rs} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \bar{A}^{ij}$ (2.15)

Παράδειγμα. Αν A^i και B^j είναι δύο ανταλλοίωτα διανύσματα, τότε οι n^2 ποσότητες A^iB^j είναι οι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή τάξεως δύο.

Απόδειξη. Έχουμε $\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} A^k$ και $\bar{B}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} B^p$ Επομένως

$$\bar{A}^i \bar{B}^j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} A^k \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} B^p = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} A^k B^p$$

Γράφοντας $A^kB^p = C^{kp}$ και $\bar{A}^i\bar{B}^j = \bar{C}^{ij}$ η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$\bar{C}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} C^{kp}$$

Επομένως, με χρήση της (2.14) έπεται ότι τα $\bar{C}^{ij}$ ή $\bar{A}^i\bar{B}^j$ είναι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή δευτέρας τάξεως ■

Σημείωση Ένας ανταλλοίωτος τανυστής τάξεως r μπορεί παρόμοια να προσδιοριστεί θεωρώντας ένα σύστημα τάξεως r του τύπου $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}$.

(ii)Συναλλοίωτοι τανυστές τάξεως δύο:

Έστω A_{ij} ένα σύνολο n^2 συναρτήσεων n συντεταγμένων x^i σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων (x^i). Τότε λέμε ότι τα A_{ij} κατασκευάζουν τις συνιστώσες ενός συναλλοίωτου τανυστή τάξεως δύο αν αυτές οι συνιστώσες μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα στην αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων από (x^i) σε ένα άλλο σύστημα $(\bar{x}^i)$:

$$\bar{A}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} A_{kp} \tag{2.16}$$

Σημείωση 1 Η ύπαρξη ενός τέτοιου τανυστή μπορεί να δειχθεί λαμβάνοντας δύο διανύσματα A_i και B_j και προχωρόντας σαν την περίπτωση του παραδείγματος της (i).

Σημείωση 2 Ο τύπος που εκφράζει τις συνιστώσες A_{ij} σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i) σχετικά με εκείνες ενός άλλου συστήματος $(\bar{x}^i)$ είναι ο ακόλουθος:

$$A_{ij} = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} \bar{A}_{rs} \tag{2.17}$$

Σημείωση 3 Ένας συναλλοίωτος τανυστής τάξεως r μπορεί παρόμοια να οριστεί από τη θεώρηση ενός συστήματος τάξεως r του τύπου $A_{i_1 i_2 \ldots i_r}$

II.5 Μικτοί τανυστές τάξεως δύο.

Έστω A^i_j ένα σύνολο n^2 συναρτήσεων n συντεταγμένων x^i σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων (x^i). Τότε λέμε ότι τα A^i_j κατασκευάζουν τις συνιστώσες ενός μικτού τανυστή τάξεως δύο αν αυτές οι συνιστώσες μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα στην αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων από (x^i) σε ένα άλλο σύστημα $(\bar{x}^i)$:

$$\bar{A}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} A^k_p \tag{2.18}$$

Η ύπαρξη ενός τέτοιου τανυστή μπορεί να δειχθεί παίρνοντας ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα A^i και ένα συναλλοίωτο διάνυσμα B_j και προχωρόντας όπως στην περίπτωση του παραδείγματος της (i) της II.4.

Σημείωση 1. Ένας μικτός τανυστής τάξεως δύο ονομάζεται μικτός τανυστής δευτέρας τάξεως, πρώτης τάξης ανταλλοίωτος και πρώτης συναλλοίωτος.

Σημείωση 2. Ο τύπος που εκφράζει τις συνιστώσες A^i_j σε ένα σύστημα (x^j) σε όρους αυτών ενός άλλου συστήματος $(\bar{x}^i)$ είναι ο ακόλουθος:

$$A^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j}\bar{A}^r_s \tag{2.19}$$

II.6 Μικτοί τανυστές τάξεως τρία με ανταλλοίωτο πρώτης τάξεως και συναλλοίωτο δευτέρας τάξεως

Έστω A^i_{jk} ένα σύνολο n^3 συναρτήσεων (δες I.1) n συντεταγμένων x^i σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων (x^i). Τότε λέμε ότι τα A^i_{jk} κατασκευάζουν τις συνιστώσες ενός μικτού τανυστή τρίτης τάξεως με ανταλλοίωτο πρώτης τάξεως και συναλλοίωτο δευτέρας τάξεως, αν αυτές οι συνιστώσες μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα στην αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων από (x^i) σε ένα άλλο σύστημα $(\bar{x}^i)$:

$$\bar{A}^i_{jk} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}A^r_{st} \tag{2.20}$$

Η ύπαρξη ενός τέτοιου τανυστή μπορεί να δειχθεί αν θεωρήσουμε ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα A^i και δύο συναλλοίωτα διανύσματα B_j και C_k και προχωρήσουμε όπως στο παράδειγμα της (i) της παραγράφου $II.4$.
Ο τύπος που εκφράζει τις συνιστώσες A^i_{jk} σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i) σχετικά με ένα σύστημα συντεταγμένων $(\bar{x}^i)$ είναι ο ακόλουθος:

$$A^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j}\frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^k}\bar{A}^r_{st} \tag{2.21}$$

Στην επόμενη παράγραφο θεωρούμε ένα σύστημα τάξεως $(s+p)$ του τύπου $A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ και ορίζουμε μικτούς τανυστές τάξεως $(s+p)$, s τάξεως ανταλλοίωτους και p τάξεως συναλλοίωτους.

II.7Μικτοί τανυστές $(s+p)$-ης τάξεως, s-ης τάξεως ανταλλοίωτοι και $p-$ης τάξεως συναλλοίωτοι

Έστω $A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ ένα σύνολο n^{s+p} συναρτήσεων (δες I.1) n συντεταγμένων x^i σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων (x^i). Τότε λέμε ότι τα $A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ κατασκευάζουν τις συνιστώσες ενός μικτού τανυστή τάξεως $(s+p)$, s τάξεως ανταλλοίωτου και p τάξεως συναλλοίωτου, αν αυτές οι συνιστώσες μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα στην αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων από (x^i) σε ένα άλλο σύστημα $(\bar{x}^i)$:

$$\bar{A}^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{t_1}} \frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{t_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_s}}{\partial x^{t_s}} \frac{\partial x^{q_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \frac{\partial x^{q_2}}{\partial \bar{x}^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{q_p}}{\partial \bar{x}^{j_p}} A^{t_1 t_2 \ldots t_s}_{q_1 q_2 \ldots q_p} \tag{2.22}$$

Σημείωση 1. Ένας τανυστής αυτού του τύπου καλείται μερικές φορές ένας τανυστής του τύπου (s,p).

Σημείωση 2. Σημειώνεται ότι οι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή τάξεως ένα είναι ίδιες με τις συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου διανύσματος που ορίζεται στη II.3 και οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου τανυστή τάξεως ένα είναι ίδιες με τις συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος που ορίζεται στη II.3.

Σημείωση 3. Ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα είναι έτσι ένας τανυστής του τύπου (1,0) και ένα συναλλοίωτο είναι ένας τανυστής του τύπου (0,1).

Σημείωση 4. Μπορούμε κατά σύμβαση να καλούμε μία σταθερά ή ένα βαθμωτό τανυστή τάξεως μηδέν ή του τύπου (0,0).

Σημείωση 5. Διανύσματα και βαθμωτά του S_n είναι ειδικοί τύποι τανυστών του S_n διαχωρισμένοι ο ένας από τον άλλο από τον τύπο συμβόλων τους (s,p).

Σημείωση 6. Οι συνιστώσες ενός τανυστή αλλάζουν κάτω από το μετασχηματισμό συντεταγμένων **αλλά η οντότητα που καλείται τανυστής** δεν αλλάζει κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων.

Σημείωση 7. Σημειώνεται ότι αυτό που προτάθηκε σε σχέση με το συναλλοίωτο ή ανταλλοίωτο ενός διανύσματος του S_n στη σημείωση 4 της (iii) της παραγράφου II.3 αληθεύει επίσης για ένα τανυστή του S_n, αυτό είναι, η διάκριση μεταξύ συναλλοίωτων και ανταλλοίωτων τανυστών στον S_n είναι απόλυτο και δε μπορεί να αλλαχθεί σε καμία περίπτωση.

Σημείωση 8. Για να λάβουμε ένα τανυστή μπορούμε να προχωρήσουμε με τον ακόλουθο τρόπο:

Έστω ότι ζητάμε να λάβουμε ένα τανυστή του τύπου (s,p) στον S_n. Για αυτό ορίζουμε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i) και παίρνουμε ένα σύνολο από n^{s+p} συναρτήσεις $A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ συντεταγμένων x^i των σημείων. Στη συνέχεια ορίζουμε με συμφωνία σε κάθε άλλο σύστημα συντεταγμένων $(\bar{x}^i)$ συναρτήσεις $\bar{A}^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ σύμφωνα με τον τύπο (2.22). Τότε το σύνολο των συναρτήσεων που σχηματίζεται με αυτό τον τρόπο κατασκευάζει ένα τανυστή του τύπου (s,p).

Επεξηγούμε αυτή τη διαδικασία λαμβάνοντας n^2 ποσότητες $A^i_j = \delta^i_j$ σε ένα σύστημα (x^i), όπου $\delta^i_j = 1$ για $i = j$ και $\delta^i_j = 0$ για $i \neq j$. Στη συνέχεια ορίζουμε n^2 ποσότητες $\bar{A}^i_j$ σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα συντεταγμένων $(\bar{x}^i)$ σύμφωνα με τον τύπο (2.18). Τότε

$$\bar{A}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\delta^k_p = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} = \delta^i_j \qquad (2.22(a)) \quad (\text{από την } 2.4)$$

Άρα τα A^i_j είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (1,1). Με άλλα λόγια, δ^i_j είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (1,1).
Επιπλέον, η (2.22(a)) δείχνει ότι το δέλτα του Kronecker είναι ένας τανυστής του τύπου (1,1) έχοντας τις ίδιες συνιστώσες σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων. Ο τανυστής δ^i_j καλείται μερικές φορές *θεμελιώδης μικτός τανυστής*.
Ας θεωρήσουμε τώρα τα άλλα δύο δέλτα του Kronecker , δηλαδή το δ_{ij} και το δ^{ij}. Παίρνουμε τις n^2 ποσότητες $A_{ij} = \delta_{ij}$ σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i).
Στη συνέχεια ορίζουμε n^2 ποσότητες $\bar{A}_{ij}$ σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα συντεταγμένων $(\bar{x}^i)$ σύμφωνα με τον τύπο (2.16). Τότε $\bar{A}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\delta_{kp} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \neq \delta_{ij}$ Αυτό δείχνει ότι το δ_{ij} έχει διαφορετικές συνιστώσες σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων. Το ίδιο αληθεύει και για το δέλτα του Kronecker δ^{ij}. Άρα τα δ_{ij} και δ^{ij} δεν μετασχηματίζονται σύμφωνα με τους κανόνες μετασχηματισμού των συνιστωσών ενός τανυστή στον S_n

II.8 Μηδενικός τανυστής.

Οι συνιστώσες ενός τανυστή μπορεί να είναι όλες μηδέν σε ένα σύστημα συντεταγμένων. Η ερώτηση τώρα που προκύπτει είναι αν σε μία τέτοια περίπτωση οι συνιστώσες είναι επίσης μηδέν σε κάθε άλλο σύστημα συντεταγμένων. Το ακόλουθο θεώρημα δίνει μία καταφατική απάντηση σε αυτό το ερώτημα.

Θεώρημα 2.2 Αν οι συνιστώσες ενός τανυστή είναι όλες μηδέν σε ένα σύστημα συντεταγμένων, τότε είναι επίσης μηδέν σε κάθε άλλο σύστημα συντεταγμένων.

Απόδειξη. Έστω ότι οι συνιστώσες $A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ ενός τανυστή του τύπου (s, p) είναι όλες μηδέν σε ένα σύστημα (x^i). Εκφράζουμε τις συνιστώσες του σε ένα άλλο σύστημα $(\bar{x}^i)$ με $\bar{A}^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$. Τότε από την (2.22) έχουμε

$$\bar{A}^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{t_1}}\frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{t_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_s}}{\partial x^{t_s}}\frac{\partial x^{q_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}\frac{\partial x^{q_2}}{\partial \bar{x}^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{q_p}}{\partial \bar{x}^{j_p}} A^{t_1 t_2 \ldots t_s}_{q_1 q_2 \ldots q_p} \qquad (2.23)$$

Από τη συνθήκη που $A^{t_1 t_2 \ldots t_s}_{q_1 q_2 \ldots q_p} = 0$, προκύπτει από τη (2.23) ότι και $\bar{A}^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p} = 0$■

Αυτό το θεώρημα μας προετοιμάζει να ορίσουμε το μηδενικό τανυστή ως ακολούθως:
Ένας τανυστής του οποίου οι συνιστώσες είναι όλες μηδέν σε κάθε σύστημα συντεταγμένων καλείται μηδενικός τανυστής.
Δύο ακόμα θεωρήματα θα αποδειχθούν στη συνέχεια για την εισαγωγή της έννοιας της άθροισης και αφαίρεσης δύο τανυστών του ίδιου τύπου και του πολλαπλασιασμού ενός τανυστή με ένα βαθμωτό.

Θεώρημα 2.3 Αν $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ και $B^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ οι συνιστώσες δύο τανυστών του τύπου (p,q), τότε $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} + B^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (p,q).

Απόδειξη Έστω $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ και $B^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ οι συνιστώσες δύο τανυστών σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i) και $\bar{A}^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ και $\bar{B}^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ να είναι οι συνιστώσες τους σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων $(\bar{x}^i)$.
Τότε από την (2.23) έχουμε

$$\bar{A}^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} + \bar{B}^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{t_1}} \frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{t_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_\rho}}{\partial x^{t_\rho}} \frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \frac{\partial x^{r_2}}{\partial \bar{x}^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{r_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}} \left(A^{t_1 t_2 \cdots t_p}_{r_1 r_2 \ldots r_q} + B^{t_1 t_2 \ldots t_p}_{r_1 r_2 \cdots r_q} \right) \tag{2.24}$$

Από την (2.24), προκύπτει ότι τα $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} + B^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (p,q) ■

Σημείωση 1 Αυτός ο τανυστής καλείται άθροισμα των τανυστών $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} + B^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ και ο αλγεβρικός τελεστής από τον οποίο λαμβάνεται αυτό καλείται *άθροιση* των τανυστών.

Σημείωση 2 Παρομοίως μπορεί να δειχθεί ότι οι $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} - B^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ είναι οι συνιστώσες ενός άλλου τανυστή του τύπου (p,q).
Αυτός ο τανυστής καλείται η διαφορά των τανυστών που θεωρούνται και ο τελεστής από τον οποίο λαμβάνεται καλείται *αφαίρεση* των τανυστών.

Σημείωση 3 Δηλώνεται ότι οι παραπάνω δύο δράσεις συσχετίζουν τους τανυστές στο ίδιο σημείο.

Θεώρημα 2.4 Αν $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (p,q) και ϕ είναι ένα βαθμωτό, τότε $\phi A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ είναι οι συνιστώσες ενός άλλου τανυστή του τύπου (p,q).

Απόδειξη Έστω $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ οι συνιστώσες του τανυστή σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i) και $\bar{A}^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ οι συνιστώσες του σε ένα άλλο συστήμα $(\bar{x}^i)$. Εκφράζουμε το βαθμωτό με ϕ και $\bar{\phi}$ στο σύστημα (x^i) και $(\bar{x}^i)$ αντίστοιχα.

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}\bar{A}^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} &= \bar{\phi}\frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{t_1}}\frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{t_2}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{t_p}}\frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}\frac{\partial x^{r_2}}{\partial \bar{x}^{j_2}}\cdots\frac{\partial x^{r_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}}A^{t_1 t_2 \cdots t_s}_{r_1 r_2 \cdots r_q} \quad (\text{από την } (2.22)) \\
&= \phi\frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{t_1}}\frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{t_2}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{i_s}}{\partial x^{t_s}}\frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}\frac{\partial x^{r_2}}{\partial \bar{x}^{j_2}}\cdots\frac{\partial x^{r_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}}A^{t_1 t_2 \cdots t_s}_{r_1 r_2 \cdots r_q} \\
&\qquad (\because \bar{\phi} = \phi \text{ από την } (2.6)) \\
&= \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{t_1}}\frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{t_2}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{t_p}}\frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}\frac{\partial x^{r_2}}{\partial \bar{x}^{j_2}}\cdots\frac{\partial x^{r_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}}\phi A^{t_1 t_2 \cdots t_p}_{r_1 r_2 \ldots r_q} \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Από την (2.25), έπεται ότι οι $\phi A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (p, q) ■

Σημείωση 1 Αυτός ο τανυστής καλείται το γινόμενο του τανυστή και του βαθμωτού που θεωρούνται και ο αλγεβρικός τελεστής από τον οποίο λαμβάνεται καλείται πολλαπλασιασμός του τανυστή με βαθμωτό.

Σημείωση 2 Σημειώνεται ότι η παραπάνω πράξη σχετίζει ένα τανυστή και ένα βαθμωτό στο ίδιο σημείο.

Είμαστε τώρα στη θέση να εισάγουμε την έννοια της ισότητας δύο τανυστών του ίδιου τύπου.

II.9 Ισότητα δύο τανυστών του ίδιου τύπου

Δύο τανυστές του ίδιου τύπου λέγεται ότι είναι ίσοι στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων αν οι συνιστώσες τους σε αυτό το σύστημα είναι ίσες μία προς μία.

Έτσι αν $A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ και $B^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ είναι οι συνιστώσες δύο ίσων τανυστών στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, τότε έχουμε

$$A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p} = B^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$$

Αν δύο τανυστές είναι ίσοι σε ένα σύστημα συντεταγμένων, προκύπτει το ερώτημα αν είναι επίσης ίσοι σε κάθε άλλο σύστημα συντεταγμένων. Το επόμενο θεώρημα απαντά σε αυτό το ερώτημα.

Θεώρημα 2.5 Αν δύο τανυστές είναι ίσοι σε ένα σύστημα συντεταγμένων τότε είναι επίσης ίσοι σε κάθε άλλο σύστημα συντεταγμένων.

Απόδειξη Έστω $A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ και $B^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ οι συνιστώσες δύο ίσων τανυστών σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i). Τότε $A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p} = B^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$.

Επομένως, $A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p} - B^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ είναι οι συνιστώσες ενός μηδενικού τανυστή (από τη σημείωση 2 του θεωρήματος (2.3) σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i).

Επομένως από το θεώρημα 2.2, η διαφορά δύο θεωρούμενων τανυστών πρέπει

να είναι ένας μηδενικός τανυστής σε κάθε άλλο σύστημα συντεταγμένων. Αυτό σημαίνει ότι οι τανυστές είναι ίσοι σε κάθε άλλο σύστημα συντεταγμένων.■
Με τη χρήση αυτού του θεωρήματος μπορούμε να ορίσουμε την ισότητα δύο τανυστών του ίδιου τύπου ως ακολούθως:
Δύο τανυστές του ίδιου τύπου λέμε ότι είναι ίσοι αν οι συνιστώσες τους είναι ίσες μία προς μία σε κάθε σύστημα συντεταγμένων.
Η διάταξη των δεικτών σε ένα τανυστή είναι σημαντική. Για παράδειγμα, θεωρήστε τους τανυστές A^{ij} και A^{ji}. Τότε από τη σημείωση 2 του θεωρήματος (2.3) $A^{ij} - A^{ji}$ είναι επίσης ένας τανυστής. Αλλά αυτό δεν είναι γενικά ένας μηδενικός τανυστής. Άρα οι τανυστές A^{ij} και A^{ji} δεν είναι , γενικά, ίσοι. Περιπτώσεις όπου $A^{ij} = A^{ji}$ ή $A^{ij} = -A^{ji}$ είναι σημαντικές. Αυτές οι περιπτώσεις οδηγούν σε δύο σημαντικούς τύπους τανυστών οι οποίοι ορίζονται στην επόμενη παράγραφο.

II.10 Συμμετρικοί και αντι-συμμετρικοί τανυστές

Συμμετρικοί τανυστές:
Αν σε ένα σύστημα συντεταγμένων δύο ανταλλοίωτοι ή συναλλοίωτοι δείκτες ενός τανυστή μπορούν να εναλλαχθούν χωρίς να αλλάξει ο τανυστής, τότε λέγεται συμμετρικός σύμφωνα με αυτούς τους δείκτες σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων.
Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει ότι αυτή η ιδιότητα της συμμετρίας σε σχέση με δύο ανταλλοίωτους ή συναλλοίωτους δείκτες είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων.
Θεώρημα 2.6 Αν ένας τανυστής είναι συμμετρικός σύμφωνα με δύο ανταλλοίωτους ή συναλλοίωτους δείκτες σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων, τότε παραμένει συμμετρικός σύμφωνα με αυτούς του δείκτες σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα συντεταγμένων.
Απόδειξη Ας θεωρήσουμε πρώτα έναν ανταλλοίωτο τανυστή του τύπου $(p, 0)$ του οποίου οι συνιστώσες είναι $A^{i_1 i_2 \dots i_p}$ σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i) και $\bar{A}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων $(\bar{x}^i)$. Ας υποθέσουμε ότι ο τανυστής είναι συμμετρικός ως προς τους δείκτες i_r και i_s στο σύστημα (x^i).
Τότε $A^{i_1 \dots i_r, \dots i_s, \dots i_p} = A^{i_1 \dots i_s, \dots i_r, \dots i_p}$ (2.26)
Τώρα,

$$\bar{A}^{i_1, i_2 \dots i_r, \dots i_s, \dots i_p} =$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{j_r}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_s}}{\partial x^{j_s}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{j_p}} A^{j_1, j_2 \dots j_r, \dots j_s, \dots j_p} \qquad \text{(από την (2.22))}$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_s}}{\partial x^{j_s}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{j_r}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{j_p}} A^{j_1, j_2 \dots j_s, \dots j_r, \dots j_p} \qquad \text{(από την (2.26))}$$

$$= \bar{A}^{i_1, i_2 \dots i_s, \dots i_r, \dots i_p}$$

Αυτό δείχνει ότι η συμμετρία σύμφωνα με τα i_r και i_s παραμένει επίσης και στο σύστημα $(\bar{x}^i)$. Παρόμοιο αποτέλεσμα μπορεί να ληφθεί θεωρώντας την περίπτωση ενός συναλλοίωτου τανυστή ή ενός μικτού τανυστή.■

Με χρήση αυτού του θεωρήματος ένας συμμετρικός τανυστής μπορεί να ορισθεί ως ακολούθως:

Ορισμός ενός συμμετρικού τανυστή:

Αν κάθε ζευγάρι ανταλλοίωτων ή συναλλοίωτων δεικτών ενός τανυστή μπορεί να εναλλαγεί δίχως να αλλάξει ο τανυστής, τότε λέγεται ότι είναι *συμμετρικός για κάθε ζεύγος* τέτοιων δεικτών ή απλώς *συμμετρικός*.

Σημείωση. Σημειώνεται ότι η συμμετρία δε μπορεί γενικά να οριστεί για ένα τανυστή σε σχέση με δύο δείκτες εκ των οποίων ο ένας είναι ανταλλοίωτος και ο άλλος είναι συναλλοίωτος. Μία εξαιρετική περίπτωση προβλέπεται, όμως από τον τανυστή δ^i_j ο οποίος έχει την ενδιαφέρουσα ιδιότητα του ότι είναι συμμετρικός στα i και j και αυτή η συμμετρία διατηρείται κάτω από ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Το ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει μπορεί να δειχθεί ως ακολούθως:

Έχουμε $\delta^i_j = \delta^j_i$ (2.27)

Επομένως, $\bar{\delta}^i_j = \bar{\delta}^j_i$ (2.28)

$(\because \delta^i_j = \bar{\delta}^i_j)$

Η ενδιαφέρουσα ιδιότητα που αναφέρθηκε παραπάνω είναι μία συνέπεια των (2.27) και (2.28).

(ii) **Αντισυμμετρικοί τανυστές**

Αν από την εναλλαγή δύο ανταλλοίωτων ή συναλλοίωτων δεικτών ενός τανυστή σε ένα σύστημα συντεταγμένων κάθε μία από τις συνιστώσες του αλλάζουν στο πρόσημο, αλλά όχι στο μέτρο, τότε ο τανυστής λέγεται ότι είναι αντισυμμετρικός σε σχέση με αυτούς τους δείκτες σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων.

Μπορεί να δειχθεί, όπως στην περίπτωση του Θεωρήματος 2.6, ότι αν ένας τανυστής είναι αντισυμμετρικός σε σχέση με δύο ανταλλοίωτους ή συναλλοίωτους δείκτες σε ένα σύστημα συντεταγμένων, τότε παραμένει αντισυμμετρικός σε σχέση με αυτούς του δείκτες σε κάθε άλλο σύστημα συντεταγμένων.

Σε σχέση με αυτή την ιδιότητα ένας αντισυμμετρικός τανυστής μπορεί να ορισθεί ως ακολούθως:

Ορισμός ενός αντισυμμετρικού τανυστή:

Αν από την εναλλαγή κάθε ζεύγους ανταλλοίωτων ή συναλλοίωτων δεικτών ενός τανυστή, κάθε μια από τις συνιστώσες αλλάζει στο πρόσημο, αλλά όχι στο μέγεθος, τότε ο τανυστής λέγεται ότι είναι αντισυμμετρικός σε κάθε ζεύγος τέτοιων δεικτών ή απλώς αντισυμμετρικός.

Σημείωση. Σημειώνεται ότι η αντι-συμμετρία δε μπορεί να ορισθεί για ένα τανυστή σε σχέση με δύο δείκτες εκ των οποίων ο ένας είναι ανταλλοίωτος και ο άλλος είναι συναλλοίωτος. Η σημασία των δύο τύπων τανυστών που ορίζονται σε αυτή την παράγραφο οφείλεται

στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.7 Οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου $(0,2)$ μπορεί να εκφραστεί με άθροιση ενός συμμετρικού τανυστή και ενός αντισυμμετρικού τανυστή του ίδιου τύπου.

Απόδειξη Έστω a_{ij} οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (0,2). Μπορούμε να εκφράσουμε τις a_{ij} ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \\ &= A_{ij} + B_{ij} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Επειδή ο a_{ij} είναι ένας τανυστής του τύπου (0,2), a_{ji} είναι επίσης ένας τανυστής του τύπου (0,2). Επομένως, από το Θεώρημα 2.3 και τη Σημείωσή 2, και ο A_{ij} και ο B_{ij} είναι τανυστές του τύπου (0,2). Επειδή $A_{ij} = A_{ji}$ και $B_{ij} = -B_{ji}$, ο τανυστής A_{ij} είναι συμμετρικός και ο τανυστής B_{ij} είναι αντι-συμμετρικός. Η απόδειξη του θεωρήματος έχει έτσι ολοκληρωθεί με χρήση της (2.29) ■

Σημείωση Αυτό το θεώρημα ισχύει επίσης για ένα τανυστή του τύπου (2,0)

II.11 Εξωτερικό γινόμενο και συστολή

Στην II.8 (δες Θεωρήματα 2.3 και 2.4) θεωρήσαμε τρεις τύπους αλγεβρικών τελεστών στους τανυστές, δηλαδή πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό με ένα βαθμωτό. Οι δύο πρώτοι από αυτούς τους τελεστές δρουν σε δύο τανυστές του τύπου (p,q) και παράγουν πάλι ένα τανυστή του τύπου (p,q) και η τρίτη από αυτούς πράξη σε ένα τανυστή του τύπου (p,q) παράγει πάλι ένα τανυστή του ίδιου τύπου. Έτσι η τάξη του τανυστή που παράγεται από κάθε μια από αυτές τις δράσεις είναι ίδια όπως του τανυστή ή των τανυστών στους οποίους η πράξη εκτελείται. Είναι επομένως φυσικό να εξετάσουμε αν υπάρχει μία αλγεβρική πράξη η οποία μπορεί να παράγει ένα τανυστή ανώτερης ή κατώτερης τάξης. Δύο θεωρήματα δίνονται σε αυτή την παράγραφο για να δειχθεί ότι η απάντηση σε αυτή την ερώτηση είναι καταφατική.

Πριν προταθεί το πρώτο θεώρημα αποδεικνύουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:
Αν A^i_{jk} και B^m_n είναι δύο τανυστές του τύπου (1,2) και (1,1) αντίστοιχα τότε οι ποσότητες $A^i_{jk}B^m_n$ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (2,3).

Απόδειξη. Έχουμε $\bar{A}^i_{jk} = \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\dfrac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\dfrac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}A^r_{st}$ (από την (2.20))

και $\bar{B}^m_n = \dfrac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^u}\dfrac{\partial x^v}{\partial \bar{x}^n}B^u_v$ (από την (2.18))

$$\begin{aligned} \text{Επομένως,} \bar{A}^i_{jk}\bar{B}^m_n &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}A^r_{st}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^u}\frac{\partial x^v}{\partial \bar{x}^n}B^u_v \\ &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^u}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^v}{\partial \bar{x}^n}A^r_{st}B^u_v \end{aligned} \tag{2.30}$$

Από τη (2.30) έπεται ότι τα $\bar{A}^i_{jk}\bar{B}^m_n$ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή τύπου (2,3) ■

Ο τανυστής $A^i_{jk}B^m_n$ καλείται το εξωτερικό γινόμενο των τανυστών A^i_{jk} και B^m_n και η τάξη του είναι υψηλότερη από κάθε ένα από τους τανυστές από τον οποίο λαμβάνεται και η πράξη που λαμβάνεται από αυτό τον τανυστή καλείται *εξωτερικό γινόμενο* (outer product) .

Αυτό το αποτέλεσμα είναι μία ειδική περίπτωση του ακόλουθου θεωρήματος:

Θεώρημα 2.8 Αν $A^{t_1\ldots t_p}_{j_1\ldots j_q}$ και $B^{k_1\ldots k_r}_{t_1\ldots t_s}$ είναι οι συνιστώσες δύο τανυστών του τύπου (p,q) και (r,s) αντίστοιχα (r και s δεν είναι και τα δύο μηδέν), τότε οι ποσότητες $A^{t_1\ldots t_p}_{j_1\ldots j_q}B^{k_1\ldots k_r}_{t_1\ldots t_s}$ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου $(p+r,q+s)$.

Η απόδειξη μπορεί να ολοκληρωθεί χρησιμοποιώντας τη (2.22) και προχωρώντας ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση του παραπάνω αποτελέσματος.

Σημείωση Σημειώνεται ότι η πράξη του εξωτερικού γινομένου αναφέρεται σε τανυστές οποιονδήποτε δύο τύπων (ο τύπος (0,0) εξαιρείται) στο ίδιο σημείο.

Αυτή η πράξη είναι πολύ χρήσιμη επειδή ξεκινώντας με έναν αριθμό διανυσμάτων A^i, B^k, C_l, D_m κάποιους ανταλλοίωτους, άλλους συναλλοίωτους, και πολλαπλασιάζοντάς τους μπορούμε να κατασκευάσουμε τανυστές ανώτερης τάξης, όπως

$$T^{ik}_{lm} = A^iB^kC_lD_m$$

Αυτό μας εφοδιάζει με μια εύκολη μέθοδο κατασκευής τανυστών ανώτερης τάξης ανταλλοίωτους ή συναλλοίωτους.

Πριν προταθεί το δεύτερο θεώρημα αποδεικνύουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Αν A^{ij}_{klm} είναι ένας μικτός τανυστής του τύπου (2,3), τότε οι ποσότητες A^{ij}_{klm} που λαμβάνονται αντικαθιστώντας τον κάτω δείκτη l με τον άνω δείκτη i και παίρνοντας την άθροιση για όλα τα i, είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (1,2).

Απόδειξη. Έχουμε $\bar{A}^{ij}_{klm} = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^m}A^{pq}_{rst}$ (από την (2.22))

$$\begin{aligned}
\text{Επομένως,}\quad \bar{A}^{ij}_{kim} &= \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^m}A^{pq}_{rst}\\
&= \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^m}A^{pq}_{rst}\\
&= \delta^s_p\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^m}A^{pq}_{rst} \qquad \text{(από την 2.5)}\\
&= \frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^m}A^{pq}_{rpt}
\end{aligned}$$

Αν εκφράσουμε τα A^{pq}_{rpt} ως B^q_{rt} και τα $\bar{A}^{ij}_{kim}$ ως $\bar{B}^j_{km}$, τότε η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$\bar{B}^j_{km} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^m}B^q_{rt} \tag{2.31}$$

Από τη (2.31) έπεται ότι B^j_{km} είναι ένας τανυστής του τύπου (1,2) για παράδειγμα A^{ij}_{kim} είναι ένας τανυστής του τύπου (1,2) ■

Ο τανυστής A^{ij}_{kim} καλείται *τανυστής συστολής* ενός δοσμένου τανυστή και η πράξη από την οποία λαμβάνεται καλείται *συστολή*. Η τάξη αυτού του τανυστή είναι μικρότερη από του τανυστή από τον οποίο λαμβάνεται.

Αυτό το αποτέλεσμα είναι ειδική περίπτωση του ακόλουθου θεωρήματος:

Θεώρημα 2.9 Αν $A^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (p,q), $p \neq 0, q \neq 0$, τότε οι ποσότητες που λαμβάνονται από την αντικατάσταση οποιουδήποτε άνω δείκτη i_m και οποιουδήποτε κάτω δείκτη j_n από τον ίδιο δείκτη i_m κάνοντας άθροιση για όλα τα i_m, είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου $(p-1, q-1)$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του παραπάνω αποτελέσματος.

Σημείωση 1. Σημειώνεται ότι η συστολή πρόκειται να συμβεί με την παρουσία ενός άνω και ενός κάτω δείκτη και όχι από δύο δείκτες του ίδιου τύπου.

Σημείωση 2. Η συστολή ενός ζευγαριού δεικτών ενός τανυστή (p,q) δίδει ένα τανυστή του τύπου $(p-1,q-1)$. Συγκεκριμένα, η συστολή ενός ζεύγους δεικτών ενός τανυστή του τύπου (1,1) δίνει ένα τανυστή του τύπου (0,0), δηλάδη έναν αναλλοίωτο. Πραγματικά, αν θεωρήσουμε ένα τανυστή A^i_j, τότε από τη (2.18) έχουμε $\bar{A}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r}A^k_p$

Άρα $\bar{A}^i_i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}A^k_p = \delta^p_k A^k_p$ (από την 2.5)

$$A^k_k = A^i_i$$

Επομένως ο συστελλόμενος τανυστής είναι αναλλοίωτος.

Σημείωση 3. Η συστολή m ζευγαριών δεικτών ενός τανυστή του τύπου (p,q) δίδει ένα τανυστή του τύπου $(p-m, q-m)$, του οποίου η τάξη είναι μικρότερη του αρχικού τανυστή κατά $2m$. Έτσι η συστολή μπορεί να μειώσει την τάξη ενός τανυστή κατά άρτιο αριθμό μόνο.

Σημείωση 4. Κάθε μία από τις αλγεβρικές πράξεις στον τανυστή ή στους τανυστές, δηλαδή (1) Πρόσθεσης (2) Αφαίρεσης (3) βαθμωτού γινομένου (4) εξωτερικού γινομένου και (5) συστολής παράγει πάλι ένα τανυστή. Αυτές οι πράξεις συνιστούν αυτό που καλείται Άλγεβρα Τανυστών στον S_n.

Υπενθυμίζεται ότι αυτές οι πράξεις αφορούν μόνο τανυστές στο ίδιο σημείο.

II.12 Εσωτερικό γινόμενο

Υπάρχει άλλη μία πράξη στους τανυστές που καλείται εσωτερικός γινόμενο. Δεν είναι μία νέα πράξη, αλλά είναι πραγματικά μία σύνδεση εξωτερικού γινομένου και συστολής. Αν ένα εξωτερικό γινόμενο δύο τανυστών συσταλεί σύμφωνα με ένα άνω δείκτη ενός παράγοντα και ένα κάτω δείκτη ενός άλλου, τότε ένας τανυστής λαμβάνεται, ο οποίος καλείται **εσωτερικό γινόμενο** δύο τανυστών.

Έτσι το εξωτερικό γινόμενο A_iB^{jk} των τανυστών A_i και B^{jk}, όταν συστέλλεται για δείκτες i και j, παράγει τον τανυστή A_iB^{ik}, ο οποίος είναι του τύπου (1,0). Αυτός ο τανυστής είναι ένα εσωτερικό γινόμενο των τανυστών A_i και B^{jk}. Ένα άλλο εσωτερικό γινόμενο A_iB^{ji} μπορεί να ληφθεί συστέλλοντας τους δείκτες i και k στο γινόμενο A_iB^{jk}.
Το εξωτερικό γινόμενο A_iB^j των διανυσμάτων A_i και B^j, όταν συστέλλονται για τους δείκτες i και j, παράγει ένα τανυστή A_iB^i του τύπου (0,0), δηλαδή ένα βαθμωτό. Το εσωτερικό γινόμενο καλείται *βαθμωτό γινόμενο* των διανυσμάτων A_i και B^j, επειδή είναι ένα βαθμωτό. Σημειώνεται ότι στον S_n, το βαθμωτό γινόμενο δύο διανυσμάτων ορίζεται για δύο διανύσματα αντίθετης μορφής.

II.13 Νόμος πηλίκου δύο τανυστών

Από τις παραγράφους II.11 και II.12 είναι γνωστό ότι το γινόμενο δύο τανυστών είναι πάλι τανυστής. Τώρα θέτουμε το εξής ερώτημα:
Αν είναι γνωστό ότι το γινόμενο ενός συστήματος ποσοτήτων και ενός τανυστή δίνει πάντα ένα τανυστή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το σύστημα των ποσοτήτων κατασκευάσουν τις συνιστώσες ενός τανυστή ;
Υπάρχει ένα κριτήριο από το οποίο μία καταφατική απάντηση μπορεί να ληφθεί. Αυτό το κριτήριο καλείται νόμος πηλίκου και παίζει σημαντικό ρόλο στην Τανυστική Ανάλυση και τις εφαρμογές της.
Το όνομα του νόμου πηλίκου είναι σίγουρα κατάλληλο επειδή η εφαρμογή αυτού του νόμου παράγει ένα τανυστή από δύο τανυστές όπως η δράση διαίρεσης των δύο αριθμών παράγει έναν αριθμό, δηλαδή το πηλίκο.
Πρώτα θα εκφράσουμε και θα αποδείξουμε αυτό το νόμο για τανυστές τάξης 1 και 2 και στη συνέχεια θα δώσουμε το ίδιο για τη γενική του μορφή.
(i) **Ο νόμος πηλίκου για την περίπτωση τανυστών του τύπου (0,1):**
Αν σχετικά με κάθε σύστημα συντεταγμένων υπάρχει ένα σύνολο συναρτήσεων $B_i(i = 1, ...n)$ έτσι ώστε A^iB_i να είναι ένα αναλλοίωτο για κάθε τανυστή A^i του τύπου (1,0), τότε B_i θα κατασκευάζουν τις συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (0,1).
Απόδειξη Σύμφωνα με τη δοσμένη συνθήκη, για οποιαδήποτε δύο συστήματα συντεταγμένων (x^i) και $(\bar{x}^i)$ έχουμε

$$\bar{A}^i\bar{B}_i = A^iB_i \tag{2.32}$$

Από την (2.13) έχουμε $A^i = \bar{A}^p\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}$, η σχέση (2.32) μπορεί να γραφεί ως $\bar{A}^i\bar{B}_i = \bar{A}^p\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}B_i = \bar{A}^i\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}B_p$ (αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες p και i από i και p αντίστοιχα).

$$\text{Επομένως,}(\bar{B}_i - B_p\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i})\bar{A}^i = 0 \qquad (2.32\ \alpha)$$

Επειδή που η ισότητα $(2.32a)$ πρέπει να ισχύει για κάθε $\bar{A}^i$, έπεται ότι

$$\bar{B}_i - B_p\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} = 0$$
$$\text{ή} \quad \bar{B}_i = B_p\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \qquad (2.33)$$

Από τη (2.33) έπεται ότι τα B_i είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου τανυστή, δηλαδή ενός τανυστή του τύπου (0,1)■

(ii) **Ο νόμος πηλίκου για την περίπτωση τανυστών του τύπου (1,0):** Αν σε σχέση με κάθε σύστημα συντεταγμένων υπάρχει ένα σύνολο συναρτήσεων $A^i(i = 1, ...n)$ όπου τα A^iB_i είναι ένα αναλλοίωτο για ένα τανυστή B_i του τύπου (0,1), τότε τα A^i θα κατασκευάζουν τις συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (1,0).

Απόδειξη. Παρομοίως με την περίπτωση (i).

Τώρα θεωρούμε τανυστές τάξης 2.

(iii) **Ο νόμος πηλίκου για την περίπτωση τανυστών του τύπου (0,2):** Αν σχετικά με κάθε σύστημα συντεταγμένων υπάρχει ένα σύνολο συναρτήσεων $a_{ik}(i, k = 1, ...n)$ έτσι ώστε το $a_{ik}A^iB^k$ να είναι αναλλοίωτο για οποιαδήποτε ανταλλοίωτα διανύσματα A^i και B^k, τότε τα a_{ik} θα κατασκευάζουν τις συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (0,2).

Απόδειξη Σύμφωνα με τη δοσμένη συνθήκη έχουμε,

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{ik}\bar{A}^i\bar{B}^k &= a_{ik}A^iB^k \\
&= a_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^s}\bar{A}^s\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\bar{B}^l \qquad \text{(από την (2.13))} \\
&= a_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^s}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\bar{A}^s\bar{B}^l \\
&= a_{sl}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k}\bar{A}^i\bar{B}^k
\end{aligned}$$

(αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες i, s, k και l με s, i, l και k αντίστοιχα)

Επομένως $(\bar{a}_{ik} - a_{sl}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k})\bar{A}^i\bar{B}^k = 0$ (2.34)

Επειδή που τα $\bar{A}^i$ και $\bar{B}^k$ είναι αυθαίρετα διανύσματα, έπεται από τη (2.34) ότι

$$\bar{a}_{ik} - a_{sl}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} = 0$$

$$\text{ή} \quad \bar{a}_{ik} = a_{sl}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \tag{2.35}$$

Από τη (2.35), έπεται ότι τα a_{ik} είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (0,2)■

(iv) **Ο νόμος πηλίκου για την περίπτωση τανυστών του τύπου (2,0):** Αν σχετικά με κάθε σύστημα συντεταγμένων υπάρχει ένα σύνολο συναρτήσεων $a^{ik}(i,k = 1,....n)$ έτσι ώστε το $a^{ik}A_iB_k$ να είναι αναλλοίωτο για αυθαίρετα συναλλοίωτα διανύσματα A_i και B_k, τότε τα a^{ik} θα κατασκευάζουν τις συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (2,0).

Απόδειξη Παρόμοια με αυτή της περίπτωσης (iii).

(v)**Ο νόμος πηλίκου στη γενική μορφή:**

Αν σχετικά με κάθε σύστημα συντεταγμένων υπάρχει ένα σύνολο συναρτήσεων $a^{i_1i_2...i_p}_{k_1k_2...k_q}$ (κάθε ένας από τους δείκτες παίρνει τιμές από 1 έως n) έτσι ώστε τα $a^{i_1i_2...i_ri_{r+1}...i_p}_{k_1k_2...k_sk_{s+1}...k_q}A^1_{i_1}A^2_{i_2}\dots A^r_{i_r}B^{k_1}_1\dots B^{k_s}_s(r \leq p, s \leq q)$ να είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου $(p-r, q-s)$ για αυθαίρετα συναλλοίωτα και ανταλλοίωτα διανύσματα,$A^1_{i_1}, A^2_{i_2}, \dots A^r_{i_r}, B^{k_1}_1, \dots B^{k_s}_s$ τότε οι συναρτήσεις $a^{i_1i_2...i_p}_{k_1k_2...k_q}$ θα κατασκευάζουν τις συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (p,q).

Απόδειξη. Μπορεί να ολοκληρωθεί με ανάλογο τρόπο με αυτόν των προηγούμενων περιπτώσεων.

Σημείωση 1 Σημειώνεται ότι το γινόμενο $A^1_{i_1}A^2_{i_2}\dots A^r_{i_r}B^{k_1}_1\dots B^{k_s}_s$ είναι ένας τανυστής ειδικού τύπου με αυθαίρετες συνιστώσες και $a^{i_1i_2...i_ri_{r+1}...i_p}_{k_1k_2...k_rk_{s+1}...k_q}A^1_{i_1}A^2_{i_2}\dots A^r_{i_r}B^{k_1}_1\dots B^{k_s}_s$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο αυτού του τανυστή και του δοσμένου συνόλου συναρτήσεων $a^{i_1i_2...i_ri_{r+1}...i_p}_{k_1k_2...k_rk_{s+1}...k_q}$ Στην θέση αυτού του νόμου πηλίκου στη γενική μορφή μπορεί να προταθεί εναλλακτικά ως ακολούθως:

(vi) **Εναλλακτική πρόταση για το νόμο πηλίκου:** Αν το αποτέλεσμα του να πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο ενός συνόλου συναρτήσεων με ένα ειδικού τύπου τανυστή αυθαίρετων συνιστωσών είναι γνωστό ότι είναι ένας τανυστής, τότε οι δοσμένες συναρτήσεις θα κατασκευάζουν τις συνιστώσες ενός τανυστή.

Σημείωση 2. Στην εναλλακτική πρόταση για το νόμο πηλίκου πρέπει να προσέξουμε ότι παίρνοντας ένα εσωτερικό γινόμενο με ένα τανυστή ειδικού τύπου, οι συνιστώσες του τανυστή μπορεί να είναι αυθαίρετες και δεν πρέπει να έχουν οποιεσδήποτε συμμετρικές ή αντι-συμμετρικές ιδιότητες.

Σημείωση 3. Κάποιες φορές ο νόμος πηλίκου καλείται θεώρημα πηλίκου.

Ο νόμος πηλίκου έχει πολλές εφαρμογές. Μία τέτοια εφαρμογή εξασφαλίζει ένα σύνολο από τρόπους από τους οποίους ένας συμμετρικός τανυστής του

τύπου (2,0) μπορεί να ληφθεί από ένα τανυστή του τύπου (0,2).
Αυτό μελετάται στην επόμενη παράγραφο.

II.14 Αντίστροφος τανυστής ενός τανυστή

Έστω a_{ik} ένας τανυστής του τύπου (0,2) που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$| a_{ik} |\neq 0 \tag{2.36}$$

Δηλώνουμε με b^{ij} το αλγεβρικό συμπλήρωμα του a_{ij} στην $| a_{ij} |$ διαιρεμένο με $| a_{ij} |$ δηλαδή,

$$b^{ij} = \frac{\text{ελάσσονα υποορίζουσα } a_{ij} \text{ στην } | a_{ij} |}{| a_{ij} |}^{\dagger} \tag{2.37}$$

Είναι γνωστό από τη θεωρία των οριζουσών ότι από τη χρήση της (2.37)

$$\begin{aligned} a_{ij}b^{ik} &= 1 \quad \text{όταν} \quad k = j \\ &= 0 \quad \text{όταν} \quad k \neq j \end{aligned}$$

Επομένως, $a_{ij}b^{ik} = \delta^k_j$ (2.38)

Έστω D^i ένα αυθαίρετο ανταλλοίωτο διάνυσμα και $B_i = a_{ij}D^j$. Τότε από τη $II.12$ έπεται ότι το B_i είναι ένα διάνυσμα. Αυτό το διάνυσμα είναι αυθαίρετο, επειδή το D^i είναι έτσι.

Τώρα, $B_ib^{ik} = a_{ij}D^jb^{ik} = D^ja_{ij}b^{ik} = D^j\delta^k_j = D^k$ (από(2.38))

Εφαρμόζοντας το νόμο πηλίκου στην εναλλακτική του μορφή (vi) στην εξίσωση $B_ib^{ik} = D^k$ καταλήγουμε στο ότι ο b^{ik} είναι ένας ανταλλοίωτος τανυστής του τύπου (2,0).

Ο τανυστής b^{ik} είναι συμμετρικός, επειδή το a_{ij} είναι έτσι. Έτσι από το συμμετρικό τανυστή του τύπου (0,2) παίρνουμε ένα συμμετρικό τανυστή b^{ij} του τύπου (2,0). Αυτός ο τανυστής καλείται *αντίστροφος* τανυστής του a_{ij}.

Παρομοίως μπορεί να δειχθεί ότι από ένα συμμετρικό τανυστή c^{ij} του τύπου (2,0) που ικανοποιεί τη συνθήκη $| c^{ij} |\neq 0$ μπορούμε να πάρουμε ένα συμμετρικό τανυστή του τύπου (0,2) ο οποίος καλείται ο αντίστροφος τανυστής του c^{ij}.

Αν b^{ij} είναι ο αντίστροφος τανυστής του a_{ij}, το ερώτημα που προκύπτει είναι αν ο a_{ij} είναι ο αντίστροφος του b^{ij}. Αποδεικνύεται παρακάτω ότι η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική.

Από την (2.38) έπεται ότι

$$| a_{ij} || b^{ik} |=| \delta^k_j |= 1 \qquad \text{(από την (1.24))}$$

---

†Η αριστερή πλευρά της (2.37) έχει εκφραστεί ως ένα ανταλλοίωτο διπλό σύστημα. Η αιτία είναι πως ενώ προς στιγμή δεν υπάρχει τανυστικό νόημα, θα αποδειχθεί στη συνέχεια ότι τα b^{ij} είναι στην πραγματικότητα συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή δευτέρας τάξεως

Επομένως, $\mid b^{ik} \mid \neq 0$
Έστω

$$c_{ij} = \frac{\text{ελάσσονα υποορίζουσα του } b^{ij} \text{ στην } \mid b^{ij} \mid}{\mid b^{ij} \mid}\ ^{\ddagger} \tag{2.39}$$

Τότε $c_{ij}b^{ik} = 1$ όταν $k = j$
$=0$ όταν $k \neq j$
Επομένως, $c_{ij}b^{ik} = \delta^k_j$ (2.40)
Πολλαπλασιάζοντας κάθε πλευρά της (2.40) με a_{lk} παίρνουμε
$c_{ij}b^{ik}a_{lk} = \delta^k_j a_{lk}$
ή, $c_{ij}\delta^i_l = a_{lj}$ (από την (2.38) και την (1.6′))
ή, $c_{lj} = a_{lj}$ (από την (1.6))
δηλαδή $c_{ij} = a_{ij}$ (2.41)
Επειδή ο c_{ij} είναι ο αντίστροφος τανυστής του b^{ij}, έπεται από τη (2.41) ότι ο a_{ij} είναι ο αντίστροφος τανυστής του b^{ij}. Έτσι έχουμε αποδείξει ότι αν ο b^{ij} είναι ο αντίστροφος τανυστής του a_{ij}, τότε ο a_{ij} είναι ο αντίστροφος τανυστής του b^{ij}. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι οι a_{ij} και b^{ij} είναι αμοιβαία αντίστροφοι τανυστές αν η σχέση (2.38) ικανοποιείται.

Σημείωση 1. Σημειώνεται ότι ένας τανυστής δευτέρας τάξεως όπως οι a_{ij} ή c^{ij} έχει αντίστροφο τανυστή αν η ορίζουσά του δεν είναι μηδέν.

Σημείωση 2. Αμοιβαία αντίστροφοι τανυστές μερικές φορές καλούνται αμοιβαία συζυγείς τανυστές.

Σημείωση 3. Ο αντίστροφος τανυστής ενός τανυστή a_{ij} μπορεί να μην εκφράζεται στη μορφή a^{ij} χρησιμοποιώντας το ίδιο βασικό γράμμα αλλά μπορεί να εκφράζεται στη μορφή b^{ij} χρησιμοποιώντας το βασικό γράμμα $'b'$ διαφορετικό από το γράμμα $'a'$. Παρόμοιο σχόλιο γίνεται για να εκφράσουμε τον αντίστροφο τανυστή ενός τανυστή b^{ij}.

Στην επόμενη παράγραφο θεωρούμε ένα είδος αντισυμμετρικού τανυστή του τύπου (0,2) το οποίο μπορεί να εκτιμηθεί σα μία γενίκευση της έννοιας του διανυσματικού γινομένου δύο διανυσμάτων στον 3-διαστάσεων Ευκλείδειο χώρο E_3.

II.15 Διανυσματικό γινόμενο δύο διανυσμάτων:

Έστω A_i και B_i δύο συναλλοίωτα διανύσματα του S_n. Θέτουμε
$A_{ij} = A_iB_j - A_jB_i$ (2.42)
Τότε $A_{ij} = -A_{ji}$ (2.43)
Τώρα $\bar{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}A_k$ και $\bar{B}_j = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}B_p$ (από την (2.9))
Επομένως, $\bar{A}_i\bar{B}_j = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}A_k\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}B_p = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A_kB_p$ (2.44)
Από τη (2.44) έπεται ότι ο A_iB_j είναι ένας τανυστής του τύπου (0,2). Παρόμοια, A_jB_i είναι ένας τανυστής του τύπου (0,2). Επομένως από τη σημείωση 2 του θεωρήματος 2.3 έπεται ότι $A_iB_j - A_jB_i$ είναι ένας τανυστής του τύπου

‡Η αριστερή πλευρά της (2.39) έχει εκφραστεί ως ένα ανταλλοίωτο διπλό σύστημα. Η αιτία είναι πως θα αποδειχθεί αργότερα ότι τα c_{ij} είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου τανυστή δευτέρας τάξεως

(0,2) ο οποίος είναι αντισυμμετρικός σύμφωνα με τη (2.43). Αυτός ο αντισυμμετρικός τανυστής A_{ij} καλείται διανυσματικό γινόμενο των διανυσμάτων A_i και B_i.
Επειδή ο μέγιστος αριθμός των αριθμητικά διαφορετικών συνιστωσών ενός αντισυμμετρικού τανυστή του τύπου (0,2) στο S_n είναι $\frac{1}{2}n(n-1)$ (δες Ασκ .7 των ασκήσεων αυτού του κεφαλαίου) ο μέγιστος αριθμός των αριθμητικά διαφορετικών συνιστωσών του A_{ij} είναι $\frac{1}{2}n(n-1)$. Αυτός ο αριθμός είναι $> n$ όταν $n > 3$. Αλλά για $n = 3$, αυτός ο αριθμός είναι επίσης ίσος με 3. Έτσι στον S_3 ο μέγιστος αριθμός των αριθμητικά διαφορετικών συνιστωσών του διανυσματικού γινομένου δύο συναλλοίωτων διανυσμάτων είναι 3. Πάλι στον S_3 ο αριθμός των συνιστωσών ενός διανύσματος είναι επίσης 3. Λόγω αυτού του γεγονότος το διανυσματικό γινόμενο δύο διανυσμάτων στον S_3 έχει ιδιαίτερη σπουδαιότητα. Στην πραγματικότητα, στην III.19 θα δειχθεί ότι κάτω από προκαθορισμένες συνθήκες το διανυσματικό γινόμενο δύο συναλλοίωτων διανυσμάτων στον S_3 μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα διάνυσμα του ίδιου χώρου. Το διανυσματικό γινόμενο δύο συναλλοίωτων διανυσμάτων, όπως ορίστηκε παραπάνω, μπορεί τότε να θεωρηθεί ως μία γενίκευση του διανυσματικού γινομένου δύο διανυσμάτων σε ένα 3-διαστάσεων Ευκλείδειο χώρο E_3.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Οι συνιστώσες A^i ενός ανταλλοίωτου διανύσματος σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i) λαμβάνονται ως ακολούθως:
$A^1 = f$, όπου f είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση των x^i και $A^j = 0$, $j = 2, \ldots n$.
Δείξατε ότι οι συνιστώσες σε κάθε άλλο σύστημα $(\bar{x}^i)$ δίνονται ως

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1} f, \quad i = 1, ...n$$

Λύση:
Επειδή τα A^i είναι οι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου διανύσματος, έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{A}^i &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j, \quad i, j = 1, ...n \\ &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^2} A^2 + \cdots + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} A^n \end{aligned} \tag{1}$$

Στην παρούσα περίπτωση $A^1 = f$, $A^2 = A^3 = \cdots = A^n = 0$.

Επομένως η (1) παίρνει τη μορφή

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1} A^1 = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1} f, \qquad i = 1, ...n$$

2. Αν η σχέση $b^i_j v_i = 0$ ισχύει για ένα αυθαίρετο συναλλοίωτο διάνυσμα v_i, δείξατε ότι $b^i_j = 0$.
Η δοσμένη σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$b^1_j v_1 + b^2_j v_2 + \cdots + b^n_j v_n = 0 \tag{1}$$

Επειδή το v_i είναι αυθαίρετο μπορούμε να το επιλέξουμε κατά βούληση. Αρχίκα παίρνουμε το v_i σαν (1,0,...,0).
Τότε $v_1 = 1, v_2 = 0, ...v_n = 0$. Τώρα από την (1) παίρνουμε $b^1_j = 0$.
Στη συνέχεια παίρνουμε τα v_i ως (0,1,. . . ,0),(0,0,1,0,. . .)... (0,0,. . . 0,1) διαδοχικά.
Τότε από την (1) παίρνουμε

$$b^2_j = 0, b^3_j = 0...b^n_j = 0 \tag{3}$$

Από τις (2) και (3) έπεται ότι $b^i_j = 0$.

3. Αν η σχέση $a_{ij} v^i v^j = 0$ ισχύει για αυθαίρετα διανύσματα v^i, δείξατε ότι $a_{ij} + a_{ji} = 0$.
Η αριστερή πλευρά της δοσμένης σχέσης περιέχει n^2 όρους επειδή ο αριθμός των συνιστωσών του συστήματος a_{ij} είναι n^2 (δες Ι.1). Στους n από αυτούς τους όρους τα i και j είναι ίσα όπως $a_{11}v^1v^1$, $a_{22}v^2v^2$ κλπ. Επομένως, στους εναπομείναντες από τους $n(n-1)$ όρους τα i και j είναι διαφορετικά όπως $a_{12}v^1v^2$,$a_{13}v^1v^3$ κλπ.
Έτσι η δοσμένη σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$a_{11}v^1v^1 + a_{22}v^2v^2 + \cdots + a_{nn}v^nv^n + \underbrace{a_{12}v^1v^2 + ...}_{n(n-1)\text{όροι}} = 0 \tag{1}$$

Επειδή τα v^i είναι αυθαίρετα, μπορούμε να τα επιλέξουμε κατά βούληση. Πρώτα παίρνουμε τα v^i ως (1,0,. . . ,0).
Έτσι, $v^1 = 1$, $v^2 = 0$, $\ldots v^n = 0$.
Επομένως, από την (1) παίρνουμε $a_{11} = 0$ (2)
Μετά επιλέγοντας τα v^i σαν (0,1,0...0),(0,0,1,0....0)...(0,...0,0,1) διαδοχικά, από (1) παίρνουμε

$$a_{22} = 0, a_{33} = 0, ...a_{nn} = 0 \tag{3}$$

Από τις (2) και (3) έχουμε $a_{ij} = 0$ (4) για $i = j$. Τώρα επιλέγουμε το v^i ως (1,1...0). Έτσι $v^1 = 1, v^2 = 1, v^3 = 0...v^n = 0$. Τώρα από την (1) παίρνουμε

$a_{13} + a_{31} = 0$, $a_{14} + a_{41} = 0$ κλπ.
Έτσι $a_{ij} + a_{ji} = 0$ (5) για $i \neq j$. Συνδυάζοντας τις (4) και (5) έχουμε $a_{ij} + a_{ji} = 0$.
Σημείωση. Αν $a_{ij}v^iv^j = 0$ για ένα αυθαίρετο ανταλλοίωτο διάνυσμα v^i, όπου a_{ij} είναι συμμετρικός, τότε $a_{ij} = 0$.

4. Αν $a_{ij}v^iv^j = b_{ij}v^iv^j$ για ένα αυθαίρετο ανταλλοίωτο διάνυσμα v^i, τότε δείξατε ότι $a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} + b_{ji}$.
Η δοσμένη σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$c_{ij}v^iv^j = 0 \tag{1}$$

$$\text{όπου} \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \tag{2}$$

Από το παράδειγμα 3, έπεται από την (1) ότι

$$c_{ij} + c_{ji} = 0$$

δηλαδή $a_{ij} - b_{ij} + a_{ji} - b_{ji} = 0$ (από την (2))
Επομένως, $a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} + b_{ji}$

5.Αν ισχύει η ισότητα $a^i_j v_i = \sigma v_j$ για κάθε συναλλοίωτο διάνυσμα v_i, όπου σ είναι ένα βαθμωτό δείξατε ότι

$$a^i_j = \sigma\delta^i_j$$

Η δοσμένη ισότητα μπορεί να γραφεί ως

$$a^i_j v_i = \sigma\delta^i_j v_i \qquad \text{(από την (1.5))}$$

δηλαδή ως $(a^i_j - \sigma\delta^i_j)v_i = 0$ (1)
ή ως $b^i_j v_i = 0$ (2)
όπου $b^i_j = a^i_j - \sigma\delta^i_j$ (3)
Από το παράδειγμα 2 έπεται από την (2) ότι

$$b^i_j = 0$$

δηλαδή $a^i_j - \sigma\delta^i_j = 0$ (από την (3))
Επομένως, $a^i_j = \sigma\delta^i_j$.

6. Αν $B_{ij} = A_{ji}$, όπου A_{ij} είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής, δείξατε ότι B_{ij} είναι ένας τανυστής τάξεως 2.

Επειδή ο A_{ij} είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής, έχουμε

$$\bar{A}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A_{kp} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\text{Τώρα,}\bar{B}_{ij} = \bar{A}_{ji} &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}A_{kp} && \text{(από την (1))}\\
&= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}B_{pk} && (\because B_{ij} = A_{ji})\\
&= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}B_{pk} && (2)
\end{aligned}$$

Από την (2) έπεται ότι ο B_{ij} είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής βαθμού 2.

7. Αν A_i είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, ελέγξτε αν ο $\frac{\partial A^i}{\partial x^j}$ είναι ένας τανυστής.
Επειδή το A_i είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, έχουμε

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}A_k \tag{1}$$

Διαφορίζοντας τις δύο πλευρές της (1) ως προς $\bar{x}^j$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j} &= \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i}A_k + (\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial x^l}\frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}^j})\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\\
&= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial A_k}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i}A_k && (2)
\end{aligned}$$

Από τη (2)έπεται ότι ο $\frac{\partial A_i}{\partial x^j}$ δεν είναι ένας τανυστής λόγω της παρουσίας δεύτερου όρου στη δεξιά πλευρά της (2).

8. Αν a_{ij} είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής, δείξτε ότι

$$(\delta^i_j\delta^k_l + \delta^i_l\delta^k_j)a_{ik} = 0$$

Έχουμε $(\delta^i_j\delta^k_l + \delta^i_l\delta^k_j)a_{ik} = \delta^i_j\delta^k_l a_{ik} + \delta^i_l\delta^k_j a_{ik}$

$$\begin{aligned}
&= \delta^k_l\delta^i_j a_{ik} + \delta^k_j\delta^i_l a_{ik}\\
&= \delta^k_l a_{jk} + \delta^k_j a_{lk} && \text{(από την (1.6))}\\
&= -\delta^k_l a_{kj} - \delta^k_j a_{kl} && (\because a_{ij} = -a_{ji}\ )\\
&= -a_{lj} - a_{jl} && \text{(από την (1.6))}\\
&= -a_{lj} + a_{lj} && (\because \text{ο } a_{ij} \text{ είναι αντισυμμετρικός }\ )\\
&= 0
\end{aligned}$$

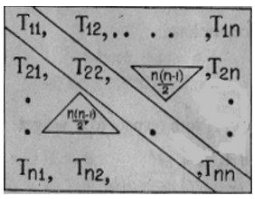
9. Αν ένας τανυστής T_{ijk} είναι συμμετρικός ως προς τους δύο πρώτους δείκτες και αντισυμμετρικός ως προς τον δεύτερο με τρίτο δείκτη, δείξατε ότι $T_{ijk} = 0$.

$$
\begin{aligned}
\text{έχουμε}\quad T_{ijk} &= T_{jik} && \text{(από τη συνθήκη της συμμετρίας)}\\
&= -T_{jki} && (\quad ''\quad\quad '' \quad \text{αντισυμμετρίας})\\
&= -T_{kji} && (\quad ''\quad\quad '' \quad \text{συμμετρίας})\\
&= T_{kij} && (\quad ''\quad\quad '' \quad \text{αντισυμμετρίας})\\
&= T_{ikj} && (\quad ''\quad\quad '' \quad \text{συμμετρίας})\\
&= -T_{ijk} && (\quad ''\quad\quad '' \quad \text{αντισυμμετρίας})
\end{aligned}
$$

Επομένως $2T_{ijk} = 0$ ή, $T_{ijk} = 0$.

10. Δείξατε ότι σε ένα $n-$διάστατο χώρο ένας συμμετρικός συναλλοίωτος τανυστής δευτέρας τάξεως έχει το πολύ $\frac{n(n+1)}{2}$ συνιστώσες.

Έστω T_{ij} ένας συμμετρικός τανυστής δευτέρας τάξεως. Τότε ο συνολικός αριθμός των συνιστωσών είναι n^2 (δες I.1). Αυτές οι συνιστώσες είναι δύο τύπων:
(i) αυτές των οποίων οι δείκτες i και j είναι ίδιοι και (ii) αυτές των οποίων οι δείκτες i και j είναι διαφορετικοί.
Ο μέγιστος αριθμός διαφορετικών συνιστωσών του τύπου (i) είναι n(δες τις συνιστώσες κατά μήκος της διαγωνίου στην εικόνα). Επομένως ο μέγιστος αριθμός συνιστωσών του τύπου (ii) είναι $n^2 - n = n(n-1)$. Αλλά λόγω της συμμετρίας του T_{ij} ο μέγιστος αριθμός διακριτών συνιστωσών του τύπου (ii) είναι $\frac{n(n-1)}{2}$ (δες τις συνιστώσες πάνω και κάτω από τη διαγώνιο στην εικόνα). Επομένως ο τανυστής T_{ij} έχει το πολύ $n + \frac{n(n-1)}{2}$ διαφορετικές συνιστώσες δηλαδή,$\frac{n(n+1)}{2}$ διαφορετικές συνιστώσες.



11. Δείξτε ότι από την εφαρμογή του νόμου πηλίκου το δ^i_j είναι ένας τανυστής του τύπου (1,1).

Έστω A_i ένα αυθαίρετο συναλλοίωτο διάνυσμα.
Τότε $\delta^i_j A_i = A_j$ (1) (από την (1.5))
Τώρα εφαρμόζοντας το νόμο πηλίκο στην εξίσωση (1) έπεται ότι το δ^i_j είναι ένας τανυστής του τύπου (1,1). (δες II.13, Εναλλακτική πρόταση (vi)).

12. Αν $a_{ij}(\neq 0)$ είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος τάξεως 2 έτσι ώστε $ba_{ij} + ca_{ji} = 0$ όπου b και c είναι μη μηδενικά βαθμωτά, δείξατε ότι είτε $b = c$ και a_{ij} είναι αντισυμμετρικός ή $b = -c$ και a_{ij} είναι συμμετρικός.

Από τη σχέση $ba_{ij} + ca_{ij} = 0$
έχουμε $ba_{ij} = -ca_{ji}$ (1)
Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της (1) με b, παίρνουμε

$$\begin{aligned} b^2 a_{ij} = -bca_{ji} &= -c(ba_{ij}) \\ &= -c(-ca_{ij}) \qquad \text{(από την (1))} \\ &= c^2 a_{ij} \\ \text{ή,} \quad (b^2 - c^2)a_{ij} &= 0, \end{aligned}$$

Επομένως, $b^2 - c^2 = 0$, επειδή $a_{ij} \neq 0$ Επομένως, $b = \pm c$
Όταν $b = c$, έπεται από την (1) ότι

$$\begin{aligned} ca_{ij} &= -ca_{ji} \\ \text{ή} \quad a_{ij} &= -a_{ji} \qquad (\because c \neq 0\ ) \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι ο a_{ij} είναι αντισυμμετρικός.
Επίσης, όταν $b = -c$, έπεται από την (1) ότι

$$\begin{aligned} -ca_{ij} &= -ca_{ji} \\ \text{ή} \quad a_{ij} &= a_{ji} \qquad (\because c \neq 0\ ) \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι ο a_{ij} είναι συμμετρικός.

13. Αν a_{ij} και b_{ij} είναι δύο συμμετρικοί τανυστές και u^i, v^i είναι συνιστώσες δύο ανταλλοίωτων διανυσμάτων που ικανοποιούν τις $(a_{ij} - kb_{ij})u^i = 0$, $(a_{ij} - k'b_{ij})v^i = 0 \quad i, j = 1, ...n \quad k \neq k'$, δείξατε ότι $b_{ij}u^i v^j = 0$ και $a_{ij}u^i v^j = 0$.
Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της πρώτης συνθήκης με v^j και αυτές της δεύτερης συνθήκης με u^j παίρνουμε

$$(a_{ij} - kb_{ij})u^i v^j = 0 \qquad (1)$$

$$\text{και}(a_{ij} - k'b_{ij})u^j v^i = 0 \qquad (2)$$

Η σχέση (1) μπορεί να γραφεί ως

$$a_{ij}u^iv^j - kb_{ij}u^iv^j = 0 \tag{3}$$

Επειδή τα a_{ij} και b_{ij} είναι συμμετρικά, μπορούμε να γράψουμε τη (2) ως

$$a_{ji}u^jv^i - k'b_{ji}u^jv^i = 0$$

Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες j και i με i και j αντίστοιχα παίρνουμε
$a_{ij}u^iv^j - k'b_{ij}u^iv^j = 0$ (4)
Τώρα αφαιρώντας την (4) από την (3) έχουμε

$$(k' - k)b_{ij}u^iv^j = 0 \tag{5}$$

Επειδή $k \neq k'$, από την (5) έπεται ότι

$$b_{ij}u^iv^j = 0$$

Επομένως λόγω της (4) παίρνουμε $a_{ij}u^iv^j = 0$

14. Δείξατε ότι η ορίζουσα ενός τανυστή του τύπου (1,1) είναι ένα αναλλοίωτο.
Έστω A^i_j ένας τανυστής του τύπου (1,1).
Τότε $\bar{A}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A^k_p$ (δες (2.18))
Επομένως

$$(\bar{A}^i_j) = \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right)(A^k_p)\left(\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\right) \qquad \text{(από την (1.25))} \tag{1}$$

όπου το (A^k_p) δηλώνει τον πίνακα του A^k_p και τα άλλα σύμβολα έχουν παρόμοια σημασία.
Παίρνοντας τις ορίζουσες των δύο πλευρών της (1) έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\bar{A}^i_j\right| &= \left|\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right| \left|(A^k_p)\right| \left|\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\right| && (\because |AB| = |A|\,|B|\ ) \\
&= \left|\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right| \left|\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\right| \left|(A^k_p)\right| \\
&= \left|(A^k_p)\right| \\
&\quad (\text{ από το θεώρημα 2.1, επειδή } \quad J = \left|\tfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right| \text{ και} J' = \left|\tfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\right|\ )
\end{aligned}$$

$= \left|(A^i_j)\right|$ (2) $\qquad (\because \left|(A^k_p)\right| = \left|(A^i_j)\right|)$
Από τη (2) έπεται ότι το $\left|(A^i_j)\right|$ είναι ένα αναλλοίωτο (από τη (2.6)).

15. Αν τα B_{ij} είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου τανυστή δευτέρου βαθμού και C^i, D^j είναι οι συνιστώσες δύο ανταλλοίωτων διανυσμάτων, δείξατε ότι το $B_{ij}C^iD^j$ είναι ένα αναλλοίωτο.
Επειδή τα B_{ij} είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (0,2), έχουμε
$\bar{B}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}B_{kp}$ (1) (από τη (2.16))

$\bar{C}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}C^r$ (2) και $\bar{D}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}D^s$ (3) (από τη (2.12))
Τώρα, $\bar{B}_{ij}\bar{C}^i\bar{D}^j = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}B_{kp}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}C^r\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}D^s$ (από τις (1), (2) και (3))

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}B_{kp}C^rD^s \\
&= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}B_{kp}C^rD^s \\
&= \delta^k_r\delta^p_s B_{kp}C^rD^s && \text{(από (2.5))} \\
&= \delta^k_r B_{kp}\delta^p_s D^sC^r \\
&= B_{rp}D^pC^r && \text{(από τις (1.6) και (1.4))} \\
&= B_{rp}C^rD^p \\
\Rightarrow \bar{B}_{ij}\bar{C}^i\bar{D}^j &= B_{ij}C^iD^j && (4)
\end{aligned}
$$

(Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες r και p από i και j αντίστοιχα)

Από την (4) έπεται ότι το $B_{ij}C^iD^j$ είναι ένα αναλλοίωτο.

16. Αν $a_{ij}u^iu^j$ είναι ένα αναλλοίωτο για ένα αυθαίρετο ανταλλοίωτο διάνυσμα u^i, δείξατε ότι ο $a_{ij} + a_{ji}$ είναι ένας τανυστής.
Επειδή το $a_{ij}u^iu^j$ είναι ένα αναλλοίωτο έχουμε $\bar{a}_{ij}\bar{u}^i\bar{u}^j = a_{ij}u^iu^j$

(από τη (2.6))

$$= a_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^s}\bar{u}^s\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^t}\bar{u}^t \qquad \text{(από (2.13))}$$

$$= a_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^s}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^t}\bar{u}^s\bar{u}^t$$

$$= a_{st}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}\bar{u}^i\bar{u}^j$$

(Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες i, j, s, t από s, t, i, j αντίστοιχα)

$$\text{ή,}\ \ (\bar{a}_{ij} - a_{st}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j})\bar{u}^i\bar{u}^j = 0$$

$$\text{ή,}\ \ \bar{B}_{ij}\bar{u}^i\bar{u}^j = 0 \tag{1}$$

$$\text{όπου}\ \ \bar{B}_{ij} = \bar{a}_{ij} - a_{st}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j} \tag{2}$$

Αφότου $\bar{u}^i$ είναι αυθαίρετο, έπεται από την (1) ότι $\bar{B}_{ij} + \bar{B}_{ji} = 0$ (από το παράδειγμα 3).
Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη (2) η σχέση (3) μπορεί να εκφραστεί ως

$$\bar{a}_{ij} - a_{st}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j} + \bar{a}_{ji} - a_{st}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i} = 0$$

$$\text{ή}\quad \bar{a}_{ij} + \bar{a}_{ji} = a_{st}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j} + a_{st}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i}$$

$$= a_{st}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j} + a_{ts}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}\ \text{(Αντικαθιστώντας}$$

τους βουβούς δείκτες t και s στο δεύτερο όρο του δεξιού μέρους από s και t αντίστοιχα)

$$= (a_{st} + a_{ts})\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j} \tag{4}$$

Από την (4) έπεται ότι $a_{ij} + a_{ji}$ είναι συναλλοίωτος τανυστής βαθμού 2.

17. Αν a_{ij}, b_k είναι οι συνιστώσες ενός συμμετρικού συναλλοίωτου τανυστή και ενός συναλλοίωτου διανύσματος αντίστοιχα τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $a_{ij}b_k + a_{jk}b_i + a_{ki}b_i = 0$, δείξατε ότι $a_{ij} = 0$ ή $b_k = 0$.
Πρώτα υποθέτουμε ότι ένα από τα b_k, ας πούμε το b_1, δεν είναι μηδέν.
Θέτοντας $i = j = k = 1$ στη δοσμένη σχέση παίρνουμε
$a_{11}b_1 + a_{11}b_1 + a_{11}b_1 = 0$ ή $3a_{11}b_1 = 0$
Επομένως , $a_{11} = 0$ (1) ($\because b_1 \neq 0$)
Στη συνέχεια θέτωντας $i = j = 1$ στη δοσμένη σχέση έχουμε

$$a_{11}b_1 + a_{1k}b_1 + a_{k1}b_1 = 0$$

ή, $2a_{1k}b_1 = 0$ (σαν αποτέλεσμα της (1) και της συμμετρίας του aij)
Επομένως $a_{1k} = 0$ για όλα τα k (2) ($\because b_1 \neq 0$)
Τελικώς, θέτοντας $k = 1$ στη δοσμένη σχέση παίρνουμε

$$\begin{aligned} & a_{ij}b_1 + a_{j1}b_i + a_{1i}b_j = 0 \\ \text{ή} \quad & a_{ij}b_1 + a_{j1}b_i + a_{1i}b_j = 0 \\ \text{ή,} \quad & a_{ij}b_1 = 0 \quad (\text{από την } (2\ )\ ) \end{aligned} \tag{3}$$

Από την (3) παίρνουμε $a_{ij} = 0$ ($\because b \neq 0$)
Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι μία από τις συνιστώσες του a_{ij}, ας πούμε η $a_{11} \neq 0$. Τότε το b_k πρέπει να είναι μηδέν για όλα τα k, επειδή σε άλλη περίπτωση, όπως μόλις δείχθηκε, τα a_{ij} πρέπει να είναι μηδέν. Από εκεί και πέρα, είτε $a_{ij} = 0$ ή $b_k = 0$.

18. Δείξατε ότι οι μετασχηματισμοί ανταλλοίωτων διανυσμάτων σχηματίζουν ομάδα.
Έστω S ένα σύνολο από μετασχηματισμούς ανταλλοίωτων διανυσμάτων και T, T' να είναι δύο τέτοιοι μετασχηματισμοί από το σύστημα (x^i) στο σύστημα $(\bar{x}^i)$ και από το $(\bar{x}^i)$ στο $(\bar{\bar{x}}^i)$ που δίνεται από τις

$$T : \bar{A}^i = A^p \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \tag{1}$$

$$T' : \bar{\bar{A}}^i = \bar{A}^r \frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial \bar{x}^p} \tag{2}$$

Τότε ο μετασχηματισμός γινομένου $T'T$ δίνεται από τη

$$\begin{aligned} T'T : \bar{\bar{A}}^i &= A^p \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial \bar{x}^r} \qquad (\text{από τις (1) και (2)}) \\ &= A^p \frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial x^p} \end{aligned} \tag{3}$$

Από την (3) έπεται ότι $T'T \in S$ (4)
Έστω E ο μετασχηματισμός που δίνεται από την

$$E : A^i = A^i \frac{\partial x^p}{\partial x^p} \tag{5}$$

Τότε $ET = TE = T$
Επομένως, E είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός και από την (5) έπεται ότι

$$E \in S \tag{6}$$

Από την (1) παίρνουμε $A^p = \bar{A}^i \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}$ (7) (από τη (2.13))
Το δηλώνουμε αυτό με T_1.
Επειδή το T_1 αναπαριστά το μετασχηματισμό από το σύστημα $(\bar{x}^i)$ στο σύστημα (x^i), είναι το αντίστροφο του T. Επομένως, από την (7) έπεται ότι

$$T_1 \in S \tag{8}$$

Τελικώς, μπορεί εύκολα να επαληθευθεί ότι αν το T'' αναπαριστάνει ένα μετασχηματισμό από ένα σύστημα $(\bar{\bar{x}}^i)$ σε ένα σύστημα $(\bar{\bar{\bar{x}}}^i)$, τότε

$$(T''T')T = T''(T'T) \tag{9}$$

Δυνάμει των (4),(6),(8) και (9) έπεται ότι το S σχηματίζει ομάδα.

19. Αν T_{ijkl} είναι ένας τανυστής ο οποίος ικανοποιεί τις σχέσεις
$T_{ijkl} + T_{ijlk} = 0$ (1)
$T_{ijkl} + T_{ijlk} = 0$ (2)
και $T_{ijkl} + T_{iklj} + T_{iljk} = 0$ (3)
δείξατε ότι $T_{ijkl} = T_{klij}$.
Θέτοντας $i = l, l = k, k = j$, και $j = i$ στην (3) παίρνουμε

$$T_{lijk} + T_{ljki} + T_{lkij} = 0 \tag{4}$$

Έπειτα θέτοντας $i = k, j = i, k = j$, στην (3) έχουμε

$$T_{kijl} + T_{kjli} + T_{klij} = 0 \tag{5}$$

Τέλος, θέτοντας $i = j$ και $j = i$ στην (3) παίρνουμε

$$T_{jikl} + T_{jkli} + T_{jlik} = 0 \tag{6}$$

Τώρα προσθέτοντας (3),(4),(5) και (6) έχουμε σαν αποτέλεσμα των (1) και (2)

$$\begin{aligned} 2T_{iklj} + 2T_{ljki} &= 0 \\ \text{ή,} \quad T_{iklj} &= -T_{ljki} \\ &= T_{ljik} \text{ από (1)} \end{aligned} \tag{7}$$

Τώρα, θέτοντας $k = j, l = k, j = l$ στην (7) έχουμε

$$T_{ijkl} = T_{klij}$$

20. Δείξατε ότι δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ ανταλλοίωτων και συναλλοίωτων διανυσμάτων όταν οι μετασχηματισμοί είναι του τύπου $\bar{x}^i = a^i_m x^m + d^i$, όπου

d^i και a^i_m είναι σταθερές τέτοιες ώστε $a^i_r a^i_m = \delta^r_m$ (το i αθροίζεται).
Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές του

$$\bar{x}^i = a^i_m x^m + d^i \tag{1}$$

με a^i_r παίρνουμε

$$\begin{aligned} \bar{x}^i a^i_r &= a^i_r a^i_m x^m + d^i a^i_r \\ &= \delta^r_m x^m + d^i a^i_r && (\because \text{ δίνεται ότι } a^i_r a^i_m = \delta^r_m \ ) \\ &= x^r + d^i a^i_r \end{aligned}$$

Επομένως,$x^r = \bar{x}^i a^i_r - d^i a^i_r$
Θέτοντας $r = j$ έχουμε

$$x^j = \bar{x}^i a^1_j - d^i a^i_j \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε διαφορίζοντας ως προς x^m και $\bar{x}^i$ τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} = a^i_m \tag{3}$$

$$\text{και} \qquad \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = a^i_j \tag{4}$$

$$\text{Επομένως,} \qquad \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = a^i_j \tag{5}$$

Επομένως, η σχέση $\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j$ παίρνει τη μορφή

$$\bar{A}^i = a^i_j A^j \quad (\text{από την (5) }) \tag{6}$$

Επίσης, η σχέση $\bar{A}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} A_j$ παίρνει τη μορφή

$$\bar{A}_i = a^i_j A_j \quad (\text{από την (5) }) \tag{7}$$

Από την(6) έχουμε
$\bar{A}^1 = a^1_1 A^1 + \cdots + a^1_n A^n, \bar{A}^2 = a^2_1 A^1 + \cdots + a^2_n A^n, \bar{A}^n = a^n_1 A^1 + \cdots + a^n_n A^n$
Επίσης από την (7) έχουμε $\bar{A}_1 = a^1_1 A_1 + \cdots + a^1_n A_n, \bar{A}_2 = a^2_1 A_1 + \cdots + a^2_n A_n, \bar{A}_n = a^n_1 A_1 + \cdots + a^n_n A_n$
Έτσι βλέπουμε ότι και τα δυο διανύσματα A^i και A_i μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο. Επομένως δε μπορεί να υπάρξει διάκριση μεταξύ τους.

21. (i) Αν $\left(\frac{x^1}{x^2}, \frac{x^2}{x^1}\right)$ είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα σε Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων x^1, x^2 βρείτε τις συνιστώσες σε πολικές συντεταγμένες r, θ

(*C.U.*1989)
Αν τα A_i εκφράζουν τις συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος σε συντεταγμένες x^i και τα $\bar{A}_i$ εκφράζουν τις συνιστώσες του σε συντεταγμένες $\bar{x}^i$, τότε

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_k \tag{1}$$

$$\text{Στην παρούσα περίπτωση, } x^1 = r\cos\theta, x^2 = r\sin\theta \tag{2}$$

$$A_1 = \frac{x^1}{x^2}, A_2 = \frac{x^2}{x^1} \tag{3}$$

$$\bar{x}^1 = r, \bar{x}^2 = \theta \tag{4}$$

Έχουμε να βρούμε τα $\bar{A}_1$ και $\bar{A}_2$.
Τώρα η (1) μπορεί να γραφεί ως

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^i} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^i} A_2$$

$$\text{Επομένως,} \quad \bar{A}_1 = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} A_2 \tag{5}$$

$$\text{και} \quad \bar{A}_2 = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} A_2 \tag{6}$$

Από την (5) παίρνουμε $\bar{A}_1 = \frac{\partial x^1}{\partial r} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial r} A_2$ (από(4))

$$= cos\theta \frac{x^1}{x^2} + sin\theta \frac{x^2}{x^1} \qquad \text{(από τις (2) και (3))}$$

$$= cos\theta cot\theta + sin\theta tan\theta \qquad \text{(από τη (2))}$$

$$\frac{cos^2\theta}{sin\theta} + \frac{sin^2\theta}{cos\theta} = \frac{cos^3\theta + sin^3\theta}{sin\theta cos\theta}$$

Επίσης από (6) παίρνουμε $\bar{A}_2 = \frac{\partial x^1}{\partial \theta} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \theta} A_2$ (από την (4))

$$= -rsin\theta \frac{x^1}{x^2} + rcos\theta \frac{x^2}{x^1} \qquad \text{(από τις (2) \&(3))}$$

$$= -rsin\theta cot\theta + rcos\theta tan\theta = -rcos\theta + rsin\theta$$

$$r(sin\theta - cos\theta)$$

Επομένως, οι συναλλοίωτες συνιστώσες είναι $\frac{(cos^3\theta + sin^3\theta)}{sin\theta cos\theta}$, $r(sin\theta - cos\theta)$
(ii) Αν ένα διάνυσμα έχει συνιστώσες $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ σε ένα ορθογώνιο σύστημα συ-

ντεταγμένων x, y δείξατε ότι τα $\frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}$ είναι οι συνιστώσες τους σε πολικές συντεταγμένες r, θ.
Αν το A^i εκφράζει τις συνιστώσες ενός διανύσματος σε συντεταγμένες x^i και το $\bar{A}^i$ εκφράζει τις συνιστώσες του σε συντεταγμένες $\bar{x}^i$, τότε έχουμε

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j \tag{1}$$

Στην παρούσα περίπτωση, έχουμε έναν δύο διαστάσεων χώρο και
$x^1 = x, x^2 = y, \bar{x}^1 = r, \bar{x}^2 = \theta, A^1 = \frac{dx}{dt}$ και $A^2 = \frac{dy}{dt}$.
Επομένως, η (1) μπορεί να γραφεί ως

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^2} A^2$$

$$\text{Έτσι,} \quad \bar{A}^1 = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} A^2 = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{2}$$

$$\text{και} \quad \bar{A}^2 = \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} A^2 = \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{3}$$

Έχουμε $r^2 = x^2 + y^2$ (4)
Από την (4) παίρνουμε $2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x$. Έτσι $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ (5)
Παρομοίως $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ (6)
Επίσης διαφορίζοντας τις δύο πλευρές της (4) ως προς t παίρνουμε

$$2r\frac{dr}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\text{Έτσι,} r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} \tag{7}$$

Από (2) έχουμε $\bar{A}^1 = \frac{x}{r}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{r}\frac{dy}{dt}$ (από τις (5) και (6))

$$\frac{1}{r}(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt})$$

$$= \frac{1}{r} r \frac{dr}{dt} \qquad \text{(από την (7))}$$

$$= \frac{dr}{dt} \tag{8}$$

Επίσης, έχουμε $\theta = tan^{-1}\frac{y}{x}$

$$\text{ή,} tan\theta = \frac{y}{x} \tag{9}$$

Διαφορίζοντας τις δύο πλευρές της (9) ως προς t παίρνουμε

$$\sec^2\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt}y + \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\text{ή} \quad \left(1+\tan^2\theta\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{x^2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\text{ή} \quad \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{x^2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

(από την (9))

$$\text{Επομένως,} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{x^2+y^2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{r^2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) \qquad (10)$$

Τώρα διαφορίζοντας τις δύο πλευρές της (9) ως προς x παίρνουμε,
$sec^2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}y$
ή,$(1+tan^2\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}y$
ή, $\frac{x^2+y^2}{x^2}\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$
Επομένως, $\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}$ (11)
Παρομοίως, $\frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{x}{r^2}$ (12)
Από την (3) παίρνουμε $\bar{A}^2 = -\frac{y}{r^2}\frac{dx}{dt} + \frac{x}{r^2}\frac{dy}{dt}$ (από τις (11) και (12))
$= \frac{1}{r^2}(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt})$
$= \frac{d\theta}{dt}$ (13)(από τη (10))
Από τις (8) και (13) παίρνουμε τις συνιστώσες σε πολικές συντεταγμένες ως $\frac{dr}{dt}$ και $\frac{d\theta}{dt}$.

22. Αν a_{ij}, b_{kl} είναι οι συνιστώσες δύο συμμετρικών τανυστών σε ένα $n-$διάστατο χώρο έτσι ώστε $\mid b_{kl} \mid \neq 0$ και

$$a_{ij}b_{kl} - a_{il}b_{jk} + a_{jk}b_{il} - a_{kl}b_{ij} = 0,$$

δείξατε ότι $a_{ij} = \rho b_{ij}$, όπου ρ είναι κάποιος βαθμωτός.
Επειδή b_{kl} είναι συμμετρικός και $\mid b_{kl} \mid \neq 0$, μπορούμε να πάρουμε τα c^{ij} έτσι ώστε

$$b_{ij}c^{ik} = \delta^k_j \qquad (1) \qquad \text{(από τη (2.38))}$$

Τώρα πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της δοσμένης σχέσης με c^{kl} παίρνουμε

$$a_{ij}c^{kl}b_{kl} - a_{il}c^{kl}b_{jk} + a_{jk}c^{kl}b_{il} - a_{kl}c^{kl}b_{ij} = 0$$

ή, $na_{ij} - a_{il}\delta^l_j + a_{jk}\delta^k_i - \sigma b_{ij} = 0$ όπου $\sigma = a_{kl}c^{kl}$ (από την (1))
ή, $na_{ij} - a_{ij} + a_{ji} - \sigma b_{ij} = 0$ (από την (1.6′))
ή, $na_{ij} = \sigma b_{ij}$
Επομένως, $a_{ij} = \frac{\sigma}{n}b_{ij} = \rho b_{ij}$, όπου ρ είναι ένα βαθμωτό επειδή το σ είναι έτσι.

23. Αν X, Y, Z είναι οι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου διανύσματος σε ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες x, y, z σε ένα 3-διάστατο χώρο, δείξατε ότι οι συνιστώσες του διανύσματος σε κυλινδρικές συντεταγμένες, *r, θ, z είναι

$$Xcos\theta + Ysin\theta, -\frac{X}{r}sin\theta + \frac{Y}{r}cos\theta, Z$$

Αν A^i είναι οι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου διανύσματος σε συντεταγμένες x^i και $\bar{A}^i$ είναι οι συνιστώσες σε συντεταγμένες $\bar{x}^i$, τότε

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j \tag{1}$$

Στην παρούσα περίπτωση έχουμε 3-διάστατο χώρο, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $\bar{x}^1 = r, \bar{x}^2 = \theta, \bar{x}^3 = z, A^1 = X, A^2 = Y$ και $A^3 = Z$.
Επομένως, η (1) μπορεί να γραφεί ως

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1}\bar{A}^1 + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^2}\bar{A}^2 + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^3}\bar{A}^3$$

Έτσι, $$\bar{A}^1 = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}\bar{A}^1 + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2}\bar{A}^2 + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3}\bar{A}^3 \tag{2}$$

$$\bar{A}^2 = \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1}\bar{A}^1 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}\bar{A}^2 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3}\bar{A}^3 \tag{3}$$

και $$\bar{A}^3 = \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1}\bar{A}^1 + \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2}\bar{A}^2 + \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3}\bar{A}^3 \tag{4}$$

Τώρα είναι γνωστό * ότι

$$x = rcos\theta, y = rsin\theta, z = z$$

Επομένως, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (5), $\theta = tan^{-1}\frac{y}{x}$ (6) και $z = z$

Από την (5) παίρνουμε $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = cos\theta$ (7) Παρομοίως, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = sin\theta$ (8) και $\frac{\partial r}{\partial z} = 0$ (9) Από την (6) παίρνουμε $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{r^2}$ $= -\frac{1}{r}sin\theta$ (10)
Παρομοίως, $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{1}{r}cos\theta$ (11)
και $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$ (12)
Από τη (2) παίρνουμε $\bar{A}^1 = \frac{\partial r}{\partial x}X + \frac{\partial r}{\partial y}Y + \frac{\partial r}{\partial z}Z = cos\theta X + sin\theta Y$ (από τις (7), (8) και (9))

*δες Κεφάλαιο V
*δες κεφάλαιο V

$\bar{A}^2 = \frac{\partial\theta}{\partial x}X + \frac{\partial\theta}{\partial y}Y + \frac{\partial\theta}{\partial z}Z = -\frac{1}{r}sin\theta X + \frac{1}{r}cos\theta Y$ (από τις (10),(11) και (12)) και $\bar{A}^3 = \frac{\partial z}{\partial x}X + \frac{\partial z}{\partial y}Y + \frac{\partial z}{\partial z}Z = Z$ Επομένως, οι ζητούμενες συνιστώσες είναι $Xcos\theta + Ysin\theta$,

$$-\frac{X}{r}sin\theta + \frac{Y}{r}cos\theta, Z$$

24. Αν $A^k_{ij}B^{jl}_k = 0$ για κάθε B^{jl}_k, δείξτε ότι τα A^k_{ij} μηδενίζονται ταυτοτικά. ($C.U.1987$)
Από τη στιγμή που το B^{jl}_k είναι αυθαίρετο, μπορούμε να επιλέξουμε τις συνιστώσες του ως ακολούθως:
$B^{21}_3 \neq 0$, ενώ οι άλλες συνιστώσες είναι όλες μηδέν.
Τώρα το $A^k_{ij}B^{jl}_k = 0$ μπορεί να γραφεί ως

$$A^1_{ij}B^{jl}_1 + A^2_{ij}B^{jl}_2 + A^3_{ij}B^{jl}_k + \cdots + A^n_{ij}B^{jl}_n = 0$$

$$\text{ή, } A^1_{ij}B^{jl}_1 + A^2_{ij}B^{jl}_2 + [A^3_{i1}B^{j1}_3 + A^3_{i2}B^{j2}_3 \cdots + A^3_{in}B^{nl}_3] + \cdots + A^n_{ij}B^{jl}_n = 0 \quad (1)$$

Από την (1) παίρνουμε $A^3_{i2}B^{2l}_3 = 0$ (2)
επειδή από την παραπάνω επιλογή των συνιστωσών των B^{jl}_k, όλοι οι άλλοι όροι της (1) μηδενίζονται.
Επειδή $B^{21}_3 \neq 0$, από τη (2) παίρνουμε
$A^3_{i2} = 0$ για όλα τα i.
Παρομοίως, για όλους τους συνδυασμούς των j και k των B^{jl}_k παίρνουμε
$A^p_{iq} = 0$ για όλα τα p, q.
Με άλλα λόγια, $A^k_{ij} = 0$ για όλα τα i, j, k δηλαδή ο A^k_{ij} μηδενίζεται ταυτοτικά.

25. Αν σχετικά με κάθε σύστημα συντεταγμένων στον S_n υπάρχει ένα σύνολο n^3 συναρτήσεων έτσι ώστε το εσωτερικό γινόμενο $A^i_{jk}B^k_s = 0$ να είναι ένας τανυστής του τύπου (1,2) για ένα τανυστή B^k_s του τύπου (1,1) με αυθαίρετες συνιστώσες, αποδείξτε χωρίς εφαρμογή του νόμου πηλίκου ότι τα A^i_{jk} είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (1,2).
Έστω $A^i_{jk}B^k_s = C^i_{js}$ (1)
σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i) Έστω ότι τα $\bar{C}^i_{js}$ και $\bar{B}^k_s$ εκφράζουν τις συνιστώσες των C^i_{js} και B^k_s σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων $(\bar{x}^i)$ και οι ποσότητες A^i_{jk} έστω ότι γίνονται A'^i_{jk} στο σύστημα $(\bar{x}^i)$. Τότε $\bar{C}^i_{js} = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^s}C^p_{qt}$ (2) (από τη (2.20))
και $\bar{B}^k_s = \frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^s}B^r_l$ (3) (από τη (2.18))
Στο σύστημα $(\bar{x}^i)$ προσδιορίζουμε ένα σύνολο συναρτήσεων $\bar{A}^i_{jk}$ ως ακολούθως:

$$\bar{A}^i_{jk} = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^u}{\partial\bar{x}^k}A^m_{nu} \quad (4)$$

$$\text{Τότε}\bar{A}^i_{jk}\bar{B}^k_s = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^u}{\partial\bar{x}^k}A^m_{nu}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^s}B^r_l \qquad (\text{από τις } (3)\&(4))$$

$$= \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^u}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^s}A^m_{nu}B^r_l$$

$$= \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^j}\delta^u_r\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^s}A^m_{nu}B^r_l \qquad (\text{από την } (2.5))$$

$$= \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^s}A^m_{nr}B^r_l \qquad (3)$$

$$= \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^s}C^m_{nl} \qquad (\text{από την } (1))$$

$$= \bar{C}^i_{js} \qquad (5) \qquad (\text{από τη } (2))$$

Επίσης $A'^i_{jk}\bar{B}^k_s = \bar{C}^i_{js}$ (6) (από την (1))
Από τις (5) και (6) έχουμε $(A'^i_{jk} - \bar{A}^i_{jk})\bar{B}^k_s = 0$ (7)
Επειδή τα $\bar{B}^k_s$ είναι αυθαίρετα μπορούμε να θέσουμε οποιαδήποτε επιθυμητή τιμή στις συνιστώσες του. Ας πάρουμε $\bar{B}^k_s = 1$, όταν $k = l$, όπου l είναι ένας καθορισμένος θετικός ακέραιος και $\bar{B}^k_s = 0$ διαφορετικά. Τότε από την (7) παίρνουμε $(A'^i_{jk} - \bar{A}^i_{jk})\bar{B}^l_s = 0$ ή, $A'^i_{jk} - \bar{A}^i_{jk} = 0$ (8) $(\because \bar{B}^l_s = 1)$
Επειδή η (8) ισχύει για $l = 1, 2, ...n$
έχουμε $A'^i_{jk} = \bar{A}^i_{jk}$
Αυτό σημαίνει σύμφωνα με την (4) ότι A^i_{jk} μετασχηματίζεται όπως ένας τανυστής, δηλαδή ο A^i_{jk} είναι ένας τανυστής ο οποίος είναι του τύπου (1,2).

26. Αν a_{ij} είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής τέτοιος ώστε $|a_{ij}| \neq 0$, προσδιορίστε πότε η ορίζουσα $|a_{ij}|$ είναι ένα αναλλοίωτο.
Από τη στιγμή που ο $|a_{ij}|$ είναι ένας αναλλοίωτος τανυστής, έχουμε

$$\bar{a}_{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^j}a_{pq}$$

$$\text{Από εδώ,} \qquad |\bar{a}_{ij}| = \left|\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^i}\right|\left|\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^j}\right||a_{pq}|$$

$$= \left|\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^i}\right|^2|a_{pq}| \qquad \left(\because \left|\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^i}\right| = \left|\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^j}\right|\right)$$

ή $|\bar{a}_{ij}| = J^2|a_{pq}|$ (1), όπου J είναι η Ιακοβιανή του μετασχηματισμού $x^i = \phi^i(\bar{x}^1 \ldots \bar{x}^n), i = 1, 2 \ldots n$.
Από την (1) έπεται ότι $|a_{ij}|$ δεν είναι, γενικά, ένα αναλλοίωτο λόγω της παρουσίας του όρου J^2 στη δεξιά πλευρά.

Σημείωση. Σε αυτή την περίπτωση, $|a_{ij}|$ λέγεται ότι είναι σχετικά αναλλοίωτο βάρους 2. Αλλά σχετικά αναλλοίωτο είναι μια ειδική περίπτωση μίας γενικής έννοιας ενός σχετικού

τανυστή βάρους w ο οποίος προσδιορίζεται ως ακολούθως:

Σχετικός τανυστής:

Ένας τανυστής τάξης $p+q$ του οποίου οι συνιστώσες $a^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i) μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο, όταν αναφέρεται σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων $(\bar{x}^i)$:

$$\bar{a}^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} = J^w \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{t_1}} \frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{t_2}} \ldots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{t_p}} \frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \frac{\partial x^{r_2}}{\partial \bar{x}^{j_2}} \ldots \frac{\partial x^{r_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}} a^{t_1 t_2 \ldots t_p}_{r_1 r_2 \ldots r_q}$$

όπου J είναι η Ιακοβιανή του μετασχηματισμού

$$x^i = \phi^i(\bar{x}^1 \ldots \bar{x}^n)$$

καλείται ένας σχετικός τανυστής βάρους w.

Τανυστική πυκνότητα:

Ένας σχετικός τανυστής βάρους 1 καλείται τανυστική πυκνότητα.

27. Αν a_{ij} είναι ένας συμμετρικός συναλλοίωτος τανυστής τάξεως 2 και $|a_{ij}| = a$, δείξατε ότι η $\sqrt{a}$ είναι μία τανυστική πυκνότητα.

Από τη στιγμή που ο a_{ij} είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής τάξεως 2, έχουμε

$$\bar{a}_{ij} = a_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}$$

$$\text{Από εδώ} \qquad |\bar{a}_{ij}| = |a_{pq}| \left| \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \right| \left| \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \right| = a \left| \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \right|^2$$

$$\text{ή} \quad \bar{a} = a \left| \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \right|^2, \text{όπου } |\bar{a}_{ij}| = \bar{a}$$

Από εδώ, $\sqrt{\bar{a}} = \sqrt{a} \left| \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \right| = J\sqrt{a}$ (1)

Από την (1) έπεται ότι η $\sqrt{a}$ είναι ένας σχετικός τανυστής βάρους 1. Με άλλα λόγια η $\sqrt{a}$ είναι μία τανυστική πυκνότητα.

28. Αποδείξτε ότι το βαθμωτό γινόμενο ενός σχετικού συναλλοίωτου διανύσματος βάρους w και ενός σχετικού ανταλλοίωτου διανύσματος βάρους w' είναι ένα σχετικό βαθμωτό βάρους $w + w'$.

Τότε $\bar{A}^i = A^p \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^{w'}$

$$= A^p \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} J^{w'} \tag{1}$$

και $\bar{B}_i = B_q \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^{w}$

$$= B_q \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} J^{w} \tag{2}$$

Από (1) και (2) παίρνουμε

$$\bar{A}^i\bar{B}_i = A^pB_q\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^q}{\partial x^i}J^{w+w'}$$

$$= A^pB_q\delta^q_pJ^{w+w'}$$

$$= A^pB_pJ^{w+w'} \tag{3}$$

Από την (3) έπεται ότι A^iB_i είναι ένας σχετικός βαθμωτός βάρους $w+w'$.

29. Αν a_{ij} είναι ένας αντισυμμετρικός συναλλοίωτος τανυστής, δείξατε ότι b_{rst} που ορίζεται από την

$$b_{rst} = \frac{\partial a^{st}}{\partial x^r} + \frac{\partial a^{tr}}{\partial x^s} + \frac{\partial a^{rs}}{\partial x^t}$$

είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου τανυστή, αντισυμμετρικού για όλους τους δείκτες.

Επειδή ο a_{ij} είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής, έχουμε

$$\bar{a}_{kj} = \frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^j}a_{pq} \tag{1}$$

Διαφορίζοντας τις δύο πλευρές της (1) με $\bar{x}^i$ παίρνουμε

$$\frac{\partial\bar{a}_{kj}}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial a_{pq}}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^j} + a_{pq}\left[\frac{\partial^2x^p}{\partial\bar{x}^k\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^j} + \frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial^2x^q}{\partial\bar{x}^j\partial\bar{x}^i}\right] \tag{2}$$

Παρομοίως,

$$\frac{\partial\bar{a}_{ji}}{\partial\bar{x}^k} = \frac{\partial a_{lm}}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^i} + a_{lm}\left[\frac{\partial^2x^l}{\partial\bar{x}^j\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^i} + \frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial^2x^m}{\partial\bar{x}^i\partial\bar{x}^k}\right] \tag{3}$$

$$\frac{\partial\bar{a}_{ik}}{\partial\bar{x}^j} = \frac{\partial a_{nr}}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^k} + a_{nr}\left[\frac{\partial^2x^n}{\partial\bar{x}^i\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^k} + \frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial^2x^r}{\partial\bar{x}^k\partial\bar{x}^j}\right] \tag{4}$$

και

Προσθέτοντας (2),(3) και (4) παίρνουμε

$$\frac{\partial\bar{a}_{kj}}{\partial\bar{x}^i} + \frac{\partial\bar{a}_{ji}}{\partial\bar{x}^k} + \frac{\partial\bar{a}_{ik}}{\partial\bar{x}^j} = \frac{\partial a_{pq}}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^j} + \frac{\partial a_{lm}}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^i} + \frac{\partial a_{nr}}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^k} \tag{5}$$

[$\because$ Το άθροισμα των άλλων τριών όρων είναι μηδέν ως αποτέλεσμα του γεγονότος ότι ο a_{ij} είναι αντισυμμετρικός]

Επίσης,

$$-\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}b_{sut} = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\left[\frac{\partial a^{tu}}{\partial x^s}+\frac{\partial a^{st}}{\partial x^u}+\frac{\partial a^{us}}{\partial x^t}\right]$$

$$= \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial a^{tu}}{\partial x^s}+\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial a^{st}}{\partial x^u}+\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial a^{us}}{\partial x^t}$$

$$= \frac{\partial a^{tu}}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}+\frac{\partial a^{st}}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}+\frac{\partial a^{us}}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}$$

$$= \frac{\partial a_{pq}}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}+\frac{\partial a_{lm}}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}+\frac{\partial a_{nr}}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}$$

$$= \frac{\partial \bar{a}_{kj}}{\partial \bar{x}^i}+\frac{\partial \bar{a}_{ji}}{\partial \bar{x}^k}+\frac{\partial \bar{a}_{ik}}{\partial \bar{x}^j}$$

$$= -\bar{b}_{ijk}$$

, όπου $= -\bar{b}_{ijk} = \frac{\partial \bar{a}_{kj}}{\partial \bar{x}^i}+\frac{\partial \bar{a}_{ji}}{\partial \bar{x}^k}+\frac{\partial \bar{a}_{ik}}{\partial \bar{x}^j}$

ή $\bar{b}_{ijk} = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}b_{sut}$

Από την (6) έπεται ότι b_{sut} είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου τανυστή

Επίσης από την

$b_{rst} = \frac{\partial a^{st}}{\partial x^r}+\frac{\partial a^{tr}}{\partial x^s}+\frac{\partial a^{rs}}{\partial x^t}$ έπεται ότι $b_{rst} = -b_{rts}, b_{rst} = -b_{srt}$ και $b_{rst} = -b_{tsr}$ [$\because a_{ij}$ είναι αντισυμμετρικός]

Επομένως, b_{rst} είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου τανυστή, ο οποίος είναι αντισυμμετρικός για όλους τους δείκτες.

30.Αν $A^i_{jk}B^{jk} = C^i$, όπου C^i είναι ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα και B^{jk} είναι ένας αυθαίρετος συμμετρικός τανυστής, δείξατε ότι $A^i_{jk} + A^i_{kj}$ είναι ένας τανυστής.

Ας είναι $\bar{A}^i_{jk}\bar{B}^{jk} = \bar{C}^i$ Τώρα $\bar{B}^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}B^{pq}$ [από (2.14)]

και $\bar{C}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}C^s$

Επομένως η (1) μπορεί να γραφεί ως

$\bar{A}^i_{jk}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}B^{pq} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}C^s = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}A^s_{pq}B^{pq}$ [$\because A^i_{jk}B^{jk} = C^i$]

ή, $\left(\bar{A}^i_{jk}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}A^s_{pq}\right)B^{pq} = 0$ (2)

Επειδή το B^{jk} είναι ένας αυθαίρετος συμμετρικός τανυστής, μπορούμε να θέσουμε οποιεσδήποτε επιθυμητές τιμές για τις συνιστώσες του. Έστω μία από τις συνιστώσες του τανυστή μη μηδενική, ας πούμε $B^{mn} \neq 0$ και οι υπόλοιπες να είναι μηδέν. Τότε από τη (2) παίρνουμε

$$\left(\bar{A}^i_{jk}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}-\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^s}A^s_{mn}\right)B^{mn}+\left(\bar{A}^i_{jk}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^m}-\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^s}A^s_{nm}\right)B^{nm}=0$$

ή

$$\left(\bar{A}^i_{jk}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}+\bar{A}^i_{jk}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^m}-\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^s}A^s_{mn}-\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^s}A^s_{nm}\right)B^{nm}=0 \qquad (3)$$

Επειδή $B^{mn}\neq 0$ από την (3) παίρνουμε

$$\bar{A}^i_{jk}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}+\bar{A}^i_{jk}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^m}=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^s}A^s_{mn}+\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^s}A^s_{nm}$$

ή

$$\bar{A}^i_{jk}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}+\bar{A}^i_{kj}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^s}A^s_{mn}+\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^s}A^s_{nm}$$

[Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες j και k από k και j στο δεύτερο όρο της αριστερής πλευράς]

ή,

$$\left(\bar{A}^i_{jk}+\bar{A}^i_{kj}\right)\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^q}=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^s}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^q}\left(A^s_{mn}+A^s_{nm}\right)$$

ή

$$\left(\bar{A}^i_{jk}+\bar{A}^i_{kj}\right)\delta^i_p\delta^k_q=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^s}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^q}\left(A^s_{mn}+A^s_{nm}\right)$$

ή

$$\left(\bar{A}^i_{pq}+\bar{A}^i_{qp}\right)=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^s}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^q}\left(A^s_{mn}+A^s_{nm}\right) \qquad (5)$$

Από την (5) έπεται ότι $A^i_{jk}+A^i_{kj}$ είναι ένας τανυστής του τύπου (1,2).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Οι συνιστώσες A_i ενός συναλλοίωτου διανύσματος στο σύστημα συντεταγμένων (x^i) λαμβάνονται ως ακολούθως:

$A_1=f$, όπου f είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση των x^i και $A_j=0$, $j=2\ldots n$. Δείξατε ότι οι συνιστώσες σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα $(\bar{x}^i)$ δίνονται ως

$$\bar{A}_i=f\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^i}, j=1,2\ldots n$$

2. Αν η σχέση $a^i_j v^j = 0$ ισχύει για κάθε αυθαίρετο ανταλλοίωτο διάνυσμα v^i, δείξατε ότι $a^i_j = 0$.

3. Αν η σχέση $b^{ij} u_i u_j = 0$ ισχύει για κάθε αυθαίρετο συναλλίωτο διάνυσμα u_i, δείχτε ότι $b^{ij} + b^{ji} = 0$.

4. Αν $a^{ij} u_i u_j = b^{ij} u_i u_j$ για ένα αυθέραιτο συναλλοίωτο διάνυσμα u_i, δείξατε ότι $a^{ij} + a^{ji} = b^{ij} + b^{ji}$.

5. Αν a_{ij} είναι ένας συμμετρικός τανυστής και $b_{ij} = a_{ji}$, δείξατε ότι b_{ij} είναι ένας συμμετρικός τανυστής

6.(i) Αν ένας τανυστής T_{ijk} είναι αντι-συμμετρικός στους πρώτους δύο δείκτες από αριστερά και συμμετρικός στους δεύτερους και τρίτους δείκτες από αριστερά, δείχτε ότι $T_{ijk} = 0$.

(ii)Αν ένας τανυστής T_{ijkl} είναι συμμετρικός στους πρώτους δύο δείκτες από αριστερά και συμμετρικός στους δεύτερους και τέταρτους δείκτες από αριστερά, δείξατε ότι $T_{ijkl} = 0$.

7. Δείξατε ότι ένας $n-$ διάστατος χώρος ενός συναλλοίωτου αντισυμμετρικού τανυστή δευτέρας τάξεως έχει το πολύ $\frac{1}{2}n(n-1)$ διαφορετικές αριθμητικές συνιστώσες

8. Αν η σχέση $T_{ijk} A^i A^j A^k = 0$ ισχύει για οποιοδήποτε αυθαίρετο ανταλλοίωτο διάνυσμα A^i, δείξατε ότι

$$T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} + T_{jik} + T_{kji} + T_{ikj} = 0$$

9. Αν η σχέση $T_{ijk} A^i A^j A^k = 0$ ισχύει για οποιοδήποτε αυθαίρετο ανταλλοίωτο διάνυσμα A^i, όπου T_{ijk} είναι ένας τανυστής συμμετρικός στα i και j, δείχτε ότι

$$T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = 0$$

10. Δείξατε ότι

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^s \partial x^t} = -\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^u} \frac{\partial \bar{x}^v}{\partial x^s} \frac{\partial \bar{x}^w}{\partial x^t} \frac{\partial^2 x^u}{\partial \bar{x}^v \partial \bar{x}^w}$$

11. Αν A^r_{st} είναι ένας τανυστής, δείξατε ότι

$$\frac{\partial \bar{A}^r_{st}}{\partial \bar{x}^u} = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^t} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^u} \frac{\partial A^m_{np}}{\partial \bar{x}^q} + \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^t \partial \bar{x}^u} A^m_{np}$$

$$+ \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^t} \frac{\partial^2 x^n}{\partial \bar{x}^s \partial \bar{x}^u} A^m_{np} + \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^t} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^u} \frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^m \partial x^q} A^m_{np}$$

12. Αν f είναι ένα αναλλοίωτο, προσδιορίστε πότε το $\frac{\partial^2 f}{\partial x^p \partial x^q}$ είναι ένας τανυστής.

13. Αν η ισότητα $a^i_j A^j = \sigma A^i$ ισχύει για οποιοδήποτε ανταλλοίωτο διάνυσμα A^i, όπου σ είναι ένα βαθμωτό, δείξατε ότι $a^i_j = \sigma\delta^i_j$.

14. Αν $\delta_{ij} = 1$, όταν $i = j = 0$ όταν $i \neq j$ προσδιορίστε πότε τα δ_{ij} είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου τανυστή δευτέρας τάξεως.

15. Αν A_i είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, προσδιορίστε πότε

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$$

είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή

16. Αν $a^{ij}u_i u_j$ είναι αναλλοίωτο για ένα αυθαίρετο συναλλοίωτο διάνυσμα u_i, δείξατε ότι $a^{ij} + a^{ji}$ είναι ένας τανυστής.

17. Αν η σχέση $T_{ijkl}A^iB^jA^kB^l = 0$ διατηρείται για αυθαίρετα ανταλλοίωτα διανύσματα A^i, B^i δείξατε ότι,

$$T_{ijkl} + T_{ilkj} + T_{kjil} + T_{klij} = 0$$

18. Αν η σχέση $A_{ijkl}A^iB^jA^kB^l = 0$ διατηρείται για αυθαίρετα ανταλλοίωτα διανύσματα A^i, B^i όπου A_{ijkl} ικανοποιεί τις σχέσεις

$$A_{ijkl} + A_{ijlk} = 0, A_{ijkl} + A_{jikl} = 0$$

και

$$A_{ijkl} + A_{iklj} + A_{iljk} = 0$$

δείξατε ότι

$$A_{ijkl} = 0$$

19. Αν B^{ij} είναι οι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή και C_i, D_i είναι οι συνιστώσες δύο συναλλοίωτων διανυσμάτων, δείξατε ότι $B^{ij}C_iD_j$ είναι ένα αναλλοίωτο.

20. $a_{ij}v^iv^j$ είναι ένα αναλλοίωτο, όπου v^i είναι ένα αυθαίρετο ανταλλοίωτο διάνυσμα. Αν a_{ij} είναι ένας συμμετρικός τανυστής και $v^i = A^i + B^i$, δείξατε ότι $a_{ij}A^iB^j$ είναι ένα αναλλοίωτο.

21. Δείξατε ότι οι μετασχηματισμοί συναλλοίωτων διανυσμάτων φτιάχνουν ομάδα.

22. Αν T_{ijkl} είναι ένας τανυστής ο οποίος ικανοποιεί τις σχέσεις $T_{ijkl} + T_{ijlk} = 0$, $T_{ijkl} + T_{jikl} = 0$ και $T_{ijkl} + T_{iklj} + T_{iljk} = 0$ και a_{lm} είναι ένας μη μηδενικός τανυστής έτσι ώστε

$$T_{hijk}a_{lm} + T_{lmhi}a_{jk} + T_{jklm}a_{hi} = 0$$

, δείξατε ότι $T_{hijk} = 0$

23. Αν ο T_{ijk} είναι πλήρως αντισυμμετρικός και οι δείκτες τρέχουν από 1 έως n, δείξατε ότι ο αριθμός των διακριτών μη- μηδενιζόμενων συνιστωσών του T_{ijk} είναι $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

25. Δείξατε ότι οι μετασχηματισμοί των τανυστών του τύπου (1,1) αποτελούν ομάδα.

26. (i) Αν ένα συναλλοίωτο διάνυσμα έχει συνιστώσες $\frac{x^2}{x^1}, \frac{x^1}{x^2}$, σε ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες x^1, x^2, βρείτε τις συνιστώσες τους σε πολικές συντεταγμένεςr, θ.

(ii)Αν ένα συναλλοίωτο διάνυσμα έχει συνιστώσες $(x^1)^2, \frac{(x^1)^3}{x^2}$, σε ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες x^1, x^2, βρείτε τις συνιστώσες τους σε πολικές συντεταγμένεςr, θ.

(iii) Αν ένα διάνυσμα έχει συνιστώσες $\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2}$ σε ένα ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες x, y , δείξατε ότι $\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$ είναι οι συνιστώσες του σε πολικές συντεταγμένες r, θ.

27. Αν X, Y, Z είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος σε ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες στον E_3, βρείτε τις συνιστώσες του διανύσματος σε σφαιρικές συντεταγμένες r, ϕ, θ *.

28. Αν X, Y, Z είναι οι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου διανύσματος σε ένα ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στον E_3, βρείτε τις συνιστώσες του σε σφαιρικές συντεταγμένες.

29. Δείξατε ότι σε ένα $n-$ διάστατο χώρο $(n > 2)$ καμία σχέση της μορφής

$$pa_{ij}b_{hk} + qa_{ih}b_{jk} + ra_{ik}b_{hj} = 0$$

μπορεί να υπάρξει, όπου p, q, r είναι τρία βαθμωτά, a_{ij} είναι ένας συμμετρικός τανυστής έτσι ώστε $|a_{ij}| \neq 0$ και b_{ij} είναι ένας αντι-συμμετρικός τανυστής.

30. Οι συνιστώσες ενός συμμετρικού συναλλοίωτου τανυστή δευτέρας τάξεως σε ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες στο E_3 είναι 1,1,1, 0,0,0. Βρείτε τις συνιστώσες σε

(i)Κυλινδρικές συντεταγμένες r, θ, z και (ii) σφαιρικές συντεταγμένες r, ϕ, θ.

31. Δείξατε ότι οι μετασχηματισμοί των συμβόλων $Christoffel$ φτιάχνουν ομάδα.

32. Αν $A^i_{jk}B^{jk} = C^i$ είναι ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα και B^{jk} είναι ένας αυθαίρετος αντι-συμμετρικός τανυστής, δείχτε ότι $A^i_{jk} - A^i_{kj}$ είναι ένας τανυστής.

33. Αν η σχέση $a_{ij}u^iu^j = 0$ διατηρείται για όλα τα διανύσματα u^i έτσι ώστε $u^i\lambda_i = 0$, όπου λ_i είναι ένα δοσμένο συναλλοίωτο διάνυσμα, δείξατε ότι

$$a_{ij} + a_{ji} = \lambda_i v_j + \lambda_j v_i$$

όπου v_j είναι κάποιο συναλλοίωτο διάνυσμα.

---

*βλέπε κεφ. V

34. Αν η ισότητα $a^i_j u_i = \sigma u_j$ διατηρείται για οποιοδήποτε συναλλοίωτο διάνυσμα u_i έτσι ώστε $u_i v^i = 0$, όπου v^i είναι ένα δοσμένο ανταλοίωτο διάνυσμα, δείξατε ότι $a^i_j = \sigma\delta^i_j + \lambda_j v^i$, όπου λ_i είναι κάποιο συναλλοίωτο διάνυσμα.

35. Αν A^{ij}_{kl} είναι αντισυμμετρικός σε σχέση με τα k και l και αν B^{ij}, προσδιορίζεται από την εξίσωση $B^{ij} = A^{ij}_{kl}C^{kl}$, δείξατε ότι A^{ij}_{kl} είναι ένας τανυστής.

36.(a) Αν a^{ij} είναι οι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή και b_{ij} είναι οι συνιστώσες ενός συμμετρικού τανυστή έτσι ώστε $b = |b_{ij}| \neq 0$, δείξατε ότι $\sqrt{b}a^{ij}$ είναι οι συνιστώσες μίας τανυστικής πυκνότητας.

(b) Αν A^r_s είναι ένας απόλυτος τανυστής, δείξατε ότι $\sqrt{g}A^r_s$ είναι μία τανυστική πυκνότητα.

37. Αν a_{ij} είναι ένας συμμετρικός τανυστής τέτοιος ώστε $|a_{ij}| \neq 0$ και b^{ij} η ελλάσσονα υποορίζουσα του a_{ij} στην ορίζουσα $|a_{ij}|$, προσδιορίστε πότε τα b^{ij} είναι ένας σχετικός τανυστής. Αν είναι, βρείτε το βάρος του.

38. Αν a^{ij} είναι ένας ανταλλοίωτος τανυστής έτσι ώστε $|a^{ij}| \neq 0$, δείχτε ότι $|a^{ij}|$ είναι ένα σχετικό αναλλοίωτο βάρους -2.

39. Δείχτε ότι ϵ_{ijk} και ϵ^{ijk} είναι σχετικοί τανυστές βάρους -1 και 1 αντίστοιχα.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

12. Γενικά, δεν είναι ένας τανυστής.
Είναι ένας τανυστής του τύπου (0,2) στα σημεία όπου το $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ μηδενίζεται.

14. Τα δ_{ij} δεν είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου τανυστή δευτέρου βαθμού

15.$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή

26.

$$(i) sin\theta + cos\theta, -r\frac{sin^2\theta}{cos\theta} + r\frac{cos^2\theta}{sin\theta}$$

$$(ii) 2r^2cos^3\theta, -r^3sin\theta cos^2\theta + r^3\frac{cos^4\theta}{sin\theta}$$

27.Οι συνιστώσες είναι:

$$X(sin\phi cos\theta) + Y(sin\phi sin\theta) + Zcos\phi$$

$$X(rcos\phi cos\theta) + Y(cos\phi sin\theta) - Zsin\phi$$

$$X(-rsin\phi sin\theta) + Y(sin\phi cos\theta)$$

.

28.

$$(sin\phi cos\theta)X + (sin\phi sin\theta)Y + (cos\phi)Z,$$

$$-r(cos\phi cos\theta)X - (rsin\phi sin\theta)Y - \frac{1}{r^2}Z$$

$$-\frac{sin\theta}{rsin\phi}X + \frac{cos\theta}{rsin\phi}Y$$

. 30.$(i)1, r^2, 1, 0, 0, 0.(ii)1, r^2, r^2sin^2\phi, 0, 0, 0.$

37. Είναι ένας σχετικός τανυστής βάρους 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΑΝΥΣΤΩΝ ΣΕ ΧΩΡΟ RIEMANN

II.0 Στο προηγούμενο κεφάλαιο θεωρήσαμε κάποιες αλγεβρικές πράξεις σε τανυστές στον S_n οι οποίες σχηματίζουν την καλούμενη άλγεβρα τανυστών στον S_n. Κάθε μία από αυτές τις πράξεις που δρα σε τανυστές παράγει πάλι τανυστές. Επίσης είναι γνωστό ότι η μερική παραγώγιση ενός συναλλοίωτου διανύσματος δε δίνει ένα τανυστή. Στην πραγματικότητα, η πράξη της μερικής παραγώγισης σε ένα τανυστή δεν παράγει πάντα ένα τανυστή (δες Ασκ.11 Κεφάλαιο 2). Το ερώτημα επομένως που προκύπτει είναι αν ένας νέος τύπος διαφό-
ρισης μπορεί να οριστεί στον S_n ο οποίος όταν εφαρμόζεται σε ένα τανυστή παράγει πάλι ένα τανυστή. Αυτή η ερώτηση μπορεί να τεθεί διαφορετικά ως εξής:

Μπορεί ένας χώρος S_n να λειτουργήσει ως ένα κατάλληλο περιβάλλον για πράξεις του τανυστικού λογισμού; Η απάντηση σε αυτή την ερώτηση δεν είναι καταφατική, εκτός αν πρόσθετα χαρακτηριστικά κατασκευαστούν στη δομή του S_n.

Ένας χώρος που επιδέχεται ένα αντικείμενο καλούμενο ομοπαραλληλική συνοχή* κατέχει επαρκή δομή για να επιτρέψει την ύπαρξη του τανυστικού λογισμού μέσα σε αυτό. Είναι γνωστό πως ένας χώρος Riemann είναι αναγκαία εφοδιασμένος με μια ομοπαραλληλική συνοχή. Επομένως, για την ανάπτυξη του τανυστικού λογισμού μπορούμε είτε να θεωρήσουμε έναν S_n εφοδιασμένο με μια ομοπαραλληλική συνοχή ή μπορούμε να θεωρήσουμε ένα χώρο Riemann. Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε χρήση του δεύτερου για την ανάπτυξη του τανυστικού λογισμού. Αυτή η επιλογή προέρχεται από τη θεώρηση ότι σε ένα χώρο Riemann , ένας νέος τρόπος διαφόρισης, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, μπορεί να οριστεί απλά και αυτός ο τανυστικός λογισμός σε ένα τέτοιο χώρο έχει σημαντικές εφαρμογές στη φυσική, ειδικά στη θεωρία της σχετικότητας.

---

*Ένα σύνολο n^3 συναρτήσεων Γ^l_{ij} σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i) στον S_n λέμε ότι κατασκευάζει τις συνιστώσες μίας **ομοπαραλληλικής συνοχής** αν μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον ακόλουθο νόμο στην αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων από (x^i) σε ένα άλλο σύστημα $(\bar{x}^i)$

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}\Gamma^r_{st} + \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}$$

III.1 Χώρος *Riemann*

Ένας S_n στον οποίο η απόσταση ds μεταξύ δύο γειτονικών σημείων x^i και $x^i + dx^i$ δίνεται από το

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{3.1}$$

όπου g_{ij} είναι αυθαίρετες συναρτήσεις των συντεταγμένων x^i τέτοιες ώστε $|g_{ij}| \neq 0$ και το ds υποτίθεται ότι είναι αναλλοίωτο, καλείται ένας $n-$διάστατος χώρος Riemann . Ο χώρος καλείται χώρος Riemann για να σώσει και να τιμήσει το όνομα του δημιουργού του Bernhard Riemann (1826-1866). Ένας τέτοιος $n-$ διάστατος χώρος μπορεί να δηλωθεί με V_n. Το δεξί μέλος της (3.1) καλείται η μετρική του V_n και το ds καλείται γραμμικό στοιχείο. Οι ποσότητες g_{ij} στην (3.1) καλούνται συντελεστές της μετρικής Riemann .

Από τη στιγμή που $g_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) + \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji})$

$$g_{ij}dx^i dx^j = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji})dx^i dx^j + \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji})dx^i dx^j$$

$$= \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji})dx^i dx^j [\because \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji})dx^i dx^j = 0]$$

Αλλά ο $\frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji})$ είναι συμμετρικός.

Επομένως, δεν υπάρχει απώλεια της γενικότητας στην υπόθεση ότι ο g_{ij} στην (3.1) είναι συμμετρικός. Η φύση του αντικειμένου με αυτούς τους συντελεστές ορίζεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.1. Οι συντελεστές g_{ij} της Riemannian μετρικής κατασκευάζουν ένα συμμετρικό τανυστή τύπου (0,2).

Απόδειξη. Από τη στιγμή που το ds^2 είναι ένα αναλλοίωτο, έπεται ότι το $g_{ij}dx^i dx^j$ είναι ένα αναλλοίωτο. Επίσης από τη στιγμή που το dx^i είναι ένα αυθαίρετο ανταλλοίωτο διάνυσμα, εφαρμόζοντας το νόμο πηλίκου [Δες (iii) της II.13] καταλήγουμε στο ότι τα g_{ij} έιναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (0,2). Αλλά τα g_{ij} μπορεί να θεωρηθούν ως συμμετρικά, όπως φάνηκε παραπάνω. Επομένως, τα g_{ij} είναι οι συνιστώσες ενός συμμετρικού τανυστή του τύπου (0,2). ■

Σημείωση 1 Ο τανυστής g_{ij} καλείται θεμελιώδης τανυστής ή ο μετρικός τανυστής του V_n.

Σημείωση 2 Έστω g^{ij} οι συνιστώσες του αντίστροφου ή του συζυγή τανυστή * του g_{ij} (δες II.14). Τότε ο τανυστής g^{ij} καλείται ο ανταλλοίωτος θεμελιώδης

*Χάριν ευκολίας ο συζυγής τανυστής του g_{ij} εκφράζεται χρησιμοποιώντας το ίδιο γράμμα g(δες σημείωση 3 στην II.14)

τανυστής του V_n. Έτσι

$$g^{ij} = \frac{\text{ελάσσονα υποορίζουσα του } g_{ij} \text{ στην } |g_{ij}|}{|g_{ij}|} \tag{3.2}$$

Σημείωση 3. Από τη στιγμή που ο g^{ij} είναι ο αντίστροφος τανυστής του g_{ij} έχουμε

$$g^{ij}g_{ik} = \delta^i_k \tag{3.3}$$

Επομένως $g^{ij}g_{ij} = n$ (3.4)

III.2 Σχετικοί τανυστές

Σε έναν S_n ένας τανυστής οποιουδήποτε τύπου (συναλλοίωτος ή ανταλλοίωτος) ήταν μία ποσότητα η οποία ήταν αδύνατο να μεταβληθεί. Με την εισαγωγή μίας μετρικής στον S_n αυτός περιορισμός αίρεται στον V_n. Έχουμε στη διάθεσή μας τους θεμελιώδεις τανυστές g_{ij} και g^{ij} οι οποίοι μας δίνουν έναν πλήθος από νέες σχέσεις.
Ξεκινάμε με διανύσματα. Ας είναι A^i και B_i το ανταλλοίωτο και συναλλοίωτο διάνυσμα αντίστοιχα. Τώρα ορίζουμε δύο διανύσματα A_i και B^i ως ακολούθως:

$$A_i = g_{ij}A^j \tag{3.5}$$

$$B^i = g^{ij}B_j \tag{3.6}$$

Τότε το A_i καλείται το σχετικό του διανύσματος A^i και το B^i καλείται το σχετικό του διανύσματος B_i. Έτσι το σχετικό ενός ανταλλοίωτου διανύσματος κατασκευάζεται από το κατέβασμα του δείκτη του από το θεμελιώδη τανυστή και το σχετικό ενός συναλλοίωτου διανύσματος κατασκευάζεται από το ανέβασμα του δείκτη του από το θεμελιώδη τανυστή.
Τώρα

$$g^{ij}A_j = g^{ij}g_{jk}A^k = \delta^i_k A^k = A^i \tag{3.7}$$

Από την (3.7) έπεται ότι ο σχετικός του A_i είναι ο A^i. Έτσι αν A_i είναι ο σχετικός του A^i, τότε ο A^i είναι ο σχετικός του A_i. Επομένως, το A_i και το A^i είναι αμοιβαία σχετικά και έτσι είναι σχετικά διανύσματα.

Στη συνέχεια θεωρούμε τανυστές τάξης μεγαλύτερης του ένα. Κάθε δείκτης ενός τέτοιου τανυστή μπορεί να ανέβει ή να κατέβει από τους θεμελιώδης τανυστές όπως στην περίπτωση των διανυσμάτων. Για παράδειγμα, θεωρούμε τον τανυστή A_{ij}. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε τους ακόλουθους τανυστές ανεβάζοντας τους δείκτες τους

$$A^i_{\cdot j} = g^{ik}A_{kj} \tag{3.8}$$

$$A^j_{i\cdot} = g^{jk} A_{ik} \tag{3.9}$$

και

$$A^{ij} = g^{ik} g^{jl} A_{kl} \tag{3.10}$$

Οι τανυστές $A^i_{\cdot j}$,$A^j_{i\cdot}$,A^{ij} καλούνται σχετικοί του τανυστή A_{ij}. Σημειώνεται ότι οποιοιδήποτε δύο από τους τέσσερις τανυστές A_{ij},$A^i_{\cdot j}$, $A^j_{i\cdot}$,A^{ij} μπορούν να κατασκευαστούν ο ένας από τον άλλο από κατέβασμα και ανέβασμα δεικτών. Για παράδειγμα, $A^i_{\cdot j} = g^{ik} A_{kj} = g^{ik} g_{rj} A^r_{k\cdot}$ [$\because$ από (3.9)$g_{jl} A^j_{i\cdot} = A_{il}$] κ.ο.κ.

Ειδικότερα, από το θεμελιώδη τανυστή g_{ij} παίρνουμε

$$g^i_{\cdot j} = g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$$

$$g^i_{j\cdot} = g^{jk} g_{ik} = \delta^j_i \text{και}$$

$$g^{ij} = g^{ik} g^{jl} g_{kl} g^i_{\cdot j} = g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$$

Επειδή τα g^i_j και g^j_i είναι ίσα, δεν είναι αναγκαίο να τα διακρίνουμε μεταξύ τους, έτσι ώστε να μπορούμε να γράψουμε g^i_j. Το ίδιο ισχύει για ένα συμμετρικό τανυστή A_{ij}, στην περίπτωση για την οποία $A^i_{\cdot k} = A^i_{k\cdot}$ έτσι ώστε σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε απλώς A^i_k.

Επειδή ο μετρικός τανυστής g_{ij} σε έναν E_n με ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες είναι δ^i_j η σχέση (3.5) παίρνει τη μορφή

$$A_i = \delta_{ij} A^j$$

σε αυτές τις συντεταγμένες.

Αυτή η περίπτωση δείχνει ότι στον V_n συναλλοίωτα και ανταλλοίωτα διανύσματα A^i και A_i τα οποία συνδέονται με την ισότητα (3.5) μπορεί να μη θεωρούνται ως δύο διακριτά αντικείμενα που υπάρχουν ανεξάρτητα από το σύστημα συντεταγμένων. Ο λόγος είναι ότι αν υποθέσουμε το αντίθετο, τότε ερχόμαστε στην αντίθεση του ότι στο ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα δε θα τα βρούμε ξεχωριστά. Παρόμοιες περιπτώσεις έχουμε για τανυστές τάξης μεγαλύτερης του ένα.

Αυτές οι περιστάσεις δείχνουν την ιδιαιτερότητα μιας συμφωνίας να ικανοποιούν ζεύγη τανυστών $A_i, A^i, g_{ij}, g^{ij}, A_{ij}, A^{ij}$ ως διαφορετικών τύπων συνιστώσες του ίδιου τανυστή της αντίστοιχης τάξης.

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι οι A_i και A^i είναι οι συναλλοίωτες και οι ανταλλοίωτες συνιστώσες ενός διανύσματος, οι g_{ij} και g^{ij} είναι οι συναλλοίωτες και ανταλλοίωτες συνιστώσες του μετρικού τανυστή του τύπου (0,2) κ.ο.κ. Σε αυτή την περίπτωση το διάνυσμα ή ο τανυστής δηλώνεται με ένα λεπτό γράμμα (κεφαλαίο ή μικρό) του Λατινικού αλφαβήτου. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι τα A^i και A_i είναι οι ανταλλοίωτες και συναλλοίωτες συνιστώσες για ένα

διάνυσμα A κ.ο.κ. για οποιοδήποτε τανυστή. Στον S_n το βαθμωτό γινόμενο δύο διανυσμάτων αντίθετου τύπου θα μπορούσε να κατασκευαστεί μόνο, έτσι όπως το A_iB^i (δες II 12). Αλλά τώρα στον V_n είναι πιθανό να επεκταθεί το αποτέλεσμα ως ακολούθως:

$$A_iB^i = g_{ij}A^jB^i = A^jB_j = g^{ij}A_iB_j \tag{3.11}$$

Ο παραπάνω τύπος μας προετοιμάζει να εισάγουμε την έννοια του μήκους ή του μεγέθους ενός διανύσματος στον V_n. Αυτό γίνεται στην επόμενη παράγραφο.

III.3 Μέγεθος (μήκος) ενός διανύσματος

Το τετράγωνο της ποσότητας (μήκους) ενός διανύσματος A^i ορίζεται ως $g_{ij}A^iA^j$ ενώ αυτό ενός διανύσματος A_i ορίζεται από $g^{ij}A_iA_j$. Σαν αποτέλεσμα από την (3.11) έχουμε

$$A_iA^i = g_{ij}A^jA^i = A^jA_j = g^{ij}A_iA_j \tag{3.12}$$

Από την (3.12) έπεται ότι τα σχετικά διανύσματα A_i και A^j έχουν το ίδιο μήκος. Αν το διάνυσμα με A_i και A^i όπως οι συναλλοίωτες και ανταλλοίωτες συνιστώσες του δηλώνεται από το A και $|A|$ δηλώνει το μέτρο του, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$|A|^2 = g_{ij}A^iA^j = A^iA_i = g^{ij}A_iA_j$$

Μοναδιαίο διάνυσμα:

Ένα διάνυσμα A^i λέγεται ότι είναι μοναδιαίο διάνυσμα αν

$$g_{ij}A^iA^j = 1 \tag{3.13}$$

ενώ ένα διάνυσμα A_i λέγεται ότι είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα αν

$$g^{ij}A_iA_j = 1 \tag{3.14}$$

Μηδενικό διάνυσμα:

Ένα διάνυσμα A^i λέγεται ότι είναι μηδενικό αν

$$g_{ij}A^iA^j = 0 \tag{3.15}$$

ενώ ένα διάνυσμα A_i λέγεται ότι είναι μηδενικό διάνυσμα αν

$$g^{ij}A_iA_j = 0 \tag{3.16}$$

Ένα μηδενικό διάνυσμα θα μπορούσε να διακριθεί από ένα μηδενοδιάνυσμα του οποίου οι συνιστώσες είναι μηδέν.

Ένα παράδειγμα ενός μηδενικού διανύσματος δίνεται ως ακολούθως:
Ας θεωρήσουμε ένα V_4 με ένα γραμμικό στοιχείο

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c^2(dx^4)^2$$

Ας είναι το (-1,0,0,$\frac{1}{c}$) οι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου διανύσματος A^i στον V_4. Σε αυτή την περίπτωση, $g_{11} = -1, g_{22} = -1, g_{33} = -1, g_{44} = c^2$ και τα άλλα g_{ij} είναι μηδέν.

Επίσης $A^1 = -1, A^2 = 0, A^3 = 0, A^4 = \frac{1}{c}$.

Επομένως, $g_{ij}A^iA^j = g_{11}A^1A^1 + g_{22}A^2A^2 + g_{33}A^3A^3 + g_{44}A^4A^4 = (-1)(-1 \cdot -1) + (-1)(0 \cdot 0) + (-1)(0 \cdot 0) + c^2(\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{c}) = -1 + 1 = 0$

Επομένως, το A^i είναι ένα μηδενικό διάνυσμα στον V_4 που θεωρούμε (από 3.15). Οι συνιστώσες του δεν είναι όλες μηδέν. Έτσι είναι διαφορετικό από ένα μηδενικό διάνυσμα.

III.4 Γωνία μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων

Η γωνία θ μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων A^i και B^i ορίζεται ως ακολούθως:

$$cos\theta = \frac{g_{ij}A^iB^j}{\sqrt{g_{ij}A^iA^j}\sqrt{g_{ij}B^iB^j}} \tag{3.17}$$

Σημείωση 1. Σημειώνεται ότι αν δύο διανύσματα είναι τέτοια ώστε αν ένα από αυτά είναι ένα μηδενικό διάνυσμα ή και τα δύο είναι έτσι, τότε η γωνία μεταξύ τους δεν ορίζεται.

Σημείωση 2. Η γωνία θ μεταξύ δύο μη μηδενικών συναλλοίωτων διανυσμάτων A_i και B_i δίνεται από το

$$cos\theta = \frac{g^{ij}A_iB_j}{\sqrt{g^{ij}A_iA_j}\sqrt{g^{ij}B_iB_j}} \tag{3.18}$$

Σημείωση 3. Αν A και B είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα με $A^i, A_i \cdot B^i, B_i$ ως οι αντίστοιχες ανταλλοίωτες και συναλλοίωτες συνιστώσες, τότε η γωνία θ μεταξύ των A και B δίνεται από το

$$cos\theta = \frac{A^iB_i}{\sqrt{A^jA_j}\sqrt{B^kB_k}} \tag{3.19}$$

Ορθογωνιότητα δύο διανυσμάτων:

Δύο διανύσματα A^i και B^i λέγεται ότι είναι ορθογώνια αν

$$g_{ij}A^iB^j = 0 \tag{3.20}$$

ενώ δύο διανύσματα A_i και B_i λέγεται ότι είναι ορθογώνια αν

$$g^{ij}A_iB_j = 0 \tag{3.21}$$

Έπεται από τις (3.17) και (3.18) ότι η γωνία μεταξύ δύο μη μηδενικών ορθογώνιων διανυσμάτων A^i, B^i είναι $\frac{\pi}{2}$ και ότι μεταξύ δύο μη μηδενικών ορθογώνιων διανυσμάτων A_i, B_i είναι επίσης $\frac{\pi}{2}$. Σύμφωνα με τον ορισμό της ορθογωνιότητας που δίνεται από την (3.20) και (3.21) έπεται ότι ένα μηδενικό διάνυσμα A^i ή A_i είναι αυτο-ορθογώνιο.

Σύμβολα του Christofel

Έχει ήδη επισημανθεί ότι στον S_n η μερική διαφόριση ενός τανυστή δεν παράγει, γενικα, ένα τανυστή. Με την εισαγωγή μίας μετρικής στον S_n το περιβάλλον έχει αλλάξει και η ερώτηση που προκύπτει είναι το κατα πόσο στον V_n μία καινούργια πράξη διαφόρισης μπορεί να εισαχθεί έτσι ώστε όταν εφαρμόζεται σε ένα τανυστή να παράγει πάλι ένα τανυστή. Η απάντηση σε αυτή την ερώτηση είναι καταφατική, αλλά στην επίτευξη αυτής της κατάφασης είναι πάλι απαραίτητοι οι θεμελιώδης τανυστές. Πράγματι, μια νέα τέτοια πράξη διαφόρισης μπορεί να εισαχθεί με τη βοήθεια δύο συναρτήσεων κατασκευασμένων σε όρους μερικών παραγώγων των συνιστωσών του θεμελιώδους τανυστή. Είναι τα σύμβολα του Christofel πρώτου και δεύτερου είδους δηλωμένα αντίστοιχα με $[ij,k]$ και $\{^l_{ij}\}$ και ορίζονται ως ακολούθως:

$$[ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \text{ και}$$

$$\{^l_{ij}\} = \frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = g^{lk}[ij,k] \tag{3.23}$$

Σημείωση 1. Αυτά τα σύμβολα ορίστηκαν από τον E.B.Christofel το 1869 ο οποίος χρησιμοποίησε τους τύπους $[ij,k]$ και $\{^l_{ij}\}$ για τα σύμβολα, αλλά τα παρόντα σύμβολα υιοθετήθηκαν διαδοχικά είναι σε συμφωνία με τη σύμβαση άθροισης.

Σημείωση 2. Οποιοδήποτε είδος τέτοιων συμβόλων στον V_n είναι ένα σύνολο συναρτήσεων συντεταγμένων x^i σε ένα δοσμένο σύστημα συντεταγμένων (x^i). Η φύση δύο τέτοιων αντικειμένων, κάθε ένα από τα οποία κατασκευάζεται από n^3 συναρτήσεις, θα οριστεί στις III.8 και III.9.

Σημείωση 3.Στην περίπτωση ενός Ευκλείδειου χώρου E_n το γραμμικό στοιχείο σε ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2$$

Έτσι στην περίπτωση αυτή $g_{11} = g_{22} = \cdots = g_{nn} = 1$ και τα άλλα g_{ij} είναι μηδέν. Τώρα έπεται από τη (3.22) και (3.23) ότι στον E_n τα σύμβολα $Christoffel$ $[ij, k]$ και $\{{}^{l}_{ij}\}$ είναι όλα μηδέν.

III.6 Μερικές ιδιότητες των συμβόλων $Christoffel$ Σε αυτή την παράγραφο θα αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες αυτών των συμβόλων:

$(i)[ij, k] = [ji, k]$
$(ii)\{{}^{l}_{ij}\} = \{{}^{l}_{ji}\}$
$(iii)[ij, m] = g_{lm}\{{}^{l}_{ij}\}$
$(iv)\{{}^{m}_{il}\} = g^{mj}[il, j]$
$(v)[ij, k] + [kj, i] = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$
$(vi) - g^{mi}\{{}^{k}_{il}\} - g^{ki}\{{}^{m}_{il}\} = \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}$
$(vii)\{{}^{i}_{ij}\} = \frac{\partial}{\partial x^j}(log\sqrt{g})$
όπου $g = |g_{ij}|$

Περιπτώσεις (i) **και** (ii)**.** Έπονται κατευθείαν από τις (3.22) και (3.23) αντίστοιχα.

Περίπτωση (iii)**.** Εσωτερικό γινόμενο του $\{{}^{l}_{ij}\}$ με g_{lm} δίνει $g_{lm}\{{}^{l}_{ij}\} = g_{lm}g^{lk}[ij, k]$ [από (3.23)] $= \delta^k_m[ij, k] = [ij, m]$ ■

Περίπτωση (iv)**.** Έχουμε $g^{mj}[il, j] = g^{mj}g_{pj}\{{}^{p}_{il}\}$ [από περίπτωση (iii)] $= \delta^m_p\{{}^{p}_{il}\} = \{{}^{m}_{il}\}$ ■

Περίπτωση (v)**.** Από την (3.22) παίρνουμε $[ij, k] + [kj, i] = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}) = \frac{1}{2}2\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ ■

Περίπτωση (vi)**.** Έχουμε $g_{ij}g^{ik} = \delta^k_j$ [από (3.3)]

διαφορίζοντας κάθε πλευρά από την παραπάνω σχέση ως προς x^l παίρνουμε

$$g_{ij}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}g^{ik} = 0 \tag{3.24}$$

Εσωτερικός πολλαπλασιασμός της (3.24) με g^{jm} δίνει

$g_{ij}g^{jm}\frac{\partial gik}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}g^{ik}g^{jm} = 0$
ή $\frac{\partial g^{mk}}{\partial x^l} + g^{jm}g^{ik}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = 0$
ή, $-g^{jm}g^{ik}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = \frac{\partial g^{mk}}{\partial x^l}$
ή, $-g^{jm}g^{ik}([il, j] + [jl, i]) = \frac{\partial g^{mk}}{\partial x^l}$
ή $-g^{jm}g^{ik}[il, j] - g^{jm}g^{ik}[jl, i] = \frac{\partial g^{mk}}{\partial x^l}$
ή $-g^{ik}\{{}^{m}_{il}\} - g^{jm}\{{}^{k}_{jl}\} = \frac{\partial g^{mk}}{\partial x^l}$
ή$-g^{ik}\{{}^{m}_{il}\} - g^{im}\{{}^{k}_{il}\} = \frac{\partial g^{mk}}{\partial x^l}$ [Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες j και i στο δεύτερο όρο της αριστερής πλευράς] ■

Περίπτωση (vii)**.** Από την (3.2) έχουμε

$$g^{ik} = \frac{\text{ελάσσονα υποορίζουσα του } g_{ik} \text{ στην } |g_{ik}|}{|g_{ik}|} = \frac{G^{ik}}{g} \tag{3.25}$$

όπου G^{ik} δηλώνει την ελάσσονα υποορίζουσα του g_{ik} στην $|g_{ik}|$ και

$$g = |g_{ik}| \tag{3.26}$$

Επειδή η παράγωγος μιας ορίζουσας λαμβάνεται από τη διαφόριση κάθε γραμμής αυτής χωριστά και κρατώντας τις άλλες γραμμές ίδιες και προσθέτοντας τα αποτελέσματα των οριζουσών που προέκυψαν, από την (3.26) παίρνουμε $\frac{\partial g}{\partial x^j} = G^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$
$= gg^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ [από (3.25)] $= gg^{ik}([ij,k]+[kj,i])$ [από (v)] $= gg^{ik}[ij,k]+gg^{ki}[ij,k]$ [Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες k και i από i και k στο δεύτερο όρο του δεξιού μέλους] $= 2gg^{ik}[ij,k] = 2g\{{}^{i}_{ij}\}$ [από (iv)] Επομένως $\{{}^{i}_{ij}\} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(log\sqrt{g})$ ■

Σημείωση. Οι ποσότητες $\{{}^{i}_{ij}\}$ καλούνται μερικές φορές συστελλόμενα σύμβολα $Christoffel$. Ο τύπος (vii) για τα $\{{}^{i}_{ij}\}$ παίζει σημαντικό ρόλο στον τανυστικό λογισμό.

III.7 Μία χρήσιμη σχέση

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε την ακόλουθη χρήσιμη σχέση η οποία θα χρειαστεί στην παράγραφο III.8:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^l} + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^l}\right) g_{jk} \\
&+ \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^m}\right) g_{ik} \\
-&\left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^n} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^m}\right) g_{ij} = 2\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} g_{ij}
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^l} + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^l}\right) g_{jk} \\
&= \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^l} + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^l}\right) g_{ji}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

[Αντικαθιστώντας το βουβό δείκτη k με i]

Επίσης,

$$\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^m}\right) g_{ik}$$

$$= \left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^m} \right) g_{ij} \tag{3.28}$$

[Αντικαθιστώντας το βουβό δείκτη k με j]

Επομένως,

$$\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^l} + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^l} \right) g_{jk}$$

$$+ \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^m} \right) g_{ik}$$

$$- \left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^n} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^m} \right) g_{ij}$$

$$= [\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^l} + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^l} + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m}$$

$$+ \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^m} - \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^n} - \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^n}] g_{ij}$$

[από (3.27) και (3.28)]

$$= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^l} g_{ij} + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} g_{ij}$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^l} g_{ij} + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} g_{ji}$$

$$= 2 \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} g_{ij}$$

■

Σημείωση Δηλώνοντας το $\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^m}$ με T^{ij}_{lmn}, η παραπάνω σχέση μπορεί να ξαναγραφεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$(T^{jk}_{mnl} + T^{kj}_{nml}) g_{jk} + (T^{ki}_{nlm} + T^{ik}_{lnm}) g_{ki} - (T^{ij}_{lmn} + T^{ji}_{mln}) g_{ij} = 2T^{ij}_{nlm} g_{ij}$$

III.8 Νόμος μετασχηματισμού των συμβόλων $Chrisoffel$ πρώτου είδους

Επειδή ο g_{ij} είναι ένας τανυστής του τύπου (0,2) έχουμε

$$\bar{g}_{lm} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} g_{ij} \tag{3.29}$$

Διαφορίζοντας την (3.29) ως προς $\bar{x}^n$ παίρνουμε

$$\frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial \bar{x}^n} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^n}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} g_{ij} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^n} g_{ij} \tag{3.30}$$

Παρομοίως,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial \bar{x}^l} &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^m \partial x^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} g_{ij} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^l g_{jk}} \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} + \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial \bar{x}^m \partial x^l}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} g_{jk} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} g_{ij}\end{aligned} \tag{3.31}$$

[Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες i,j,k με j, k, i αντίστοιχα]
Επιπλέον

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{g}_{ln}}{\partial \bar{x}^m} &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} g_{ij} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} g_{ik} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} g_{ik} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^n}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} g_{ik}\end{aligned} \tag{3.32}$$

[Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες j και k με k και j αντίστοιχα]
Προσθέτοντας τις (3.31) και (3.32) και αφαιρώντας την (3.30) από το αποτέλεσμα που λάβαμε, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial \bar{x}^l} + \frac{\partial \bar{g}_{ln}}{\partial \bar{x}^m} - \frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial \bar{x}^n}\right) &= \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \\ &+ \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m \partial x^l} + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^l}\right) g_{jk} \\ &+ \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^n}\right) g_{ik}\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^n}+\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^n}\right) g_{ij}$$

$$=\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}$$

$$+2\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} g_{ij}$$

[από τη σχέση της III.7]
Επομένως

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial \bar{x}^l}+\frac{\partial \bar{g}_{ln}}{\partial \bar{x}^m}-\frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial \bar{x}^n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}$$

$$+\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} g_{ij}$$

ή

$$\overline{[lm,n]}=[ij,k]\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}+g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} \tag{3.33}$$

Η εξίσωση (3.33) δίνει το νόμο μετασχηματισμού των συνιστωσών $[ij,k]$ των συμβόλων $Christoffel$ πρώτου είδους.

Από το νόμο αυτό έπεται ότι οι συνιστώσες $[ij,k]$ δε μετασχηματίζονται όπως ένας τανυστής λόγω της παρουσίας του δεύτερου όρου στο δεξί μέλος της (3.33). Πρέπει να σημειωθεί ότι με απουσία του δεύτερου όρου τα $[ij,k]$ θα μπορούσαν να μετασχηματίζονται όπως ένας τανυστής του τύπου (0,3).

III.9 Νόμος μετασχηματισμού των συμβόλων $Christoffel$ δεύτερου είδους

Επειδή ο g_{ij} είναι ένας τανυστής του τύπου (2,0) έχουμε

$$\bar{g}^{nb}=g^{rs}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s} \tag{3.34}$$

Εσωτερικό γινόμενο των δύο πλευρών της (3.33) με τις σχετικές πλευρές της (3.34) δίνει

$$\bar{g}^{np}\overline{[lm,n]}=g^{rs}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}[ij,k]\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}$$

$$+g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial x^m}g^{rs}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}$$

ή

$$\overline{\left\{{p \atop lm}\right\}} = g^{rs}\frac{\partial x^k}{\partial x^r}[ij,k]\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}$$

[από την (iv) της III.6]

$$+g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}g^{rs}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m}$$

$$= g^{ks}[ij,k]\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}$$

[$\because \frac{\partial x^k}{\partial x^r} = \delta^k_r$]

$$+g_{rj}g^{rs}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m}$$

$$= \left\{{s \atop ij}\right\}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} + \delta^s_j\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m}$$

[από (iv) της III.6]

$$= \left\{{s \atop ij}\right\}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} \tag{3.35}$$

Η σχέση (3.35) δίνει το νόμο μετασχηματισμού των συνιστωσών $\left\{{l \atop ij}\right\}$ των συμβόλων $Christoffel$ δεύτερου είδους. Από αυτό το νόμο έπεται ότι οι συνιστώσες $\left\{{l \atop ij}\right\}$ δεν μετασχηματίζονται σαν ένας τανυστής λόγω παρουσίας του δεύτερου όρου της (3.35). Αν ο δεύτερος όρος απουσίαζε, τα $\left\{{l \atop ij}\right\}$ θα μετασχηματίζονταν σαν ένας τανυστής του τύπου (1,2).

Σημείωση. Σημειώνεται ότι τα σύμβολα $Christoffel$ είναι αντικείμενα διαφορετικά από τους τανυστές, επειδή οι συνιστώσες τους δε μετασχηματίζονται σύμφωνα με το νόμο που αντιστοιχεί σε ένα τανυστή του τύπου (0,3) ή (1,2).

Αλλά ο νόμος σύμφωνα με τον οποίο τα $\left\{{l \atop ij}\right\}$ μετασχηματίζονται αξίζει να σημειωθεί. Ένα αντικείμενο του S_n το οποίο είναι ένα σύστημα τρίτης τάξης του τύπου T^i_{jk} τέτοιο ώστε οι συνιστώσες του μετασχηματίζονται σύμφωνα με αυτό το νόμο καλείται μία ομοπαραλληλική συνοχή (Δες την υποσημείωση της III.0). Γι' αυτό το λόγο τα σύμβολα $Christoffel$ δεύτερου είδους μερικές φορές καλούνται και συνοχή $Christoffel$. Στην επόμενη παράγραφο θα αποδείξουμε ένα λήμμα που σχετίζεται με τη συνοχή $Christoffel$ $\left\{{l \atop ij}\right\}$ η οποία θα παίξει ένα ζωτικό ρόλο στην εισαγωγή ενός νέου είδους διαφόρισης στον V_n.

III.10 **Ένα λήμμα**

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} \overline{\left\{ {p \atop lm} \right\}} - \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \left\{ {r \atop ij} \right\}$$

Απόδειξη. Το εσωτερικό γινόμενο της (3.35) με $\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}$ δίνει

$$\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} \overline{\left\{ {p \atop lm} \right\}} = \left\{ {s \atop ij} \right\} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} + \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m}$$

$$= \left\{ {s \atop ij} \right\} \delta^r_s \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} + \delta^r_j \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} = \left\{ {r \atop ij} \right\} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m}$$

Επομένως, $\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} \overline{\left\{ {p \atop lm} \right\}} - \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \left\{ {r \atop ij} \right\}$ ■

III.1 Συναλλοίωτη διαφόριση τανυστών

Στο κεφάλαιο II εδείχθη ότι αλγεβρικές πράξεις που αποτελούν τη λεγόμενη τανυστική άλγεβρα στον S_n είναι τέτοιες ώστε όταν εφαρμόζονται σε τανυστές, παράγουν πάλι τανυστές. Αλλά σύμφωνα με τη διαφορική πράξη (διαφόριση) το θέμα είναι κάπως διαφορετικό, επειδή παρόλο που η μερική διαφόριση ενός αναλλοίωτου δίνει ένα τανυστή του τύπου (0,1)(δηλαδή ένα συναλλοίωτο διάνυσμα) η μερική διαφόριση ενός τανυστή της τάξης ≥ 1 δεν παράγει, γενικά, ένα τανυστή. Η ανάγκη επομένως έρχεται να εισάγει ένα νέο είδος διαφόρισης το οποίο όταν εφαρμόζεται σε ένα τανυστή θα παράγει ένα τανυστή. Μία τέτοια διαφόριση, η οποία ονομάζεται *συναλλοίωτη διαφόριση* θα παρουσιαστεί σε αυτή την παράγραφο. Σημειώνεται ότι η λέξη 'Συναλλοίωτη' χρησιμοποιήθηκε επίσης για να εννοηθεί, ανεξάρτητα από την αρχή των συντεταγμένων, σαν μία αρχή του Συναλλοίωτου της γενικής θεωρίας της σχετικότητας η οποία ισχυρίζεται ότι οι νόμοι της φυσικής μπορούν να είναι ανεξάρτητοι από τις χωροχρονικές συντεταγμένες. Φαίνεται περισσότερο λογικό ότι το όνομα συναλλοίωτη διαφόριση οφείλεται σε αυτή την ιδιότητα.

Συναλλοίωτη διαφόριση ενός αναλλοίωτου:

Η συναλλοίωτη παράγωγος ενός αναλλοίωτου ϕ ορίζεται να είναι η μερική παράγωγος του ϕ. Θα μπορούσε να δηλωθεί με $\phi_{,j}$. Έτσι

$$\phi_{,j} = \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \tag{3.36}$$

Επειδή $\frac{\partial \phi}{\partial x^j}$ είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, η συναλλοίωτη παράγωγος ενός αναλλοίωτου είναι ένας τανυστής.

Σημείωση. Έτσι η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή του τύπου (0,0) είναι ένας τανυστής του τύπου (0,1)

(ii) **Συναλλοίωτη διαφόριση συναλλοίωτων διανυσμάτων:**
Ας είναι A_i οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος.
Τότε $\bar{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_k$
Διαφορίζοντας τις δύο πλευρές της παραπάνω εξίσωσης με $\bar{x}^j$ παίρνουμε,

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial A_k}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} A_k =$$

$$= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial A_k}{\partial x^l} + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p}\overline{\left\{ {p \atop ij} \right\}} A_k - \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}\left\{ {k \atop mn} \right\} A_k \quad \text{(Από το Λήμμα της III.10)}$$

ή ,$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j} - \overline{\left\{ {p \atop ij} \right\}} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p} A_k$

$$= \frac{\partial A_k}{\partial x^l}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} - \left\{ {k \atop mn} \right\}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} A_k$$

$$= \frac{\partial A_t}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} - \left\{ {r \atop ts} \right\}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} A_r$$

[Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες k και l στον πρώτο όρο της δεξιάς πλευράς με t και s αντίστοιχα και τους βουβούς δείκτες k, m, n στο 2ο όρο της δεξιάς πλευράς με r, t και s αντίστοιχα,]

$$= \left[\frac{\partial A_t}{\partial x^s} - \left\{ {r \atop ts} \right\} A_r\right]\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}$$

ή,

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j} - \overline{\left\{ {p \atop ij} \right\}} \bar{A}_p = \left[\frac{\partial A_t}{\partial x^s} - \left\{ {r \atop ts} \right\} A_r\right]\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \tag{3.37}$$

Από την (3.37) έπεται ότι $\frac{\partial A_t}{\partial x^s} - \left\{ {r \atop ts} \right\} A_r$ είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου τανυστή του τύπου (0,2).

Αυτός ο τανυστής ορίζεται ωστέ να είναι η συναλλοίωτη παράγωγος ενός συναλλοίωτου διανύσματος με συνιστώσες A_i. Οι συνιστώσες $\frac{\partial A_t}{\partial x^s} - \left\{ {r \atop ts} \right\} A_r$ της συναλλοίωτης παραγώγου δηλώνονται από το $A_{t,s}$.

Έτσι

$$A_{t,s} = \frac{\partial A_t}{\partial x^s} - \left\{ {r \atop ts} \right\} A_r \tag{3.38}$$

Σημείωση. Σημειώνεται ότι η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή του τύπου (0,1) είναι ένας τανυστής του τύπου (0,2).

Συναλλοίωτη παραγώγιση ανταλλοίωτων διανυσμάτων:
Ας είναι A^i οι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου διανύσματος . Τότε

$$A^k = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\bar{A}^i [\text{από (2.13)}] \tag{3.39}$$

Διαφορίζοντας τις δύο πλευρές της (3.39) με x^j παίρνουμε

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \frac{\partial \bar{A}^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} + \bar{A}^i \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}$$

$$= \frac{\partial \bar{A}^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} + \bar{A}^i \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\left[\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}\overline{\left\{{m \atop ip}\right\}} - \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^p}\left\{{k \atop ts}\right\}\right] \text{ [από το Λήμμα της III.10]}$$

$$= \frac{\partial \bar{A}^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} + \bar{A}^i \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}\overline{\left\{{m \atop ip}\right\}} - A^t\left\{{k \atop ij}\right\}$$

ή,

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^t\left\{{k \atop ij}\right\} = \left[\frac{\partial \bar{A}^i}{\partial \bar{x}^p} + \bar{A}^m\overline{\left\{{i \atop mp}\right\}}\right]\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \tag{3.40}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της (3.40) με $\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}$ παίρνουμε,

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\left[\frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^{tk}_{\ tj}\right] = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\left[\frac{\partial \bar{A}^i}{\partial \bar{x}^p} + \bar{A}^m\overline{\left\{{i \atop mp}\right\}}\right]$$

$$= \left[\frac{\partial \bar{A}^i}{\partial \bar{x}^p} + \bar{A}^m\overline{\left\{{i \atop mp}\right\}}\right] \ [\because \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} = 1]$$

Επομένως

$$\frac{\partial \bar{A}^i}{\partial \bar{x}^p} + \bar{A}^m\overline{\left\{{i \atop mp}\right\}} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\left[\frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^t\left\{{k \atop tj}\right\}\right] \tag{3.41}$$

Από την (3.41) έπεται ότι τα $\frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^t\{{k \atop tj}\}$ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (1,1). Αυτός ο τανυστής ορίζεται να είναι η συναλλοίωτη παράγωγος ενός ανταλλοίωτου διανύσματος με συνιστώσες A^i. Οι συνιστώσες $\frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^t\{{k \atop tj}\}$ θα δηλώνονται από το $A^k_{,j}$.

Έτσι$A^k_{,j} = \frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^t\{{k \atop tj}\}$

Σημείωση Σημειώνεται ότι η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή του τύπου (1,0) είναι ένας τανυστής τύπου (1,1).

(iv) **Συναλλοίωτη διαφόριση τανυστών του τύπου (0,2):**

Έστω A_{ij} οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (0,2)

Τότε

$$\bar{A}_{pq} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}A_{ij}$$

Διαφορίζοντας την (3.43) με $\bar{x}^r$ παίρνουμε

$$\frac{\partial \bar{A}_{pq}}{\partial \bar{x}^r} = \frac{A_{ij}}{\partial x^h}\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}$$

$$+A_{ij}\frac{\partial^2 x^i}{\partial\bar{x}^r\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^q}+A_{ij}\frac{\partial^2 x^j}{\partial\bar{x}^r\partial\bar{x}^q}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^p}$$

$$=\frac{A_{ij}}{\partial x^h}\frac{\partial x^h}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^q}$$

$$+A_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^q}\left[\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^s}\overline{\left\{{s \atop rp}\right\}}-\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^p}\left\{{i \atop mn}\right\}\right]$$

$$+A_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^p}\left[\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^t}\overline{\left\{{t \atop rq}\right\}}-\frac{\partial x^u}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^v}{\partial\bar{x}^q}\left\{{j \atop uv}\right\}\right]$$

[από το Λήμμα III.10]

ή,

$$\frac{\partial\bar{A}_{pq}}{\partial\bar{x}^r}=\overline{\left\{{s \atop rp}\right\}}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^q}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^s}A_{ij}-\overline{\left\{{t \atop rq}\right\}}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^t}A_{ij}$$

$$+\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^h}\frac{\partial x^h}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^q}-\left\{{i \atop mn}\right\}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^q}A_{ij}$$

$$-\left\{{j \atop uv}\right\}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^v}{\partial\bar{x}^q}\frac{\partial x^u}{\partial\bar{x}^r}A_{ij}$$

$$=\frac{\partial A_{ij}}{\partial\bar{x}^h}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^q}\frac{\partial x^h}{\partial\bar{x}^r}-A_{tj}\left\{{t \atop hi}\right\}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^q}\frac{\partial x^h}{\partial\bar{x}^r}$$

$$-A_{it}\left\{{t \atop hj}\right\}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^q}\frac{\partial x^h}{\partial\bar{x}^r}$$

[Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες i, m, n στο δεύτερο όρο της δεξιάς πλευράς με t, h, i αντίστοιχα και τους βουβούς δείκτες j, u, v στον τρίτο όρο αυτής της πλευράς με t, h και j αντίστοιχα.]

Επομένως

$$\frac{\partial\bar{A}_{pq}}{\partial\bar{x}^r}-\overline{\left\{{s \atop rp}\right\}}\bar{A}_{sq}-\overline{\left\{{t \atop rq}\right\}}\bar{A}_{pt}$$

$$=\left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^h}-A_{tj}\left\{{t \atop ih}\right\}-A_{it}\left\{{t \atop jh}\right\}\right]\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^q}\frac{\partial x^h}{\partial\bar{x}^r}$$

[από (3.43)]

ή

$$\frac{\partial\bar{A}_{pq}}{\partial\bar{x}^r}-\bar{A}_{sq}\overline{\left\{{s \atop rp}\right\}}-\bar{A}_{pt}\overline{\left\{{t \atop rq}\right\}}$$

$$=\left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^h}-A_{tj}\left\{{t \atop ih}\right\}-A_{it}\left\{{t \atop jh}\right\}\right]\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^q}\frac{\partial x^h}{\partial\bar{x}^r} \tag{3.44}$$

Από την (3.44) έπεται ότι

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^h} - A_{tj}\{^t_{ih}\} - A_{it}\{^t_{jh}\}$$

είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (0,3).

Αυτός ο τανυστής ορίζεται να είναι η συναλλοίωτη παράγωγος ενός συναλλοίωτου τανυστή με συνιστώσες A_{ij}.

Οι συνιστώσες $\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^h} - A_{tj}\{^t_{ih}\} - A_{it}\{^t_{jh}\}$ θα δηλώνονται ως $A_{ij,h}$.

Έτσι

$$A_{ij,h} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^h} - A_{tj}\{^t_{ih}\} - A_{it}\{^t_{jh}\} \tag{3.45}$$

Σημείωση 1. Σημειώνεται ότι η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή του τύπου (0,2) είναι ένας τανυστής του τύπου (0,3).

Σημείωση 2. Παρομοίως μπορούμε να εισάγουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο ενός ανταλλοίωτου τανυστή τάξεως 2 με τον ακόλουθο τρόπο:

$$A^{ik}_{,j} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^j} + \{^i_{jl}\}A^{lk} + \{^k_{jl}\}A^{il} \tag{3.46}$$

Σημειώνεται ότι η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή του τύπου (2,0) είναι ένας τανυστής του τύπου (2,1).

Συναλλοίωτη διαφόριση τανυστών του τύπου (1,1):

Με την εισαγωγή συναλλοίωτων παραγώγων τανυστών τύπου (1,0),(0,1), (2,0) και (0,2) έχουμε χρησιμοποιήσει το λήμμα ΙΙΙ.10 και ο χαρακτήρας του τανυστή σε κάθε μία από αυτές τις παραγώγους έχει καθοριστεί από τον ορισμό της εξίσωσης ενός συγκεκριμένου τύπου τανυστή. Όμως, για την εισαγωγή συναλλοίωτων παραγώγων μικτών τανυστών θα μπορούσαμε να υιοθετήσουμε μία διαφορετική διαδικασία στην οποία το λήμμα ΙΙΙ.10 δε θα χρησιμοποιείται και για να καθορίσουμε το χαρακτήρα του τανυστή των παραγώγων, θα χρησιμοποιηθεί ο νόμος του πηλίκου τανυστών. Η διαδικασία αναπαρίσταται για ένα τανυστή του τύπου (1,1). Ας είναι A^i_k οι συνιστώσες ενός μικτού τανυστή τάξεως 2. Υποθέτουμε επίσης ότι τα a_i και b^k είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου και ενός ανταλλοίωτου διανύσματος αντίστοιχα.

Τότε το

$$\phi = A^i_k a_i b^k \tag{3.47}$$

είναι ένα αναλλοίωτο. Επομένως $\frac{\partial \phi}{\partial x^j}$ είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα. Έστω C^i οι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου διανύσματος. Τότε $C^j \frac{\partial \phi}{\partial x^j}$ είναι επίσης ένα αναλλοίωτο.

Τώρα

$$C^j \frac{\partial \phi}{\partial x^j} = C^j \left[\frac{\partial A^i_k}{\partial x^j} a_i b^k + A^i_k \frac{\partial a_i}{\partial x^j} b^k + A^i_k a_i \frac{\partial b_k}{\partial x^j} \right]$$

[από 3.47]

$$= C^j \frac{\partial A^i_k}{\partial x^j} a_i b^k + C^j A^i_k \frac{\partial a_i}{\partial x^j} b^k + C^j A^i_k a_i \frac{\partial b_k}{\partial x^j}$$

$$= C^j \frac{\partial A^i_k}{\partial x^j} a_i b^k + C^j A^i_k b^k [a_{i,j} + \{^l_{ij}\} a_l]$$

$$+ C^j A^i_k a_i [b^k_{,j} - \{^k_{jl}\} b^l]$$

[από (3.38) και (3.42)]

$$= C^j \frac{\partial A^i_k}{\partial x^j} a_i b^k + C^j \{^l_{ij}\} A^i_k a_l b^k - C^j \{^k_{jl}\} A^i_k a_i b^l$$

$$+ C^j A^i_k a_{i,j} b^k + C^j A^i_k a_i b^k_{,j}$$

$$= C^j \frac{\partial A^i_k}{\partial x^j} a_l b^k + C^j \{^i_{lj}\} A^l_k a_i b^k - C^j \{^l_{jk}\} A^i_l a_i b^k$$

$$+ C^j A^i_k a_{i,j} b^k + C^j A^i_k a_l b^k_{,j}$$

[Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες l και i στο δεύτερο όρο της δεξιάς πλευράς με i και l και τους βουβούς δείκτες l και k στον τρίτο όρο αυτής της πλευράς με k και l.]

$$= C^j \left\{ \frac{\partial A^i_k}{\partial x^j} - \{^l_{jk}\} A^i_l + \{^i_{jl}\} A^l_k \right\} a_l b^k$$

$$C^j A^i_k a_{i,j} b^k + C^j A^i_k a_l b^k_{,j} \tag{3.48}$$

Η αριστερή πλευρά της (3.48) είναι ένα αναλλοίωτο όπως επίσης και ο δεύτερος και τρίτος όρος στη δεξιά πλευρά. (από II.12). Επομένως, ο πρώτος όρος στη δεξιά πλευρά πρέπει να είναι αναλλοίωτος. Έτσι το

$$\left\{ \frac{\partial A^i_k}{\partial x^j} - \{^l_{jk}\} A^i_l + \{^i_{jl}\} A^l_k \right\} a_i b^k C^j$$

είναι ένα αναλλοίωτο.

Επομένως, από το νόμο πηλίκου, [από (v) της II.13] $\frac{\partial A^i_k}{\partial x^j} - \{^l_{jk}\} A^i_l + \{^i_{jl}\} A^l_k$ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή. Αυτός ο τανυστής ορίζεται να είναι η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή A^i_k και οι συνιστώσες του δηλώνονται ως $A^i_{k,j}$.

Έτσι

$$A^i_{k,j} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^j} - \{^l_{jk}\} A^i_l + \{^i_{jl}\} A^l_k \tag{3.49}$$

Σημείωση 1. Η συναλλοίωτη παράγωγος του τύπου (1,1) είναι έτσι ένας τανυστής του τύπου (1,2).

Σημείωση 2. Σημειώνεται ότι η διαδικασία που υιοθετείται σε αυτή την περίπτωση αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:(1) Κατασκευάζεται πρώτα ένα αναλλοίωτο ϕ από ένα δοσμένο τανυστή A^i_j παίρνοντας τον κατάλληλο αριθμό των συναλλοίωτων και ανταλλοίωτων διανυσμάτων (a_i, b^k). (2) Μετά κατασκευάζεται ένα άλλο αναλλοίωτο $C^j \frac{\partial \phi}{\partial x^j}$ (3) Τέλος, θεωρώντας τη δεξιά πλευρά της έκφρασης του $C^j \frac{\partial \phi}{\partial x^j}$ και εφαρμόζοντας το νόμο πηλίκου, ο χαρακτήρας του τανυστή που ορίζει τη συναλλοίωτη παράγωγο έχει καθοριστεί. Η συναλλοίωτη παράγωγος οποιουδήποτε άλλου τανυστή εκτός από το διάνυσμα μπορεί να ληφθεί με αυτή τη διαδικασία.

(vi) **Συναλλοίωτη παραγώγιση τανυστών του τύπου** (p, q)**:**

Από τη δομή της μορφής (3.49) μπορούμε να εισάγουμε την ακόλουθη μορφή για τη συναλλοίωτη παράγωγο ενός τανυστή του τύπου (p, q) με συνιστώσες $A^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_q}$.

$$A^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_q, j} = \frac{\partial A^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_q}}{\partial x^j} - \{^{\,l}_{jk_i}\} A^{i_1 \dots i_p}_{lk_2 \dots k_q} - \dots$$

$$\dots - \{^{\,l}_{jk_q}\} A^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots l} + \{^{\,i_1}_{jl}\} A^{li_2 \dots i_p}_{k_1 \dots k_q} + \dots + \{^{\,i_p}_{jl}\} A^{i_1 \dots l}_{k_1 \dots k_q} \tag{3.50}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι ένας τανυστής του τύπου $(p, q+1)$ Έτσι η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή του τύπου (p, q) είναι ένας τανυστής του τύπου $(p, q+1)$.

Σημείωση 1. Σημειώνεται ότι η συναλλοίωτη παραγώγιση ενός τανυστή παράγει ένα τανυστή αυξάνοντας την τάξη του αρχικού κατά ένα, επειδή ο αριθμός των συναλλοίωτων δεικτών αυξάνονται κατά ένα.

Σημείωση 2. Ο κανόνας για την εύρεση συναλλοίωτης παραγώγου ενός τανυστή μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

(1) Γράφεται πρώτα η κατάλληλη μερική παράγωγος. (2) Αυτό που έπεται είναι να λάβουμε τους όρους των συμβόλων $Christoffel$ γράφοντας το εσωτερικό γινόμενο του συμβόλου και του τανυστή παίρνοντας τους δείκτες διαδοχικά, βάζοντας μπροστά ένα θετικό πρόσημο όταν ο δείκτης είναι ανταλλοίωτος κι ένα αρνητικό όταν είναι συναλλοίωτος. Ο κανόνας αναπαριστάνεται από το εξής παράδειγμα:

Έστω ότι ζητείται να βρεθεί η συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστή A^i_{jk}.

(1) Η κατάλληλη μερική παράγωγος είναι $\frac{\partial A^i_{jk}}{\partial x^l}$.

(2) Ο όρος του συμβόλου $Christoffel$ που λαμβάνεται γράφοντας το εσωτερικό γινόμενο του συμβόλου και του τανυστή σε σχέση με τους ανταλλοίωτους δείκτες είναι $\{^{\,i}_{lp}\} A^p_{jk}$. Αυτό σημειώνεται με θετικό πρόσημο επειδή ο δείκτης που θεωρούμε είναι ανταλλοίωτος. Έτσι έχουμε $+\{^{\,i}_{lp}\} A^p_{jk}$.

Το εσωτερικό γινόμενο σε σχέση με τους συναλλοίωτους δείκτες j και k είναι αντίστοιχα $\{^{p}_{lj}\}A^{i}_{pk}$ και $\{^{p}_{lk}\}A^{i}_{jp}$· αυτοί σημειώνονται με αρνητικά πρόσημα επειδή οι δείκτες που θεωρούμε είναι συναλλοίωτοι. Έτσι έχουμε $-\{^{p}_{lj}\}A^{i}_{pk}$ και $-\{^{p}_{lk}\}A^{i}_{jp}$.

Σύμφωνα με τον κανόνα η ζητούμενη συναλλοίωτη παράγωγος είναι

$$\frac{\partial A^{i}_{jk}}{\partial x^{l}} + \{^{i}_{lp}\}A^{p}_{jk} - \{^{p}_{lj}\}A^{i}_{pk} - \{^{p}_{lk}\}A^{i}_{jp}$$

.

Σημείωση 3. Στην περίπτωση ενός Ευκλείδειου χώρου, ο οποίος είναι μία ειδική περίπτωση ενός χώρου Riemann , τα σύμβολα $Christoffel$ $\{^{i}_{jk}\}$ είναι όλα μηδέν (δες Σημείωση 3, III.5). Επομένως, τα σύμβολα $Christoffel$ που αναφέρονται στον παραπάνω κανόνα είναι όλα μηδέν. Σαν αποτέλεσμα, η συναλλοίωτη παράγωγος ανάγεται σε μερική παράγωγο με τη συνηθισμένη έννοια. Έτσι η συναλλοίωτη παράγωγος μπορεί να θεωρηθεί ως η γενίκευση της συνήθης μερικής παραγώγου.

III.12 Συναλλοίωτη παράγωγος των θεμελιωδών τανυστών και του δέλτα του $Kronecker$ δ^{i}_{j}

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει τη φύση της συμπεριφοράς των τανυστών g_{ij}, g^{ij} και δ^{i}_{j} κάτω από συναλλοίωτη παραγώγιση.

θεώρημα 3.2 $g_{ik,j} = 0, g^{ik}_{,j} = 0$ και $\delta^{i}_{k,j} = 0$.

Αποδείξεις

Περίπτωση (1). Σύμφωνα με τον κανόνα που προτάθηκε στη σημείωση 2 της III.11, έχουμε

$$g_{ik,j} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{j}} - \{^{l}_{ji}\}g_{lk} - \{^{l}_{jk}\}g_{li}$$

$$= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{j}} - [ji,k] - [jk,i]$$

[από (iii) της III.6]

$$= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{j}} - [ji,k] - [kj,i]$$

[από (i) της III.6]

$$= 0$$

[από (v) της III.6]

Περίπτωση (2). Έχουμε

$$g^{ik}_{,j} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \{^{i}_{jl}\}g^{lk} + \{^{k}_{jl}\}g^{il}$$

$$= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + g^{kl}\{^{i}_{lj}\} + g^{il}\{^{k}_{lj}\}$$

[από (ii) της III.6]

$$= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$$

[από (vi) της III.6]

$$= 0\blacksquare$$

Περίπτωση (3).Έχουμε

$$\delta^i_{k,j} = \frac{\partial \delta^i_k}{\partial x^j} - \delta^i_l\{^{l}_{jk}\} + \delta^l_k\{^{i}_{jl}\}$$

$$= 0 - \{^{i}_{jk}\} + \{^{i}_{jk}\} = 0\blacksquare$$

Σημείωση 1. Αυτό το θεώρημα δείχνει ότι κανένας νέος τανυστής δεν κατασκευάζεται από τη συναλλοίωτη παραγώγιση των τανυστών g_{ij}, g^{ij} και δ^i_j.

Αυτό το θεώρημα είναι γνωστό ως θεώρημα του *Ricci* το οποίο μερικές φορές εκφράζεται ως εξής: Οι θεμελιώδεις τανυστές και το δέλτα του *Kronecker* συμπεριφέρονται στη συναλλοίωτη παραγώγιση σα να ήταν σταθερές.

Η πρόταση ότι η συναλλοίωτη παράγωγος ενός θεμελιώδους τανυστή g_{ij} είναι μηδέν είναι γνωστή ως λήμμα του *Ricci*.

Σημείωση 2. Είναι γνωστό ότι $g_{ij}A^i = A_j$, όπου A^i είναι ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα. Συνεπώς, το $(g_{ij}A^i)_{,k}$ πρέπει να δίνει το ίδιο αποτέλεσμα όπως το $A_{j,k}$. Για να αποφασίσουμε πότε εξασφαλίζεται αυτή η ισότητα είναι αναγκαίο να ξέρουμε τη συμπεριφορά του γινομένου δύο τανυστών κάτω από συναλλοίωτη παραγώγιση. Στην πραγματικότητα, λόγω του ορισμού της συναλλοίωτης παραγώγου και του παραπάνω θεωρήματος η παραπάνω αναφερόμενη ισότητα επιβεβαιώνεται στην πράξη. (Δες Σημείωση $III.13$). Επομένως θεωρούμε τη συναλλοίωτη παραγώγιση του αθροίσματος, της διαφοράς και του γινομένου τανυστών στην επόμενη παράγραφο.

III.13 Συναλλοίωτη παραγώγιση του αθροίσματος, της διαφοράς και του γινομένου τανυστών

Θεωρούμε δύο τανυστές A^i_j και B^i_j τύπου (1,1).

Έστω $A^i_j + B^i_j = C^i_j$ (3.51)

Τότε ο C^i_j είναι ένας τανυστής τύπου (1,1).

Τώρα

$$C^i_{j,k} = \frac{\partial C^i_j}{\partial x^k} - \{^{l}_{kj}\}C^i_l + \{^{i}_{kl}\}C^l_j$$

[από 3.49]

$$= \frac{\partial(A^i_j + B^i_j)}{\partial x^k} - \{^l_{kj}\}(A^i_l + B^i_l) + \{^i_{kl}\}(A^l_j + B^l_j)$$

[από 3.51]

$$= \frac{\partial A^i_j}{\partial x^k} - \{^l_{kj}\}A^i_l - \{^i_{kl}\}A^l_j$$

$$+\frac{\partial B^i_j}{\partial x^k} - \{^l_{kj}\}B^i_l + \{^i_{kl}\}B^l_j$$

$$= A^i_{j,k} + B^i_{j,k}$$

ή

$$(A^i_j + B^i_j)_{,k} = A^i_{j,k} + B^i_{j,k} \tag{3.52}$$

Παρομοίως μπορεί να δειχθεί ότι

$$(A^i_j - B^i_j)_{,k} = A^i_{j,k} - B^i_{j,k} \tag{3.53}$$

Στη συνέχεια δηλώνουμε το γινόμενο $A^i_k B^j_s$ με C^{ij}_{ks} Τότε C^{ij}_{ks} είναι ένας τανυστής τύπου (2,2).

Τώρα

$$C^{ij}_{ks,l} = \frac{\partial C^{ij}_{ks}}{\partial x^l} + \{^i_{lp}\}C^{pj}_{ks} + \{^j_{lp}\}C^{ip}_{ks}$$

$$-\{^p_{lk}\}C^{ij}_{ps} - \{^p_{ls}\}C^{ij}_{kp}$$

$$= \frac{\partial(A^i_k B^j_s)}{\partial x^l} + \{^i_{lp}\}(A^p_k B^j_s) + \{^j_{lp}\}(A^i_k B^p_s)$$

$$-\{^p_{lk}\}(A^i_p B^j_s) - \{^p_{ls}\}(A^i_k B^j_p)$$

$$= \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l}(B^j_s) + \frac{\partial B^j_s}{\partial x^l}(A^i_k) + \{^i_{lp}\}A^p_k(B^j_s) - \{^p_{lk}\}A^i_p(B^j_s)$$

$$+\{^j_{lp}\}B^p_s(A^i_k) - \{^p_{ls}\}B^j_p(A^i_k)$$

$$= \left(\frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} + \{^i_{lp}\}A^p_k - \{^p_{lk}\}A^i_p\right)B^j_s$$

$$+\left(\frac{\partial B^j_s}{\partial x^l} + \{^j_{lp}\}B^p_s - \{^p_{ls}\}B^j_p\right)A^i_k$$

$$= A^i_{k,l}B^j_s + B^j_{s,l}A^i_k$$

ή,

$$(A^i_k B^j_s)_{,l} = A^i_{k,l} B^j_s + B^j_{s,l} A^i_k \tag{3.54}$$

Από τις (3.52), (3.53) και (3.54) έπεται ότι οι νόμοι για τη συναλλοίωτη παραγώγιση στην άθροιση, διαφορά και το γινόμενο δύο τανυστών του τύπου (1,1) είναι ακριβώς οι ίδιοι όπως αυτοί της συνήθους παραγώγισης. Μπορεί να δειχθεί ότι το ίδιο αληθεύει για την άθροιση, τη διαφορά και το γινόμενο δύο τανυστών του τύπου (p, q).

Σημείωση: Στη σημείωση 2 της ΙΙΙ.2 επιπώθηκε ότι η ισότητα $(g_{ij}A^i)_{,k} = g_{ij,k}A^i + g_{ij}A^i_{,k}$ [από (3.54)]

$$= g_{ij}A^i_{,k}$$

[από το θεώρημα 3.2]

$$= g_{ij}\left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + A^t\{{}^i_{tk}\}\right) \text{[από (3.42)]} \tag{3.55}$$

Τώρα

$$\frac{\partial A_j}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}A^i) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}A^i + \frac{\partial A^i}{\partial x^k}g_{ij}$$

$$= ([ik, j] + [jk, i])\, A^i + \frac{\partial A^i}{\partial x^k}g_{ij}$$

[από (iv) της ΙΙΙ.6]

$$= [ik, j]A^i + [jk, i]A^i + g_{ij}\frac{\partial A^i}{\partial x^k}$$

Επομένως,

$$g_{ij}\frac{\partial A^i}{\partial x^k} = \frac{\partial A_j}{\partial x^k} - [ik, j]A^i - [jk, i]A^i$$

Συνεπώς, η δεξιά πλευρά της (3.55) παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial A_j}{\partial x^k} - [ik, j]A^i - [jk, i]A^i + g_{ij}\{{}^i_{tk}\}A^t$$

$$= \frac{\partial A_j}{\partial x^k} - [ik, j]A^i - [jk, i]A^i + [tk, j]A^t$$

[από την (iii) της ΙΙΙ.6]

$$= \frac{\partial A_j}{\partial x^k} - [jk, i]A^i$$

$$= \frac{\partial A_j}{\partial x^k} - g^{mi}A_m[jk, i] = \frac{\partial A_j}{\partial x^k} - A_m\{{}^m_{jk}\}$$

[από (iv) της III.6]

$$= A_{j,k}$$

[από 3.38] Επομένως, η (3.55) παίρνει τη μορφή

$$(g_{ij}A^i)_{,k} = A_{j,k} \blacksquare$$

Οι εξισώσεις που απαντώνται συχνότερα στη θεωρητική φυσική εκφράζονται με τη βοήθεια ενός μικρού αριθμού τελεστών που καλούνται βαθμίδα, απόκλιση, στροβιλισμός και Λαπλασιανή. Εισάγουμε αυτές τις έννοιες στην επόμενη παράγραφο.

III.14 Βαθμίδα, απόκλιση, στροβιλισμός και Λαπλασιανή

Βαθμίδα ενός αναλλοίωτου:

Η μερική παράγωγος ενός αναλλοίωτου ϕ είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα το οποίο καλείται η βαθμίδα του ϕ και συμβολίζεται ως $grad\phi$ ή $\nabla\phi$.

Έτσι

$$grad\ \phi = \phi_{,j} \tag{3.56}$$

Απόκλιση ενός διανύσματος:

Απόκλιση ενός ανταλλοίωτου διανύσματος:

Έστω A^i ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα. Τότε η συναλλοίωτη παράγωγος $A^i_{,i}$ είναι ένας τανυστής τύπου (1,1). Αν τώρα κάνουμε συστολή στους δείκτες i και j παίρνουμε τον τανυστή $A^i_{,i}$ ο οποίος είναι ένας τανυστής του τύπου (0,0) (από το θεώρημα 2.9) δηλαδή ένα αναλλοίωτο (από Σημείωση 4 της II.7). Αυτό το αναλλοίωτο καλείται η απόκλιση του διανύσματος A^i. Δηλώνεται κάποιες φορές με $divA^i$.

Έτσι

$$divA^i = A^i_{,i} \tag{3.57}$$

Απόκλιση συναλλοίωτου διανύσματος:

Αν A_i είνα ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, τότε $g^{jk}A_{j,k}$ είναι ένα αναλλοίωτο. Αυτό το αναλλοίωτο ορίζεται να είναι η απόκλιση του διανύσματος A_i. Συμβολίζεται ως $divA_i$.

Έτσι,

$$divA_i = g^{jk}A_{j,k} \tag{3.58}$$

Σημειώνεται ότι η απόκλιση ενός διανύσματος είναι ένα αναλλοίωτο. Μία έκφραση για την απόκλιση ενός ανταλλοίωτου διανύσματος A^i.

$$A^i_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k) \tag{3.59}$$

όπου $g = |g_{ij}|$

Απόδειξη.

Έχουμε $A^i_{,j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \{^i_{jk}\}A^k$ Επομένως $A^i_{,i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \{^i_{ik}\}A^k$

$$= \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^k}(log\sqrt{g})A^k$$

[από (vii) της III.6]

$$= \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^k}(log\sqrt{g})A^k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)\blacksquare$$

Λαπλασιανή ενός αναλλοίωτου:

Έστω ϕ ένα αναλλοίωτο και $A_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$. Τότε A_i είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα. Επομένως $g^{ij}A_j = A^i$ είναι ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα. Η απόκλιση αυτού του ανταλλοίωτου διανύσματος καλείται Λαπλασιανή του ϕ. Η Λαπλασιανή ενός αναλλοίωτου ϕ συμβολίζεται με $\nabla^2\phi$. Έτσι $\nabla^2\phi = \mathbf{div\ grad}\phi$.

Μία έκφραση για το $\nabla^2\phi$:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}g^{kj}\frac{\partial \phi}{\partial x^j})$$

Απόδειξη. Έχουμε $A^i_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)$ [από (3.59)] Έστω $A^i = g^{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x^j}$. Τότε ο παραπάνω τύπος παίρνει τη μορφή

$$A^i_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}g^{kj}\frac{\partial \phi}{\partial x^j}).$$

Τώρα από τον ορισμό

$$\nabla^2\phi = A^i_{,i}$$

. Τότε χρησιμοποιώντας την παραπάνω έκφραση για το $A^i_{,i}$ παίρνουμε

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}g^{kj}\frac{\partial \phi}{\partial x^j})\blacksquare \tag{3.60}$$

Στροβιλισμός ενός συναλλοίωτου διανύσματος:

Ένας αντισυμμετρικός τανυστής τύπου (0,2) κατασκευασμένος από ένα συναλλοίωτο διάνυσμα έχει μία ιδιαίτερη σημασία στον E_3 και μπορεί να προσδιοριστεί με ένα διάνυσμα. Εισάγουμε τώρα ένα τέτοιο αντισυμμετρικό τανυστή στον V_n ο οποίος καλείται ο στροβιλισμός ενός συναλλοίωτου διανύσματος. Έστω ότι θεωρούμε ένα συναλλοίωτο διάνυσμα A_i. Τότε $A_{i,j}$ είναι ένας τανυστής τύπου (0,2). Επομένως $A_{j,i}$ είναι επίσης ένας τανυστής του τύπου

(0,2). Συμπερασματικά $A_{i,j} - A_{j,i}$ είναι ένας τανυστής του τύπου (0,2) ο οποίος είναι αποδεδειγμένα αντισυμμετρικός. Αυτός ο αντισυμμετρικός τανυστής καλείται ο στροβιλισμός του διανύσματος A_i και συμβολίζεται με $curlA$.

Μία έκφραση για το στροβιλισμό ενός συναλλοίωτου διανύσματος A_i :

$$CurlA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \tag{3.61}$$

Απόδειξη. Έχουμε $A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \{{}^r_{ij}\}A_r$ [από 3.38]
Έτσι $A_{j,i} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \{{}^r_{ji}\}A_r$

Τώρα, $curlA_i = A_{i,j} - A_{j,i}$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \{{}^r_{ij}\}A_r - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} + \{{}^r_{ji}\}A_r$$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}.$$

$[\because \{{}^r_{ij}\} = \{{}^r_{ji}\}]$ ■

Σημείωση 1. Ο στροβιλισμός ενός διανύσματος είναι μηδέν αν και μόνο αν

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$$

Σημείωση 2. Αν $A_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$, τότε $\frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^i}$
και $\frac{\partial A_j}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j}$

Επομένως $\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} = 0$ δηλαδή $curlA_i = 0$. Αλλά εδώ το A_i είναι $grad\phi$. Έτσι

$$curlgrad\phi = 0 \tag{3.62}$$

III.15 Επαναλαμβανόμενη πράξη συναλλοίωτης παραγώγισης

Η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή είναι, γενικά, ένας τανυστής (βλ. Σημείωση 1 της III.12). Αν ο προκύπτον τανυστής υπόκειται πάλι συναλλοίωτη παραγώγιση τότε παίρνουμε πάλι ένα τανυστή. Αυτός ο τανυστής που λαμβάνεται μετά από δύο πράξεις καλείται η δεύτερη συναλλοίωτη παράγωγος του αρχικού τανυστή. Ο τανυστής που λαμβάνεται από συναλλοίωτη παραγώγιση δεύτερης συναλλοίωτης παραγώγου καλείται τρίτη συναλλοίωτη παράγωγος του αρχικού τανυστή κ.ο.κ. Η δεύτερη συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή $A^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ συμβολίζεται με $A^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q, kl}$ η τρίτη συναλλοίωτη παράγωγός του συμβολίζεται με $A^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q, klm}$κ.ο.κ.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα αναλλοίωτο ϕ. Τότε $\phi_{,i}$ είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα (δες 3.36). Αν δηλώσουμε αυτό το διάνυσμα με A_i, τότε $A_{i,j}$ είναι η δεύτερη συναλλοίωτη παράγωγος της ϕ. Έτσι $\phi_{,ij} = A_{i,j}$.

Επομένως, $\phi_{,ij} - \phi_{,ji} = A_{i,j} - A_{j,i}$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$$

(δες 3.61)

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^j}\right)$$

($\because A_i = \phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$)

$$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} = 0$$

Επομένως,

$$\phi_{,ij} = \phi_{,ji} \tag{3.63}$$

Έτσι στην περίπτωση που ενός αναλλοίωτου η πράξη της συναλλοίωτης παραγώγισης είναι μεταθετική. Αλλά για ένα τανυστή τάξεως μεγαλύτερης ή ίσης με ένα η πράξη δεν είναι, όμως, μεταθετική. Αυτό οφείλεται στην ιδιαιτερότητα του περιβάλλοντος στο οποίο η πράξη λαμβάνει χώρα, δηλαδή του χώρου Riemann . Χαρακτηριστική ιδιαιτερότητα ενός τέτοιου χώρου υπάρχει σε έναν ειδικό τανυστή που καλείται τανυστής καμπυλότητας του οποίου οι συνιστώσες μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια των συνιστωσών των θεμελιωδών τανυστών. Η ακόλουθη συζήτηση θα δείξει το γιατί η πράξη της συναλλοίωτης παραγώγισης δεν είναι, γενικά, μεταθετική στο χώρο Riemann και θα αποκαλυφθεί ο ρόλος που παίζεται από τον τανυστή καμπυλότητας σε αυτή την περίπτωση. Ξεκινάμε με ένα συναλλοίωτο διάνυσμα V_i.

Τότε

$$V_{i,j} = \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \{{}^{l}_{ij}\}V_l \tag{3.64}$$

Θέτωντας

$$V_{i,j} = a_{ij} \tag{3.65}$$

Τώρα

$$a_{ij,k} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} - \{{}^{l}_{kj}\}a_{il} - \{{}^{l}_{ki}\}a_{lj} \tag{3.66}$$

Αλλά $a_{ij,k} = V_{i,jk}$ [από την 3.65]

Έτσι, $V_{i,jk} = \frac{\partial V_{i,j}}{\partial x^k} - \{{}^{l}_{kj}\}V_{i,l} - \{{}^{l}_{ki}\}V_{l,j}$ [από 3.66]

Επομένως,

$$V_{i,jk} - V_{i,kj} = \frac{\partial V_{i,j}}{\partial x^k} - \frac{\partial V_{i,k}}{\partial x^j} - \{{}^{l}_{ki}\}V_{i,j} + \{{}^{l}_{ji}\}V_{l,k} \tag{3.67}$$

Από την (3.64) έχουμε

$$\frac{\partial V_{i,j}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^k}\{^l_{ij}\}V_l - \{^l_{ij}\}\frac{\partial V_l}{\partial x^k}$$

Επομένως

$$\frac{\partial V_{i,j}}{\partial x^k} - \frac{\partial V_{i,k}}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial}{\partial x^k}\{^l_{ij}\}V_l - \{^l_{ij}\}\frac{\partial V_l}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^j}\{^l_{ik}\}V_l + \{^l_{ik}\}\frac{\partial V_l}{\partial x^j} \tag{3.68}$$

Πάλι,

$$\{^l_{ki}\}V_{l,j} = \{^l_{ki}\}\left(\frac{\partial V_l}{\partial x^j} - \{^p_{lj}\}V_p\right) =$$

$$= \{^l_{ki}\}\frac{\partial V_l}{\partial x^j} - \{^l_{ki}\}\{^p_{lj}\}V_p \tag{3.69}$$

Ακόμη,

$$\{^l_{ji}\}V_{l,k} = \{^l_{ji}\}\frac{\partial V_l}{\partial x^k} - \{^l_{ji}\}\{^p_{lk}\}V_p \tag{3.70}$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.68), (3.69) και (3.70) μπορούμε να εκφράσουμε την (3.67) ως ακολούθως:

$$V_{i,jk} - V_{i,kj} = \frac{\partial}{\partial x^j}\{^l_{ik}\}V_l + \{^l_{ik}\}\frac{\partial V_l}{\partial x^j}$$

$$-\frac{\partial V_l}{\partial x^k}\{^l_{ij}\} - \{^l_{ki}\}\frac{\partial V_l}{\partial x^j} + \{^l_{ki}\}\{^p_{lj}\}V_p +$$

$$-\{^l_{ji}\}\frac{\partial V_l}{\partial x^k} - \{^l_{ji}\}\{^p_{lk}\}V_p =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\{^l_{ik}\}V_l - \frac{\partial}{\partial x^k}\{^l_{ij}\}V_l + \{^l_{ki}\}\{^p_{lj}\}V_p - \{^l_{ji}\}\{^p_{lk}\}V_p =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\{^l_{ik}\}V_l - \frac{\partial}{\partial x^k}\{^l_{ij}\}V_l + \{^r_{ki}\}\{^l_{rj}\}V_l - \{^r_{ji}\}\{^l_{rk}\}V_l$$

[Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες l και p στον τρίτο και τέταρτο όρο της δεξιάς πλευράς με r και l αντίστοιχα]

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\{^l_{ik}\} - \frac{\partial}{\partial x^k}\{^l_{ij}\} + \{^r_{ki}\}\{^l_{rj}\} - \{^r_{ji}\}\{^l_{rk}\}\right)V_l \tag{3.71}$$

Από τη στιγμή που η δεξιά πλευρά της (3.71) είναι ένας τανυστής και V_l είναι ένα αυθαίρετο συναλλοίωτο διάνυσμα, έπεται από την εφαρμογή του νόμου πηλίκου [δες (v) της II.13] στην εξίσωση (3.71) ότι το

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\{^l_{ik}\} - \frac{\partial}{\partial x^k}\{^l_{ij}\} + \{^r_{ki}\}\{^l_{rj}\} - \{^r_{ji}\}\{^l_{rk}\}$$

είναι ένας τανυστής τύπου (1,3).

Αυτός ο τανυστής καλείται $Riemann-Christoffel$ τανυστής καμπυλότητας *

ή απλά τανυστής καμπυλότητας. Οι συνιστώσες του δηλώνονται από τα R^l_{ijk}. Έτσι,

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}\{^l_{ik}\} - \frac{\partial}{\partial x^k}\{^l_{ij}\} + \{^r_{ki}\}\{^l_{rj}\} - \{^r_{ji}\}\{^l_{rk}\} \tag{3.72}$$

Επομένως, η (3.71)μπορεί να εκφραστεί ως

$$V_{i,jk} - V_{i,kj} = R^l_{ijk}V_l \tag{3.73}$$

Από την (3.73) έπεται ότι, γενικά, $V_{i,jk} \neq V_{i,kj}$. Αν όμως ο R^l_{ijk} είναι ταυτοτικά μηδέν, τότε $V_{i,jk} = V_{i,kj}$.

Σημείωση 1. Σε αυτή τη σημείωση λαμβάνουμε μία αναγκαία και ικανή συνθήκη του ότι η συναλλοίωτη παραγώγιση όλων των διανυσμάτων μπορεί να μετατίθεται.

Αν $V_{i,jk} = V_{i,kj}$, τότε από την (3.73) έπεται ότι $R^l_{ijk}V_l = 0$ όπου V_l είναι ένα αυθαίρετο συναλλοίωτο διάνυσμα. Επειδή το V_l είναι αυθαίρετο, μπορούμε να επιλέξουμε οποιεσδήποτε κατάλληλες τιμές για τις συνιστώσες τους. Έτσι επιλέγουμε ένα διάνυσμα V_l τέτοιο ώστε για μία σταθερή τιμή p του l το $V_p = 1$ και οι άλλες συνιστώσες είναι μηδέν. Τότε από $R^l_{ijk}V_l = 0$ παίρνουμε $R^p_{ijk}V_p = 0$ ή $R^p_{ijk} = 0$ ($\because V_p = 1$). Επομένως, $R^p_{ijk} = 0$. Από τη στιγμή που το p είναι αυθαίρετο έχουμε $R^l_{ijk} = 0$. Ακόμα $V_{i,jk} = V_{i,kj}$ αν $R^l_{ijk} = 0$. Επομένως, η συναλλοίωτη παραγώγιση όλων των συναλλοίωτων διανυσμάτων είναι μεταθετική αν και μόνο αν $R^l_{ijk} = 0$. Το ίδιο αληθεύει για όλα τα ανταλλοίωτα διανύσματα επίσης. Επομένως η συναλλοίωτη παραγώγιση για όλα τα διανύσματα είναι μεταθετική αν και μόνο αν ο $Riemann-Christoffel$ τανυστής καμπυλότητας είναι ταυτοτικά μηδέν.

Σημείωση 2. Σημειώνεται ότι τα ακόλουθα αποτελέσματα ακολουθούν από την (3.72)

$$R^l_{ijk} = -R^l_{ikj} \tag{3.74}$$

και

$$R^l_{ijk} + R^l_{jki} + R^l_{kij} = 0 \tag{3.75}$$

*Ο *Riemann* πήγε πολύ μακριά τον ορισμό αυτού του τανυστή στην πραγματεία του στα πρακτικά που υποβλήθηκαν στην Ακαδημία του Παρισιού το 1861. Ο *Christoffel* συμπλήρωσε την εργασία του και όρισε τον τανυστή με τις συνιστώσες του το 1869. Αυτός είναι ο λόγος που ο τανυστής καλείται $Riemann-Christoffel$ τανυστής. Η αιτία για την ονομασία τανυστής καμπυλότητας αποδίδεται στη σημείωση της III.17

Συστελλόμενοι τανυστές του τανυστή καμπυλότητας

Ξεκινώντας από τον τανυστή καμπυλότητας R^l_{ijk} μπορούμε να πάρουμε τους ακόλουθους τρεις συστελλόμενους τανυστές από τη συστολή δύο δεικτών:

$$R^l_{ljk}, R^l_{ilk} \text{ και } R^l_{kil}$$

Από την (3.72) έχουμε

$$R^l_{ljk} = \frac{\partial}{\partial x^j}\{^l_{lk}\} - \frac{\partial}{\partial x^k}\{^l_{lj}\} + \{^r_{kl}\}\{^l_{rj}\} - \{^r_{jl}\}\{^l_{rk}\}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}(log\sqrt{g})\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}(log\sqrt{g})\right) + 0$$

[απο (vii) της III.6]

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}(log\sqrt{g}) - \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^j}(log\sqrt{g}) = 0$$

Επίσης, $R^l_{ilk} = -R^l_{ikl}$ [από(3.74)]

Τέλος

$$R^l_{ijl} = \frac{\partial}{\partial x^j}\{^l_{il}\} - \frac{\partial}{\partial x^l}\{^l_{ij}\} + \{^r_{li}\}\{^l_{rj}\} - \{^r_{ji}\}\{^l_{rl}\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(log\sqrt{g})\right) - \frac{\partial}{\partial x^l}\{^l_{ij}\} + \{^r_{li}\}\{^l_{rj}\} - \{^r_{ji}\}\{^l_{rl}\} \tag{3.76}$$

το οποίο δεν είναι ταυτοτικά μηδέν.

Έτσι από τους τρεις συστελλόμενους τανυστές ο τελευταίος χρειάζεται μόνο συζήτηση, μιας και ο δεύτερος είναι ο αρνητικός του τελευταίου και ο πρώτος είναι ταυτοτικά μηδέν. Ο συστελλόμενος τανυστής R^l_{ijl} ο οποίος δεν είναι ταυτοτικά μηδέν καλείται τανυστής του *Ricci* † και οι συνιστώσες του δηλώνονται ως R_{ij}. Έτσι,

$$R_{ij} = R^l_{ijl} \tag{3.77}$$

Ο τανυστής του *Ricci* είναι τύπου (0,2) και παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία της βαρύτητας του *Einstein*.

Από την (3.77) έπεται ότι

$$R_{ji} = R^l_{jil} = \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^j}(log\sqrt{g}) - \frac{\partial}{\partial x^l}\{^l_{ji}\} + \{^r_{lj}\}\{^l_{ri}\} - \{^r_{ij}\}\{^l_{rl}\}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}(log\sqrt{g}) - \frac{\partial}{\partial x^l}\{^l_{ji}\} - \{^l_{rj}\}\{^r_{li}\} - \{^r_{ji}\}\{^l_{rl}\}$$

†Καλείται τανυστής του *Ricci* επειδή ο πρώτος που τον μελέτησε ήταν ο *G.Ricci* το 1904

Έχοντας αντικαταστήσει τους βουβούς δείκτες r και l στον τρίτο όρο της δεξιάς πλευράς με l και r αντίστοιχα)

$$= R^l_{ijl} = R_{ij}$$

Έτσι ο τανυστής του *Ricci* είναι ένας συμμετρικός τανυστής.

Σημείωση. Αν $R_{ijkl} = g_{im}R^m_{jkl}$ τότε οι R_{ijkl} καλούνται οι συνιστώσες του συναλλοίωτου τανυστή καμπυλότητας.

III.17 Επίπεδος χώρος

Έχει δειχθεί στη σημείωση 1 της III.15 ότι η συναλλοίωτη παραγώγιση όλων των διανυσμάτων σε ένα V_n είναι μεταθετική αν και μόνο αν ο $Riemann-Christoffel$ τανυστής καμπυλότητας είναι ταυτοτικά μηδέν. Ένας χώρος Riemann του οποίου ο τανυστής καμπυλότητας είναι ταυτοτικά μηδέν καλείται επίπεδος χώρος. Ο συνήθης Ευκλείδειος χώρος με το γραμμικό του στοιχείο σε ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες έχει όλα τα σύμβολα $Christoffel$ $\{^l_{jk}\}$ ίσα με μηδέν. Επομένως από την (3.72) έπεται ότι η τανυστική του καμπυλότητα είναι ταυτοτικά μηδέν. Έτσι ο Ευκλείδειος χώρος με το γραμμικό του στοιχείο σε ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα είναι ένας επίπεδος χώρος. Σημειώνεται ότι για ένα επίπεδο χώρο $R_{ijkl} = 0$.

Σημείωση: Η έννοια της καμπυλότητας στο χώρο Riemann μπορεί να εισαχθεί με τη βοήθεια του τανυστή $Riemann - Christoffel$. Το χαρακτηριστικό τέτοιων χώρων που τους διακρίνει περισσότερο δραματικά είναι η εξαφάνιση της καμπυλότητας. Επομένως, τέτοιοι χώροι οι οποίοι χωρίζονται σε δύο κλάσεις -επίπεδοι και μη-επίπεδοι, οι μεν έχουν ταυτοτικά μηδέν τον τανυστή $Riemann-Christoffel$, και οι δε έχουν τον ίδιο τανυστή να μην είναι ταυτοτικά μηδέν. Αυτός είναι ο λόγος που ο τανυστής $Riemann-Christoffel$ καλείται τανυστής καμπυλότητας.

Εκτός από τις ταυτότητες (3.74) και (3.75) που ικανοποιούνται από τον τανυστή καμπυλότητας, υπάρχει μία άλλη σπουδαία ταυτότητα που ικανοποιείται από αυτόν, η οποία καλείται ταυτότητα του *Bianchi*. Αυτή θα αποδειχθεί στην επόμενη παράγραφο.

III.18 Γεωδεσιακές συντεταγμένες. Ταυτότητα του *Bianchi*

Μπορεί να δειχθεί ότι σε έναν V_n μπορούμε πάντοτε να διαλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε όλα τα σύμβολα $Christoffel$ να μηδενίζονται σε ένα ειδικό σημείο P. Ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων καλείται Γεωδεσιακό σύστημα συντεταγμένων με το σημείο P σαν πόλο του.

Ένα γεωδεσιακό σύστημα συντεταγμένων έχει την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα: Η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή ανάγεται στη σχετική

μερική παράγωγο στον πόλο. (1)
Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα σύμβολα $Christoffel$ είναι όλα μηδέν στον πόλο.
Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την ταυτότητα $Bianchi$ η οποία εκφράζεται ως ακολούθως:

$$R^l_{ijk,m} + R^l_{ikm,j} + R^l_{imj,k} = 0 \tag{3.78}$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα γεωδεσιακό σύστημα συντεταγμένων με το σημείο P ως πόλο. Τότε στο P έχουμε

$$R^l_{ijk,m} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(R^l_{ijk}\right)$$

[από την ιδιότητα (1) του γεωδεσιακού συστήματος συντεταγμένων]

$$= \frac{\partial}{\partial x^m}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\{{}^l_{ik}\} - \frac{\partial}{\partial x^k}\{{}^l_{ij}\} + \{{}^r_{ki}\}\{{}^l_{rj}\} - \{{}^r_{ji}\}\{{}^l_{rk}\}\right]$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^j}\{{}^l_{ik}\} - \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^k}\{{}^l_{ij}\} \tag{3.79}$$

επειδή όλα τα σύμβολα $Christoffel$ $\{{}^l_{ij}\}$ μηδενίζονται στο P αλλά οι συναλλοίωτες παράγωγοί τους δεν μηδενίζονται αναγκαστικά στο P. Θέτωντας $j = k$, $k = m$ και $m = j$ στην (3.79) παίρνουμε

$$R^l_{ikm,j} = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}\{{}^l_{im}\} - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^m}\{{}^l_{ik}\} \tag{3.80}$$

Στη συνέχεια θέτοντας $k = m$, $m = j$ και $j = k$ στην (3.80) έχουμε

$$R^l_{imj,k} = \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^m}\{{}^l_{ij}\} - \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^j}\{{}^l_{im}\} \tag{3.81}$$

Προσθέτοντας τις (3.79),(3.80) και (3.81) παίρνουμε

$$R^l_{ijk,m} + R^l_{ikm,j} + R^l_{imj,k} = 0 \tag{3.82}$$

Έτσι η εξίσωση (3.82) διατηρείται στον πόλο P ενός γεωδεσιακού συστήματος συντεταγμένων. Από τη στιγμή που αυτή η εξίσωση είναι μία εξίσωση τανυστών, διατηρείται σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων στον πόλο P. Αλλά από τη στιγμή που το σημείο P μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο του V_n η εξίσωση (3.82) διατηρείται σε όλα τα σημεία του V_n■

III.19 Στροβιλισμός ενός συναλλοίωτου διανύσματος και διανυσματικό γινόμενο δύο συναλλοίωτων διανυσμάτων στον V_3

Οι έννοιες του στροβιλισμού ενός συναλλοίωτου διανύσματος και ενός διανυσματικού γινομένου δύο συναλλοίωτων διανυσμάτων έχουν ήδη εισαχθεί στην III.14 και III.15 αντίστοιχα.

Είναι γνωστό ότι καθένα από αυτά είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής του τύπου (0,2). Είναι ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό του V_3 το ότι ένας τέτοιος χώρος με ένα αντισυμμετρικό τανυστή του τύπου (0,2) μπορεί να προσδιοριστεί με ένα διάνυσμα στον ίδιο χώρο. Σαν αποτέλεσμα, τέτοιος προσδιορισμός είναι επίσης πιθανός για το στροβιλισμό ενός συναλλοίωτου διανύσματος και το διανυσματικό γινόμενο δύο συναλλοίωτων διανυσμάτων στον V_3. Σε αυτή την παράγραφο δείχνουμε πως αυτό μπορεί να γίνει. Για αυτό πρώτα εισάγουμε δύο τανυστές στον V_3 που καλλούνται τανυστές μετάθεσης και μπορούμε να τους χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε το στροβιλισμό ενός συναλλοίωτου διανύσματος στον V_3 όπως ένα διάνυσμα στον V_3 και ένα διανυσματικό γινόμενο δύο διανυσμάτων στον V_3 όπως ένα διάνυσμα στον ίδιο χώρο.

Από τη στιγμή που ο θεμελιώδης τανυστής είναι τύπου (0,2) έχουμε

$$\bar{g}_{ij} = g_{ab}\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j}.$$

Επομένως,

$$|\bar{g}_{ij}| = |g_{ab}|\left|\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i}\right|\left|\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j}\right|$$

[από (1.26)]

ή

$$\bar{g} = g\left|\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i}\right|^2 \tag{3.83}$$

[$\because \left|\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j}\right| = \left|\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i}\right|$]

Από την (3.83) έχουμε

$$\sqrt{\bar{g}} = \sqrt{g}\left|\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i}\right| \tag{3.84}$$

υποθέτοντας ότι το $\left|\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i}\right|$ είναι πάντοτε θετικό.

Με μία τέτοια υπόθεση ο θεωρούμενος V_3 καλείται ένας Προσανατολισμένος V_3.

Ορίζουμε τώρα δύο συστήματα τρίτης τάξης ϵ_{ijk} και ϵ^{ijk} ως ακολούθως:

$$\epsilon_{ijk} = \sqrt{g}e_{ijk} \tag{3.85}$$

και

$$\epsilon_{ijk} = \sqrt{g} e^{ijk} \tag{3.86}$$

όπου τα e_{ijk} και e^{ijk} είναι τα συστήματα που ορίστηκαν στην $I.4$. Παίρνοντας $|a^i_j|$ ως $\left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right|$ στην (1.21) παίρνουμε

$$e_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} = e_{pqr} \left| \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^t} \right| \tag{3.87}$$

Τότε $\bar{\epsilon}_{pqr} = \sqrt{\bar{g}} e_{pqr}$ [από (3.85)]
$= \sqrt{g} \left|\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^t}\right| e_{pqr}$ ...[από (3.84)]

$$= \sqrt{g} e_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r}$$

[από (3.87)]

$$= \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} \tag{3.88}$$

[από την (3.85)]

Από την (3.88) έπεται ότι ο ϵ_{ijk} είναι ένας τανυστής του τύπου (0,3).

Παρομοίως μπορεί να δειχθεί ότι το ϵ^{ijk} είναι ένας τανυστής του τύπου (3,0). Οι τανυστές ϵ_{ijk} και ϵ^{ijk} καλούνται τανυστές μετάθεσης του V_3.

Στροβιλισμός ενός συναλλοίωτου διανύσματος:

Έστω ότι A_i είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα. Τότε $A_{i,k}$ είναι ένας τανυστής του τύπου (0,2). Το γινόμενο $\epsilon^{ikl} A_{l,k}$ είναι τότε ένας τανυστής του τύπου (1,0) [δες II.12] δηλαδή ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα. Αν δηλώσουμε αυτό το διάνυσμα με B^i, τότε B^i καλείται ο στροβιλισμός του διανύσματος A_i. Έτσι σε έναν V_3

$$Curl A_i = B^i = \epsilon^{ikl} A_{l,k} \tag{3.89}$$

Από την (3.89) έχουμε

$$B^i = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ikl} A_{l,k}$$

[από την (3.86)] Επομένως,

$$B^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{1kl} A_{l,k} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{123} A_{3,2} + \frac{1}{\sqrt{g}} e^{132} A_{2,3}$$

[από την (I.12)]

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}(A_{3,2} - A_{2,3})$$

$$B^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{2kl} A_{l,k} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{231} A_{1,3} + \frac{1}{\sqrt{g}} e^{213} A_{3,1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}(A_{1,3} - A_{3,1})$$

$$B^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{2kl} A_{l,k} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{312} A_{2,1} + \frac{1}{\sqrt{g}} e^{321} A_{1,2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}(A_{2,1} - A_{1,2})$$

Έτσι οι συνιστώσες του διανύσματος A_i είναι

$$\frac{1}{\sqrt{g}}(A_{3,2} - A_{2,3}), \frac{1}{\sqrt{g}}(A_{1,3} - A_{3,1}), \frac{1}{\sqrt{g}}(A_{2,1} - A_{1,2})$$

Επειδή $A_{i,j} - A_{j,i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$ (δες 3.61)

$$A_{3,2} - A_{2,3} = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}, A_{1,3} - A_{3,1} = \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}$$

$$A_{2,1} - A_{1,2} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}$$

Επομένως, οι συνιστώσες του $curl A_i$ είναι

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right), \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right) \tag{3.90}$$

Διανυσματικό γινόμενο δύο συναλλοίωτων διανυσμάτων:

Έστω ότι τα A_i και B_i είναι δύο συναλλοίωτα διανύσματα ενός V_3. Τότε το γινόμενο $\epsilon^{ijk} A_j B_k$ είναι ένας τανυστής του τύπου (1,0) δηλαδή ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα. Αν δηλώσουμε αυτό το διάνυσμα με C^i, τότε $C^i = \epsilon^{ijk} A_j B_k$ καλείται ένα διανυσματικό γινόμενο (ή ένα σταυρωτό γινόμενο) των διανυσμάτων A_i και B_i.

Τώρα το $C^i = \epsilon^{ijk} A_j B_k$ μπορεί να γραφεί ως

$$C^i = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk} A_j B_k$$

[από 3.86]
Επομένως

$$C^i = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{123} A_2 B_3 + \frac{1}{\sqrt{g}} e^{132} A_3 B_2$$

[από (I.12)]

$$= \frac{1}{2}(A_2 B_3 - A_3 B_2)$$

$$C^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{231} A_3 B_1 + \frac{1}{\sqrt{g}} e^{213} A_1 B_3 = \frac{1}{\sqrt{g}}(A_3 B_1 - A_1 B_3)$$

$$C^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{321} A_1 B_2 + \frac{1}{\sqrt{g}} e^{321} A_2 B_1 = \frac{1}{\sqrt{g}}(A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

Έτσι οι συνιστώσες του διανύσματικού γινομένου δύο συναλλοίωτων διανυσμάτων A_i και B_j είναι

$$\frac{1}{2}(A_2 B_3 - A_3 B_2), \frac{1}{\sqrt{g}}(A_3 B_1 - A_1 B_3), \frac{1}{\sqrt{g}}(A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

Αν τα A_i και B_i είναι οι συναλλοίωτες συνιστώσες των διανυσμάτων A και B, τότε το διανυσματικό τους γινόμενο μερικές φορές δηλώνεται ως $A \times B$.

Έτσι $A \times B = \epsilon^{ijk} A_j B_k$ ... ... (3.91) Επομένως στον V_3

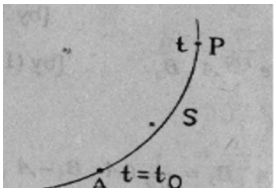
$$A \times B = \left[\frac{1}{2}(A_2 B_3 - A_3 B_2), \frac{1}{\sqrt{g}}(A_3 B_1 - A_1 B_3), \frac{1}{\sqrt{g}}(A_1 B_2 - A_2 B_1)\right] \quad (3.92)$$

III.20 Συμφυής διαφόριση

Είναι γνωστό το ότι η συναλλοίωτη παραγώγιση είναι μία γενίκευση της μερικής παραγώγισης στον Ευκλείδειο χώρο με ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες. Ακόμα, γνωρίζουμε ότι η συναλλοίωτη παραγώγιση ενός τανυστή παράγει πάλι ένα τανυστή. Σε αυτή την παράγραφο ορίζουμε ένα άλλο είδος παραγώγισης το οποίο μπορεί να εκτιμηθεί ως μία γενίκευση της συνήθους παραγώγισης στον Ευκλείδειο χώρο σε ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες. Καλείται συμφυή ή απόλυτη διαφόριση και είναι χρήσιμη στη μελέτη της διαφορικής γεωμετρίας των καμπύλων και επιφανειών λόγω του γεγονότος ότι η συμφυή διαφόριση ενός τανυστή παράγει πάλι ένα τανυστή.

Καμπύλη σε έναν V_n:

Ως καμπύλη σε έναν V_n νοείται περιοχή σημείων των οποίων οι συντεταγμένες x^i ικανοποιούν τις εξισώσεις της μορφής $x^i = \phi^i(t)$ (3.93)



όπου ϕ^i είναι οι συναρτήσεις μίας απλής παραμέτρου t. Το μήκος s μίας καμπύλης από ένα σημείο A (δες εικόνα) που αντιστοιχεί στην τιμή t_o της παραμέτρου του μεταβλητού σημείου P σε αυτό που αντιστοιχεί στην τιμή t του ίδιου, προσδιορίζεται ως ακολούθως:

$$s = \int_{t_o}^{t} \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\, dt \tag{3.94}$$

Τώρα,

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{dx^p}{dt} \tag{3.95}$$

Από την (3.95) έπεται ότι το $\frac{dx^i}{dt}$ είναι ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα κατά μήκος της καμπύλης που δίνεται από την (3.93)

Ας θεωρήσουμε ένα τανυστή του τύπου (p, q) του οποίου οι συνιστώσες $A^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ είναι συναρτήσεις μίας παραμέτρου t. Τότε η συμφυής παράγωγος του διανύσματος με την παράμετρο t δηλώνεται με $\frac{\delta}{\delta t}A^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ και ορίζεται ως ακολούθως:

$$\frac{\delta}{\delta t}A^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = A^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q,l}\frac{dx^l}{dt} \tag{3.96}$$

όπου το κόμμα (,) δηλώνει συναλλοίωτη παραγώγιση.

Από τη στιγμή που το $\frac{dx^l}{dt}$ είναι ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα δηλαδή ένας τανυστής του τύπου (1,0) κατά μήκος της καμπύλης που δίνεται από την (3.93), και $A^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{q,l}}$ είναι ένας τανυστής του τύπου $(p, q+1)$ κατά μήκος της ίδιας καμπύλης, ο $A^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{q,l}}\frac{dx^l}{dt}$ είναι ένας τανυστής του τύπου (p, q) κατά μήκος της καμπύλης, δηλαδή $\frac{\delta}{\delta t}A^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ είναι ένας τανυστής του τύπου (p, q) κατά μήκος της καμπύλης. Έτσι η συμφυής παράγωγος ενός τανυστή του τύπου (p, q) είναι πάλι ένας τανυστής του τύπου (p, q).

Συγκεκριμένα, η συμφυής παράγωγος ενός αναλλοίωτου ϕ δίνεται από το

$$\frac{\delta\phi}{\delta t} = \phi_{,l}\frac{dx^l}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x^l}\frac{dx^l}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \tag{3.97}$$

το οποίο είναι ένα αναλλοίωτο. ($\because \bar{\phi} = \phi, \frac{d\bar{\phi}}{dt} = \frac{d\phi}{dt}$)

Έτσι η συμφυής παράγωγος ενός αναλλοίωτου είναι επίσης ένα αναλλοίωτο. Σημειώνεται ότι η συμφυής παράγωγος ενός αναλλοίωτου ταυτίζεται με την ολική του παράγωγο.

Τώρα,

$$\frac{\delta}{\delta t}g_{ij} = g_{ij,l}\frac{dx^l}{dt} = 0$$

($\because g_{ij,l} = 0$)

Παρομοίως μπορεί να δειχθεί ότι $\frac{\delta}{\delta t}g^{ij} = 0$ και $\frac{\delta}{\delta t}\delta^i_j = 0$.

Επομένως, οι συμφυείς παράγωγοι δύο θεμελιωδών τανυστών και το δέλτα του $Kronecker\delta^i_j$ είναι μηδέν.

Μπορεί εύκολα να επαληθευθεί ότι η συμφυής παράγωγος ακολουθεί τους ίδιους νόμους άθροισης, διαφοράς και γινομένου δύο τανυστών του ίδιου τύπου όπως ακολουθούνται από τη συναλλοίωτη παραγώγιση.

III.21 Χώρος σταθερής καμπυλότητας.

Στην III.17 έχει εισαχθεί η έννοια του επίπεδου χώρου. Υπενθυμίζουμε ότι ένας χώρος Riemann του οποίου ο τανυστής καμπυλότητας είναι ταυτοτικά μηδέν καλείται επίπεδος χώρος. Μπορούμε τώρα να εισάγουμε ένα άλλο σημαντικό τύπο του χώρου Riemann που καλείται χώρος σταθερής καμπυλότητας. Αν ένας χώρος Riemann είναι τέτοιος ώστε τανυστής καμπυλότητάς του R_{ijkl} να είναι της μορφής $R_{ijkl} = b(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, όπου b είναι μία σταθερά, τότε ο χώρος λέγεται ότι είναι σταθερής καμπυλότητας b.

Αν, ιδιαιτέρως $b = 0$, τότε $R_{ijkl} = 0$ και ο χώρος ανάγεται σε ένα επίπεδο χώρο. Έτσι ένας επίπεδος χώρος είναι ένας συγκεκριμένος τύπος ενός χώρου σταθερής καμπυλότητας.

Θα δοθεί τώρα ένα παράδειγμα ενός χώρου σταθερής καμπυλότητας. Ας θεωρήσουμε μία επιφάνεια στον E_3 της οποίας το γραμμικό στοιχείο σε

σφαιρικές συντεταγμένες r, ϕ, θ δίνεται ως

$$ds^2 = a^2(d\phi)^2 + a^2 sin^2\phi(d\theta)^2 \ (1) \tag{3.98}$$

όπου a είναι μια σταθερά.

Μπορεί να επαληθευθεί ότι σε αυτή την περίπτωση

$$R_{1212} = a^2 sin^2\phi \tag{3.99}$$

Από την (1) βλέπουμε ότι σε αυτή την περίπτωση $g_{11} = a^2$, $g_{22} = a^2 sin^2\phi$ $g_{12} = g_{21} = 0$

Επομένως, $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = a^2a^2sin^2\phi - 00 = a^4sin^2\phi$ Επομένως, $\frac{1}{a^2}(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) = \frac{1}{a^2}a^4sin^2\phi$

$$= a^2sin^2\phi = R_{1212}$$

[από την (3.99)]

Έτσι σε αυτήν την περίπτωση

$$R_{1212} = \frac{1}{a^2}(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) \tag{3.100}$$

Από την (3.100) βλέπουμε ότι σε αυτή την περίπτωση ο R_{ijkl} είναι της μορφής $R_{ijkl} = b(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$,όπου $b = \frac{1}{a^2} =$ μία σταθερά.

Επομένως, η επιφάνεια που μελετάμε είναι ένας χώρος σταθερής καμπυλότητας $\frac{1}{a^2}$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Αν $U^i = \frac{1}{\sqrt{g_{pq}V^pV^q}}V^i$, όπου V^i είναι ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα και g_{ij} είναι ένας θεμελιώδης τανυστής, να δειχθεί ότι ο U^i είναι ένας μοναδιαίος τανυστής.

Έχουμε

$$g_{ij}U^iU^j = g_{ij}\frac{1}{\sqrt{g_{pq}V^pV^q}}V^i\frac{1}{\sqrt{g_{pq}V^pV^q}}V^j =$$

$$= \frac{g_{ij}V^iV^j}{g_{pq}V^pV^q} = 1$$

Επομένως, U^i είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα

2. Αν A_i και B_j είναι δύο συναλλοίωτα διανύσματα, να δειχθεί ότι $g^{ij}(A_iB_j - A_jB_i) = 0$, όπου g^{ij} είναι ένας ανταλλοίωτος θεμελιώδης τανυστής.

Έχουμε

$$g^{ij}(A_iB_j - A_jB_i) = g^{ij}A_iB_j - g^{ij}A_jB_i =$$

$$= A^j B_j - A^i B_i = 0$$

3. Να δειχτεί ότι σε έναν V_n

$$(g_{hj} g_{ik} - g_{hi} g_{jk}) g^{hj} = (n-1) g_{ik}$$

όπου g_{ij} και g^{ij} ο μετρικός τανυστής.

Έχουμε

$$(g_{hj} g_{ik} - g_{hi} g_{jk}) g^{hj} = g_{hj} g^{hj} g_{ik} - g_{hi} g^{hj} g_{jk} =$$

$$= n g_{ik} - \delta_i^j g_{jk} = n g_{ik} - g_{ik}$$

$$(n-1) g_{ik}$$

4. Αν u^i και v^i είναι ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα, να δειχθεί ότι

$$(g_{hj} g_{ki} - g_{hk} g_{ji}) u^h v^i u^j v^k = 1$$

Σύμφωνα με τις δοσμένες συνθήκες

$$g_{ij} u^i u^j = 1 \qquad (1)$$

$$g_{ij} v^i v^j = 1 \qquad (2)$$

$$\text{και } g_{ij} u^i v^j = 0 \qquad (3)$$

Τώρα

$$(g_{hj} g_{ki} - g_{hk} g_{ji}) u^h v^i u^j v^k$$

$$= g_{hj} u^h u^j g_{ki} v^k v^i - g_{hk} u^h v^k g_{ji} u^j v^i =$$

$$= 1.1 - 0.0 \qquad [\text{από } (1),(2) \text{ και } (3)]$$

$$= 1$$

5. Να δειχθεί ότι στον V_4 με στοιχείο μήκους

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c^2 (dx^4)^2$$

το διάνυσμα $(1, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{c})$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα.

Σε αυτή την περίπτωση $g_{11} = -1$,$g_{22} = -1$,$g_{33} = -1$ και $g_{44} = c^2$ και τα άλλα g_{ij} είναι μηδέν.

Δηλώστε τις συνιστώσες του δοσμένου διάνυσματος με V^i.

Τότε έχουμε $V^1 = 1$, $V^2 = 0$, $V^3 = 0$, $V_4 = \sqrt{2}c$.

Έτσι

$$g_{ij} V^i V^j = g_{11} V^1 V^1 + g_{22} V^2 V^2 + g_{33} V^3 V^3 + g_{44} V^4 V^4$$

$$\begin{aligned}(-1)1.1 + (-1)0.0 + (-1)0.0 + c^2\sqrt{2}c\sqrt{2}c \\ = -1 + 0 + 0 + 2 \\ = 1\end{aligned}$$

Επομένως, V^i είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα.

6. Αν ϑ είναι η γωνία μεταξύ δύο μη-μηδενικών διανυσμάτων A^i και B^i, να δειχθεί ότι

$$sin^2\theta = \frac{(g_{ij}g_{pq} - g_{ip}g_{jq})A^iB^pA^jB^q}{(g_{ij}A^iA^j)(g_{pq}B^pB^q)}$$

Έτσι έχουμε

$$cos\theta = \frac{g_{ij}A^iB^j}{\sqrt{g_{ij}A^iA^j}\sqrt{g_{pq}B^pB^q}}$$

[από την (3.17)]

Επομένως,

$$sin^2\theta = 1 - cos^2\theta = 1 - \frac{g_{ij}A^iB^jg_{pq}A^pB^q}{(g_{ij}A^iA^j)(g_{pq}B^pB^q)}$$

$$= \frac{g_{ij}g_{pq}A^iA^jB^pB^q - g_{ij}g_{pq}A^iB^jA^pB^q}{(g_{ij}A^iA^j)(g_{pq}B^pB^q)}$$

$$= \frac{g_{ij}g_{pq}A^iB^pA^jB^q - g_{ij}g_{pq}A^iB^jA^pB^q}{(g_{ij}A^iA^j)(g_{pq}B^pB^q)}$$

[Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες j και p στο δεύτερο όρο του αριθμητή με p και j αντίστοιχα]

$$= \frac{(g_{ij}g_{pq} - g_{ip}g_{jq})A^iB^pA^jB^q}{(g_{ij}A^iA^j)(g_{pq}B^pB^q)}$$

7. Αν A^i και B^i είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα έτσι ώστε $g_{ij}U^iU^j = g_{ij}V^iV^j$, όπου $U^i = A^i + B^i$ και $V^i = A^i - B^i$, να δειχθεί ότι τα A^i και B^i είναι ορθογώνια.

Έχουμε

$$g_{ij}U^iU^j = g_{ij}(A^i + B^i)(A^j + B^j)$$

$$= g_{ij}A^iA^j + g_{ij}B^iB^j + 2g_{ij}A^iB^j ...(1)$$

[$\because g_{ij}$ είναι συμμετρικός]

Παρόμοια, $g_{ij}V^iV^j = g_{ij}A^iA^j + g_{ij}B^iB^j - 2g_{ij}A^iB^j ...(2)$

Επειδή $g_{ij}U^iU^j = g_{ij}V^iV^j$, έπεται από την (1) και την (2) ότι $4g_{ij}A^iB^j = 0$ ή $g_{ij}A^iB^j = 0$

Επομένως , A^i, B^j είναι ορθογώνια.

8. Αν a_{ij} είναι ένας συμμετρικός τανυστής του τύπου (0,2), A^i, B^i, είναι μοναδιαία διανύσματα ορθογώνια σε ένα διάνυσμα C^i που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$a_{ij}A^i - \omega g_{ij}A^i + \sigma g_{ij}C^i = 0$$

και

$$a_{ij}B^i - \omega' g_{ij}B^i + \sigma' g_{ij}C^i = 0$$

όπου $\omega \neq \omega'$, να δειχθεί ότι τα A^i και B^i είναι ορθογώνια και $a_{ij}A^iB^j = 0$. Σύμφωνα προς τις δεδομένες συνθήκες έχουμε

$$g_{ij}A^iA^j = 1...(1) \;\; g_{ij}B^iB^j = 1...(2)$$

$$g_{ij}A^iC^j = 0...(3) \;\; g_{ij}B^iC^j = 0...(4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $a_{ij}A^i - \omega g_{ij}A^i + \sigma g_{ij}C^i = 0$ με B^j παίρνουμε $a_{ij}A^iB^j - \omega g_{ij}A^iB^j + \sigma g_{ij}C^iB^j = 0$ ή,

$$a_{ij}A^iB^j - \omega g_{ij}A^iB^j + \sigma g_{ij}C^iB^j = 0 \tag{5}$$

[από (4)] Παρόμοια, πολλαπλασιάζουμε τη σχέση $a_{ij}B^i - \omega' g_{ij}B^i + \sigma' g_{ij}C^i = 0$ με A^j παίρνουμε $a_{ij}B^iA^j - \omega' g_{ij}B^iA^j + \sigma' g_{ij}C^iA^j = 0$ ή

$a_{ij}B^iA^j - \omega' g_{ij}B^iA^j = 0$ ή $a_{ij}A^jB^i - \omega' g_{ij}A^jB^i = 0$ [$\because a_{ij}$ και g_{ij} είναι συμμετρικοί]

ή,

$$a_{ij}A^iB^j - \omega' g_{ij}A^iB^j = 0 \tag{6}$$

[Αντικαθιστώντας τους βωβούς δείκτες i και j με j και i αντίστοιχα]

Αφαιρώντας την (6) από την (5) παίρνουμε

$$(\omega' - \omega)g_{ij}A^iB^j = 0$$

ή,

$$g_{ij}A^iB^j = 0 \tag{7}$$

[$\because \omega \neq \omega'$] Επομένως A^i και B^i είναι ορθογώνιοι. Δυνάμει της (7) έπεται από την (6) ότι $a_{ij}A^iB^j = 0$.

9. Δείξατε ότι ο αριθμός των διακριτών συνιστωσών των συμβόλων $Christoffel$ σε έναν V_n είναι το πολύ $\frac{1}{2}n^2(n+1)$.

Αφού τα $[ij, l]$ και $\{{}^{l}_{ij}\}$ είναι συμμετρικά ως προς i και j, για κάθε l, ο αριθμός διακριτών συνιστωσών για κάθε ένα από αυτά είναι το πολύ $\frac{n(n+1)}{2}$. Επομένως, για όλα τα l ο αριθμός των διακριτών συνιστωσών για κάθε ένα από αυτά είναι το πολύ $n \times \frac{n(n+1)}{2}$, δηλαδή $\frac{n^2}{2}(n+1)$. Με άλλα λόγια ο αριθμός των συνιστωσών των συμβόλων $Christoffel$ είναι το πολύ $\frac{n^2}{2}(n+1)$.

10. Αν ο A^{ij} είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής, να δειχθεί ότι $A^{jk}\{^{i}_{jk}\} = 0$.

Έχουμε (αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες j και k με k και j αντίστοιχα) $A^{jk}\{^{i}_{jk}\} = A^{kj}\{^{i}_{kj}\} =$
$= A^{kj}\{^{i}_{jk}\}$ [$\because \{^{i}_{kj}\} = \{^{i}_{jk}\}$]
$= -A^{jk}\{^{i}_{jk}\}$ [$\because$ A^{ij} είναι αντισυμμετρικός] ή, $2A^{jk}\{^{i}_{jk}\} = 0$. Επομένως, $A^{jk}\{^{i}_{jk}\} = 0$.

11. Δείξατε ότι $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = [jk,i] - [ij,k]$ Έχουμε, $[ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$
Επομένως, $[jk,i] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)$
Επομένως, $[jk,i] - [ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{2\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$
ή, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = [jk,i] - [ij,k]$

12. Να δειχθεί ότι τα σύμβολα $Christoffel$ θα έχουν τανυστικό χαρακτήρα μόνο για ομοπαραλληλικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Από τους νόμους μετασχηματισμού των συμβόλων $Christoffel$ (δες 3.33 και 3.35) έπεται ότι θα έχουν τανυστικό χαρακτήρα αν και μόνον αν

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} = 0 \quad j,l,m = 1,2,...n \tag{1}$$

Αλλά η ισότητα (1) ικανοποιείται μόνο για το μετασχηματισμό συντεταγμένων που δίνεται από τη σχέση

$$x^j = a^j_m \bar{x}^m + b^j \tag{2}$$

όπου, a^j_m και b^j είναι σταθερές. Επειδή η (2) αναπαριστά ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό συντεταγμένων, έπεται ότι τα σύμβολα $Christoffel$ αποκτούν τανυστικό χαρακτήρα μόνο για ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό συντεταγμένων.

Σημείωση. Τα σύμβολα $Christoffel$ επομένως μερικές φορές αποκαλούνται ομοπαραλληλικοί τανυστές τάξεως 3.

13. Αποδείξτε ότι όλα τα σύμβολα $Christoffel$ μηδενίζονται σε ένα σημείο αν και μόνον αν τα g_{ij} είναι όλα σταθερά στο σημείο.

Πρώτα υποθέτουμε ότι τα g_{ij} είναι σταθερά στο σημείο $P(x^i)$. Τότε από τον ορισμό των συμβόλων $Christoffel$ (δες 3.22 και 3.23) έπεται ότι αυτά θα είναι μηδέν στο σημείο P.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $\{^{i}_{jk}\} = 0$ στο P.
Τότε $[ij,m] = 0$ στο σημείο [$\because [ij,m] = g_{lm}\{^{l}_{ij}\}$από την (iii) της $III.6$] Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση

$$[ij,m] + [mj,i] = \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j}$$

(βλ. (v) της III.6) έπεται ότι $\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το g_{im} είναι ανεξάρτητο από τα x^j για όλα τα j, δηλαδή τα g_{im} είναι σταθερά στο σημείο (x^i).

14. Αν τα B_i είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος, προσδιορίστε αν τα $\{{}^i_{jk}\} + 2\delta^i_j B_k$ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή.

Θέτουμε $\Gamma^i_{jk} = \{{}^i_{jk}\} + 2\delta^i_j B_k$

Έστω $\bar{\Gamma}^i_{jk} = \overline{\{{}^i_{jk}\}} + 2\bar{\delta}^i_j \bar{B}_k$

Τότε $\bar{\Gamma}^i_{jk} = \{{}^r_{ts}\}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} + 2\delta^i_j \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} B_p$ (από 3.35 και 2.9)

$$= [\{{}^r_{ts}\} + 2\delta^r_t B_s]\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} =$$

$$= \Gamma^i_{jk}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \tag{1}$$

Από τη σχέση (1) έπεται ότι τα Γ^i_{jk} δεν είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή, λόγω της παρουσίας του δεύτερου όρου στη δεξιά πλευρά.

15. Αν τα a^{ij} είναι ένας συμμετρικός τανυστής, δείξατε ότι

$$a^{jk}[ij,k] = \frac{1}{2}a^{jk}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$$

Έχουμε

$$[ji,k] + [ki,j] = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$$

(από την (v) της III.6)

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές με a^{jk} παίρνουμε

$a^{jk}[ji,k] + a^{jk}[ki,j] = a^{jk}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$ ή, $a^{jk}[ji,k] + a^{kj}[ki,j] = a^{jk}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$($\because a^{jk} = a^{kj}$) ή, $2a^{jk}[ji,k] = a^{jk}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$

(Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες k και j στο δεύτερο όρο της αριστερής πλευράς με j και k αντίστοιχα)

ή, $2a^{jk}[ij,k] = a^{jk}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$ Επομένως, $a^{jk}[ij,k] = \frac{1}{2}a^{jk}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$

16. Αποδείξτε ότι $\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}g^{ij}) + \sqrt{g}\{{}^i_{jk}\}g^{jk} = 0$ Έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}g^{ij}) = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^j}g^{ij} + \sqrt{g}\frac{\partial}{\partial x^j}g^{ij} =$$

$$= \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^j}g^{ij} + \sqrt{g}\left(-g^{jp}\{{}^i_{pj}\} - g^{it}\{{}^j_{tj}\}\right)$$

(από την (vi) της III.6)

$$= \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^j}g^{ij} - \sqrt{g}\{{}^i_{pj}\}g^{pj} - \sqrt{g}g^{it}\{{}^j_{jt}\}$$

$$= \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^j} g^{ij} - \sqrt{g}\{{}^{i}_{pj}\}g^{pj} - \sqrt{g}g^{it}\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^t}$$

(από την (vii) της III.6)

$$= \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial x^i}g^{ij} - \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial x^t}g^{it} - \sqrt{g}\{{}^{i}_{pj}\}g^{pj}$$

$$= -\sqrt{g}\{{}^{i}_{pj}\}g^{pj}$$

Επομένως

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}g^{ij}) + \sqrt{g}\{{}^{i}_{pj}\}g^{pj} = 0$$

17. Δείξατε ότι μόνο τα μη μηδενικά σύμβολα $Christoffel$ δεύτερου είδους για τον V_2 στοιχείο μήκους $ds^2 = (dx^1)^2 + sin^2x^1(dx^2)^2$ είναι $\{{}^{1}_{22}\} = -sinx^1cosx^1, \{{}^{2}_{12}\} = \{{}^{2}_{21}\} = cotx^1$. Στην παρούσα περίπτωση έχουμε $g_{11} = 1$, $g_{22} = sin^2x^1$

$g_{12} = g_{21} = 0$ και $g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & sin^2x^1 \end{vmatrix} = sin^2x^1$

Επομένως,

$$g^{11} = \frac{\text{ελάσσονα υποορίζουσα του } g_{11} \text{ στην } |g_{ij}|}{|g_{ij}|} = \frac{sin^2x^1}{sin^2x^1} = 1$$

$$g^{22} = \frac{1}{sin^2x^1}, g^{12} = \frac{0}{sin^2x^1} = 0, g^{22} = 0$$

Τώρα

$$\{{}^{l}_{ij}\} = \frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \tag{1}$$

Από την (1) παίρνουμε

$$\{{}^{1}_{11}\} = \frac{1}{2}g^{1k}\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0 = 0(\because \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = 0)$$

$$\{{}^{2}_{22}\} = \frac{1}{2}g^{2k}\left(\frac{\partial g_{2k}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{sin^2x^1}\cdot 0 = 0$$

$$\{{}^{1}_{12}\} = \frac{1}{2}g^{1k}\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Επομένως $\{{}^1_{21}\} = 0$

$$\{{}^2_{11}\} = \frac{1}{2}g^{2k}\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$\{{}^2_{12}\} = \frac{1}{2}g^{2k}\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{sin^2x^1}2sinx^1cosx^1 = cotx^1$$

Έτσι,

$$\{{}^2_{21}\} = cotx^1$$

Τελικώς,

$$\{{}^1_{22}\} = \frac{1}{2}g^{1k}\left(\frac{\partial g_{2k}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}\cdot 2sinx^1cosx^1 = -sinx^1cosx^1$$

Έτσι από τα $2^3 = 8$ σύμβολα $Christoffel$ τα μόνα μη μηδενικά είναι τα:

$$\{{}^1_{22}\} = -sinx^1cosx^2 \text{και} \{{}^2_{12}\} = \{{}^2_{21}\} = cotx^1$$

18. Αν ο A_{ij} είναι ένας συμμετρικός τανυστής, δείξατε ότι τα $A_{ij,k}$ είναι συμμετρικά για τα i και j.

Έχουμε

$$A_{ij,k} = \frac{\partial A_{ji}}{\partial x^k} - A_{tj}\{{}^t_{ik}\} - A_{it}\{{}^t_{jk}\} \tag{1}$$

Επειδή ο A_{ij} είναι ένας (0,2) τανυστής,είναι επίσης και ο A_{ji} (βλ. λυμένο παράδειγμα 6, κεφάλαιο ΙΙ)

Επομένως,

$$A_{ji,k} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} - A_{tj}\{{}^t_{ik}\} - A_{jt}\{{}^t_{ik}\} \tag{2}$$

($\because A_{tj}$ είναι ένας συμμετρικός και $\{{}^i_{jk}\}$ συμμετρικά ως προς j και k)

Από την (1) και τη (2) έπεται ότι

$A_{ij,k} = A_{ji,k}$ Δηλαδή τα $A_{ij,k}$ είναι συμμετρικά στα i και j.

19. Αν A_{ij} είναι ένας συμμετρικός τανυστής τέτοιος ώστε $A_{ij,k} = A_{ik,j}$ να δειχθεί ότι ο $A_{ij,k}$ είναι ένας συμμετρικός τανυστής.

Από το παράδειγμα 18. ο $A_{ij,k}$ είναι συμμετρικός ως προς τα i και j. Επίσης από τη δοσμένη συνθήκη ο $A_{ij,k}$ είναι συμμετρικός ως προς τα j και k. Είναι επομένως αρκετό να δειχθεί ότι ο $A_{ij,k}$ είναι συμμετρικός ως προς τα j και k. Επομένως είναι αρκετό να δειχθεί ότι το $A_{ij,k}$ είναι συμμετρικό στα i και k
Έχουμε $A_{ij,k} = A_{ik,j}$ (από την υπόθεση)
$= A_{ki,j}$ (από το παρ. 18)
$= A_{kj,i}$ (από την υπόθεση)

Επομένως ο $A_{kj,i}$ είναι συμμετρικός ως προς τα i και k.

20. Αν ο στροβιλισμός ενός συναλλοίωτου διανύσματος είναι μηδέν, δείξατε ότι το διάνυσμα είναι μία βαθμίδα.

Έστω B_i ένα συναλλοίωτο διάνυσμα. Τότε ο στροβιλισμός του είναι $B_{i,j} - B_{j,i}$. Αν αυτός ο στροβιλισμός είναι μηδέν τότε

$$B_{i,j} - B_{j,i} = 0$$

ή,

$$\frac{\partial B_i}{\partial x^j} - B_p\{{}^p_{ij}\} - \left(\frac{\partial B_j}{\partial x^i} - B_p\{{}^p_{ji}\}\right) = 0$$

ή

$$\frac{\partial B_i}{\partial x^j} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} - B_p\{{}^p_{ij}\} + B_p\{{}^p_{ji}\} = 0$$

ή

$$\frac{\partial B_i}{\partial x^j} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} = 0 (\because \{{}^p_{ij}\} = \{{}^p_{ji}\}) \tag{1}$$

Άλλα η (1) επάγει ότι το $B_i dx^i$ είναι ένα τέλειο διαφορικό, έστω df, όπου f είναι μία συνάρτηση,

Επομένως, $B_i dx^i = df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$

ή

$$\left(B_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) dx^i = 0 \tag{2}$$

Επειδή το dx^i είναι ένα αυθαίρετο ανταλλοίωτο διάνυσμα, έπεται από τη (2) ότι $B_i - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$, ή, $B_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Επομένως, το B_i είναι η βαθμίδα της f, δηλαδή το B_i είναι μία βαθμίδα.

21. Αν A_{ij} είναι οι συνιστώσες οι συνιστώσες του στροβιλισμού ενός συναλλοίωτου διανύσματος B_i δείξατε ότι

$$A_{ij,k} + A_{jk,i} + A_{ki,j} = 0$$

Έχουμε

$$A_{ij} = B_{i,j} - B_{j,i} = \frac{\partial B_i}{\partial x^j} - B_p\{{}^p_{ij}\} - \left(\frac{\partial B_j}{\partial x^i} - B_p\{{}^p_{ji}\}\right)$$

$$= \frac{\partial B_i}{\partial x^j} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} (\because \{^p_{ij}\} = \{^p_{ji}\})$$

Επομένως,

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 B_i}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 B_j}{\partial x^k \partial x^i} \tag{1}$$

Τώρα,

$$A_{ij,k} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} - A_{pj}\{^p_{ik}\} - A_{ip}\{^p_{jk}\} \tag{2}$$

$$= \frac{\partial^2 B_i}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 B_j}{\partial x^k \partial x^i} - A_{pj}\{^p_{ik}\} - A_{ip}\{^p_{jk}\} \quad (\text{από } (1) \tag{3}$$

Θέτωντας $i = j, j = k$ και $k = i$ στην (3) παίρνουμε

$$A_{jk,i} = \frac{\partial^2 B_j}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 B_k}{\partial x^i \partial x^j} - A_{pk}\{^p_{ji}\} - A_{jp}\{^p_{ji}\} \tag{4}$$

Στη συνέχεια θέτωντας $j = k, k = i$ και $i = j$ στην (4) έχουμε

$$A_{ki,j} = \frac{\partial^2 B_k}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 B_i}{\partial x^j \partial x^k} - A_{pi}\{^p_{kj}\} - A_{kp}\{^p_{ij}\} \tag{5}$$

Προσθέτοντας τις (3), (4) και (5) παίρνουμε

$A_{ij,k} + A_{jk,i} + A_{ki,j} = 0$ ($\because A_{ij}$ είναι ένας αντισυμμετρικός και $\frac{\partial^2 B_i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 B_i}{\partial x^k \partial x^j}$)

22. Αν ϕ και ψ είναι αναλλοίωτα δείξατε ότι

$$div(\psi\phi_{,i}) = \psi g^{jk}\phi_{,jk} + g^{jk}\phi_{,j}\psi_{,k}$$

.

Επειδή το $\phi_{,i}$ είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, το $\psi\phi_{,i}$ είναι επίσης. Δηλώνουμε αυτό το διάνυσμα με B_i. Τότε $div(\psi\phi_{,i}) = divB_i = g^{jk}B_{j,k}$ (από την 3.58)
$= g^{jk}(\psi_{,k}\phi_{,j} + \psi\phi_{,jk})(\because B_j = \psi\phi_{,j})$
$= \psi g^{jk}\phi_{,jk} + g^{jk}\phi_{,j}\psi_{,k}$

23. Αν ο A^{ij} είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής, δείξατε ότι

$$A^{ij}_{,k} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}A^{ij})$$

Έχουμε

$$A^{ij}_{,k} = \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} + A^{pj}\{^i_{kp}\} + A^{ip}\{^j_{kp}\}$$

[από την 3.46]
Επομένως

$$A^{ij}_{,i} = \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^i} + A^{pj}\{^i_{ip}\} + A^{ip}\{^j_{ip}\}$$

$$= \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^i} + A^{pj}\{^{i}_{ip}\}$$

(παρ. 10)

$$= \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^t} + A^{pj}\frac{\partial}{\partial x^p}(log\sqrt{g})$$

(από την (vii) της III.6)

$$= \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^i} + A^{pj}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^p}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\sqrt{g}\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^i} + A^{pj}\frac{\partial}{\partial x^p}\sqrt{g}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^t}(\sqrt{g}A^{ij})$$

(έχοντας αντικαταστήσει τους δείκτες p με i)
24. Αν τα A^i και B^i είναι ορθογώνια διανύσματα, δείξατε ότι

$$A_iA^jB^i_{,j} = -B_iA^jA^i_{,j}$$

Από τη δοσμένη συνθήκη έχουμε

$$g_{ij}A^iB^j = 0 \tag{1}$$

Διαφορίζοντας την (1) συναλλοίωτα παίρνουμε
$(g_{ij})_{,k}A^iB^j + g_{ij}(A^i_{,k}B^j + A^iB^j_{,k}) = 0$
ή $g_{ij}(A^i_{,k}B^j + A^iB^j_{,k}) = 0(\because g_{ij,k} = 0)$
ή $g_{ij}B^jA^i_{,k} + g_{ij}A^iB^j_{,k} = 0$
ή $B^iA^i_{,k} + A_jB^j_{,k} = 0$
Πολλαπλασιάζοντας με A^k παίρνουμε
$B_iA^kA^i_{,k} + A_jA^kB^j_{,k} = 0$
ή, $A_jA^kB^j_{,k} = -B_iA^kA^i_{,k}$
ή, $A_iA^jB^i_{,j} = -B_iA^jA^i_{,j}$ (Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες j και k στην αριστερή μεριά με i και j αντίστοιχα και τον βουβό δείκτη k στην αριστερή μεριά με j)

25. Αν A^i είναι ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα έτσι ώστε $A^i_{,k} = a_kA^i$ όπου a_k είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, δείξατε ότι τα a_k μία βαθμίδα. Έχουμε,

$$g_{ij}A^iA^ja_k = g_{ij}(a_kA^i)A^j = g_{ij}A^i_{,k}A^j \tag{2}$$

(από τη δοσμένη συνθήκη)
Επίσης, $(g_{ij}A^iA^j)_{,k} = g_{ij,k}A^iA^j + g_{ij}(A^i_{,k}A^j + A^iA^j_{,k})$

$= g_{ij}A^i_{,k}A^j + g_{ij}A^iA^j_{,k}(\because g_{ij,k} = 0)$
$= 2g_{ij}A^i_{,k}A^j$
(Έχοντας αντικαταστήσει τους βουβούς δείκτες j και i στο δεύτερο όρο της δεξιάς πλευράς με i και j αντίστοιχα)
Επομένως,

$$g_{ij}A^i_{,k}A^j = \frac{1}{2}(g_{ij}A^iA^j)_{,k} \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε $g_{ij}A^iA^ja_k = \frac{1}{2}(g_{ij}A^iA^j)_{,k}$
ή, $\phi a_k = \frac{1}{2}\phi_{,k}$ όπου $\phi = g_{ij}A^iA^j$ =ένα αναλλοίωτο
$= \frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x^k}$
Επομένως, $a_k = \frac{1}{2\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}log\phi^{\frac{1}{2}}$
Έτσι το a_k είναι η κλίση του αναλλοίωτου $log\phi^{\frac{1}{2}}$
δηλαδή το a_k είναι ένα βαθμωτό.
26. Αν A^{ijk} είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής, δείξατε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^{ijk})$$

είναι ένας τανυστής.

Έχουμε

$$A^{ijk}_{,l} = \frac{\partial A^{ijk}}{\partial x^l} + A^{pjk}\{^i_{pl}\} + A^{ipk}\{^j_{pl}\} + A^{ijp}\{^k_{pl}\}$$

Επομένως,

$$A^{ijl}_{,l} = \frac{\partial A^{ijl}}{\partial x^l} + A^{pjl}\{^i_{pl}\} + A^{ipl}\{^j_{pl}\} + A^{ijp}\{^l_{pl}\}$$

$$= \frac{\partial A^{ijl}}{\partial x^l} + A^{ijp}\{^l_{pl}\}(\because A^{ipl}\{^j_{pl}\} = 0\text{βλ. παρ.9 ασκ 3})$$

$$= \frac{\partial A^{ijl}}{\partial x^l} + A^{ijp}\frac{\partial}{\partial x^p}(log\sqrt{g})$$

(από (vii) της III.6)

$$= \frac{\partial A^{ijl}}{\partial x^l} + \frac{1}{\sqrt{g}}A^{ijp}\frac{\partial}{\partial x^p}\sqrt{g}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^p}(A^{ijp}\sqrt{g}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(A^{ijk}\sqrt{g}) \tag{1}$$

(έχοντας αντικαταστήσει το βουβό δείκτη p με k)
Επειδή η αριστερή μεριά της (1) είναι ένας τανυστής, η δεξιά μεριά της (1) θα είναι επίσης.

27. Αποδείξτε ότι σε έναν V_3
$curl(\phi A) = \phi curl A - A \times grad\phi$
όπου ϕ είναι ένα αναλλοίωτο. Έχουμε $curl A = \epsilon^{ijk} A_{k,j}$ (από (3.89))
Τώρα $\phi A = \phi A_k = B_k$ έστω.
Τότε

$$B_{k,j} = \phi_{,j} A_k + \phi A_{k,j} \tag{1}$$

Επομένως $curl(\phi A) = curl B = \epsilon^{ijk} B_{k,j} = \epsilon^{ijk} \phi_{,j} A_k + \phi \epsilon^{ijk} A_{k,j}$
(από την(1)).
$= \phi \epsilon^{ijk} A_{k,j} - \epsilon^{ikj} \phi_{,j} A_k (\because \epsilon^{ijk} = -\epsilon^{ikj})$
$= \phi curl A - A \times grad\phi (\because A \times B = \epsilon^{ijk} A_j B_k$ από την (3.91))

28. Αν $A^i_j = R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R$, όπου $g^{ti} R_{tj} = R^i_j$
και $g^{ij} R_{ij} = R$,
δείξατε ότι $A^i_{j,k} = 0$
Συναλλοίωτη παραγώγιση της δοσμένης σχέσης δίνει

$A^i_{j,k} = R^i_{j,k} - \frac{1}{2}\delta^i_j R_{,k} (\because \delta^i_{j,k} = 0)$
Επομένως, $A^i_{j,i} = R^i_{j,i} - \frac{1}{2}\delta^i_j R_{,i}$

$$= R^i_{j,i} - \frac{1}{2} R_{,j} (\text{από ασκ.30})$$

$$= \frac{1}{2} R_{,j} - \frac{1}{2} R_{,j} = 0$$

Σημείωση Ο τανυστής A^i_j καλείται τανυστής *Einstein*
29. Αν σε έναν $V_n (n > 2)$, $R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 0$
να δειχθεί ότι $R_{ij} = 0$
Πολλαπλασιάζοντας τη δοσμένη σχέση με g^{ij} παίρνουμε

$$g^{ij} R_{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} g_{ij} R = 0$$

ή

$$R - \frac{1}{2} n R = 0$$

. Επομένως $R = 0 \ \because n > 2$
Θέτοντας $R = 0$ στη δοσμένη σχέση παίρνουμε

$$R_{ij} = 0$$

30. Δείξατε ότι για έναν V_2

$$\frac{R_{11}}{g_{11}} = \frac{R_{22}}{g_{22}} = \frac{R_{12}}{g_{12}} = -\frac{R_{1212}}{g}$$

(για R_{ijkl} δες σημείωση III.16)) έχουμε $R_{ij} = g^{hk} R_{ihkj}$

Στην παρούσα περίπτωση ενός V_2

$$R_{ij} = g^{11} R_{i11j} + g^{12} R_{i12j} + g^{21} R_{i21j} + g^{22} R_{i22j}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} R_{11} &= g^{11} R_{1111} + g^{12} R_{1121} + g^{21} R_{1211} + g^{22} R_{1221} \\ &= g^{22} R_{1221} = -g^{22} R_{1212} = -\frac{g_{11}}{g} R_{1212} \end{aligned}$$

Έτσι

$$\frac{R_{11}}{g_{11}} = -\frac{R_{1212}}{g} \tag{1}$$

Δεύτερον,

$$\begin{aligned} R_{22} &= g^{11} R_{2112} + g^{12} R_{2121} + g^{21} R_{2212} + g^{22} R_{2122} \\ &= g^{11} R_{2112} = -g^{11} R_{1212} = -\frac{g_{22}}{g} R_{1212} \end{aligned}$$

Έτσι

$$\frac{R_{12}}{g_{12}} = -\frac{R_{1212}}{g}$$

Από τις (1),(2) και (3) παίρνουμε

$$\frac{R_{11}}{g_{11}} = \frac{R_{22}}{g_{22}} = \frac{R_{12}}{g_{12}} = -\frac{R_{1212}}{g}$$

Σημείωση. Αυτό το αποτέλεσμα δηλώνεται μερικές φορές ως εξής: Σε δύο δισδιάστατους χώρους Riemann οι συνιστώσες του τανυστή *Ricci* είναι ανάλογες στις συνιστώσες του μετρικού τανυστή. (Ν.Υ.1987)

31. Δείξατε ότι σε έναν V_2

$$R_{ijkl} = -\frac{R}{2}(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk})$$

(για τον R_{ijkl} δες τη σημείωση της III.16)

Σε έναν V_2, τα μόνα μη μηδενικά R_{ijkl} είναι τα R_{1212},R_{2121},R_{1221},R_{2112}, τα υπόλοιπα όπως τα $R_{1111}, R_{2222}, R_{1112}, R_{2221}, R_{1121}$ κλπ είναι μηδέν. Στις τελευταίες περιπτώσεις ο τύπος

$$R_{ijkl} = -\frac{R}{2}(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk})$$

παραμένει προφανώς για κάθε πλευρά μηδέν. Έτσι έχουμε να δείξουμε ότι

$$R_{1212} = -\frac{R}{2}(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) \tag{1}$$

$$R_{2121} = -\frac{R}{2}(g_{22}g_{11} - g_{21}g_{12}) \tag{2}$$

$$R_{1221} = -\frac{R}{2}(g_{12}g_{21} - g_{11}g_{22}) \tag{3}$$

και

$$R_{2112} = -\frac{R}{2}(g_{21}g_{12} - g_{22}g_{11}) \tag{4}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν η (1) ισχύει, τότε και κάθε μία από τις (2),(3),(4) ισχύει επίσης. Έτσι είναι αρκετό να δείξουμε ότι η (1) ισχύει.

Τώρα

$$R = g^{ij}R_{ij} = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{12}R_{12} + g^{21}R_{21}$$

$$= -g^{11}\frac{R_{1212}}{g}g_{11} - g^{22}\frac{R_{1212}}{g}g_{22} + g^{12}\frac{R_{1212}}{g}g_{12} - g^{21}\frac{R_{1212}}{g}g_{21} =$$

$$= -\frac{R_{1212}}{g}\left(g^{11}g_{11} + g^{22}g_{22} + g^{12}g_{12} + g^{21}g_{21}\right) =$$

$$= -\frac{R_{1212}}{g}2 \quad (\because g^{ij}g_{ij} = 2)$$

Έτσι $\frac{R}{2} = -\frac{R_{1212}}{g}$ ή $R_{1212} = -\frac{R}{2}g = -\frac{R}{2}(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})$
$\left(\because g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}\right)$

32. Αν η συμφυής παράγωγος ενός μη μηδενικού διανύσματος A^i είναι μηδέν σε όλα τα σημεία μίας καμπύλης, δείξατε ότι το μέγεθος ενός διανύσματος είναι σταθερό κατά μήκος της καμπύλης.

Από τη δοσμένη συνθήκη έχουμε

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} = 0 \tag{1}$$

Τώρα,

$$\frac{\delta}{\delta t}(g_{ij}A^iA^j) = \left(\frac{\delta}{\delta t}g_{ij}\right)A^iA^j + g_{ij}\frac{\delta}{\delta t}(A^iA^j) =$$

$$= g_{ij}\left[\left(\frac{\delta A^i}{\delta t}\right)A^j + \left(\frac{\delta A^j}{\delta t}\right)A^i\right] = 0(\text{από την (1) }) \quad (\because \frac{\delta g_{ij}}{\delta t} = 0) \qquad (2)$$

Από την (2) έπεται ότι το $g_{ij}A^iA^j$ είναι σταθερό κατά μήκος της καμπύλης. Με άλλα λόγια το μέγεθος του διανύσματος A^i είναι σταθερό κατά μήκος της καμπύλης. ($\because$ το τετράγωνο του μήκους ενός διανύσματος είναι $g_{ij}A^iA^j$)

33. Δείξατε ότι

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}A^iB^j) = g_{ij}\frac{\delta A^i}{\delta t}B^j + g_{ij}A^i\frac{\delta B^j}{\delta t}$$

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}A^iB^j) = \frac{\delta}{\delta t}(g_{ij}A^iB^j) =$$

$$= \frac{\delta}{\delta t}(g_{ij})(A^iB^j) + g_{ij}\frac{\delta}{\delta t}(A^iB^j)$$

$$= 0\cdot(A^iB^j) + g_{ij}\left[\frac{\delta}{\delta t}A^i(B^j) + A^i\frac{\delta}{\delta t}B^j\right]$$

($\because \frac{\delta}{\delta t}g_{ij} = 0$)

$$= g_{ij}\frac{\delta A^i}{\delta t}B^j + A^i\frac{\delta}{\delta t}B^j$$

34. Αν A είναι το μέγεθος του A^i, δείξατε ότι $A^i_{,j} = A_{i,j}\frac{A^i}{A}$ Έχουμε $A^2 = g_{ik}A^iA^k$ Επομένως

$$2AA_{,j} = (g_{ik})_{,j}A^iA^k + g_{ki}(A^iA^k)_{,j} =$$

$$= g_{ik}[A^i_{,j}A^k + A^iA^k_{,j}]$$

($\because g_{ik,j} = 0$)

$$= g_{ik}A^i_{,j}A^k + g_{ki}A^k_{,j}A^i$$

$$= 2g_{ki}A^k_{,j}A^i = 2(g_{ki}A^k)_{,j}A^i =$$

$$= 2A_{i,j}A^i$$

Άρα $AA_{,j} = A_{i,j}A^i$
Επομένως $A_{,j} = A_{i,j}\frac{A^i}{A}$

35. Αποδείξατε ότι σε ένα χώρο Riemann $(R^h_{ijk}) = R_{ij,k} - R_{ik,j}$ ($C.U$ 1989)

Μπορούμε να γράψουμε την ταυτότητα του $Bianchi$ ως ακολούθως:

$$R^h_{ijk,m} + R^h_{imk,j} + R^h_{imj,k} = 0$$

Κάνοντας συστολή στα h και m στην (1) παίρνουμε

$$R^h_{ijk,h} + R^h_{ikh,j} + R^h_{ihj,k} = 0$$

ή,

$$R^h_{ijk,h} = -R^h_{ihj,k} - R^h_{ikh,j}$$
$$= R^h_{ijh,k} - R_{ik,j}$$

$[\because R^h_{ikh} = R_{ik}]$

$$= R_{ij,k} + R_{ik,j} =$$
$$= R_{ij,k} - R_{ik,j}$$

Με άλλα λόγια, $div(R^h_{ijk}) = R_{ij,k} - R_{ik,j}$

36. Αν $g^{ik}R_{kj} = R^i_j$ και $g^{ij}R_{ij} = R$ δείξατε ότι $R^i_{j,i} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^j}$
Η συναλλοίωτη παραγώγιση της σχέσης $g^{ik}R_{kj} = R^i_j$ δίνει
$R^i_{j,l} = g^{ik}R_{kj,l}(\because g^{ik}_{,l} = 0)$
Επομένως $R^i_{j,i} = g^{ik}R_{kj,i} = g^{ik}R^t_{kjt,i}(\because R^t_{kjt} = R_{kj})$

$= g^{ik}(g^{pt}R_{pkjt,i})_{,i}(\because g^{pt}R_{pkjt} = R^t_{kjt})$

$$= g^{ik}g^{pt}R_{pkjt,i} \tag{1}$$

$(\because g^{pt}_{,i} = 0)$
Η ταυτότητα του *Bianchi* (δες την 3.78) μπορεί να γραφεί ως

$$R_{pkjt,i} + R_{pkti,j} + R_{pkij,t} = 0 \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας τη (2) μπορούμε να γράψουμε την (1) ως

$$R^i_{j,i} = -g^{ik}g^{pt}(R_{pkti,j} + R_{pkij,t})$$
$$= -g^{pt}(g^{ik}R_{pkti,j} + g^{ik}R_{pkij,t})$$
$$= -g^{pt}(-g^{ik}R_{kpti,j} + g^{ik}R_{pkij,t})$$

$(\because R_{kpti} = -R_{pkti}$ και $R_{kpji} = R_{pkij})$

$$= -g^{pt}(-R^i_{pti,j} + R^i_{pji,t}) = (g^{pt}R_{pt})_{,j} - g^{pt}R_{pj,t}$$

$$R_{,j} - R^t_{j,t} = R_{,j} - R^i_{j,t}$$

(Αντικαθιστώντας τους δείκτες t και i)
Επομένως

$$2R^i_{j,i} = R_{,j}$$

ή

$$R^i_{j,i} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^i}.$$

37. Δείξατε ότι $(R^h_i - \frac{1}{2}\delta^h_i R)_{,h} = 0$ Έχουμε

$$(R^h_i - \frac{1}{2}\delta^h_i R)_{,h} = R^h_{i,h} - \frac{1}{2}\delta^h_i R_{,h} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}R - \frac{1}{2}R_{,i} \quad [\text{από την (36) }]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}R - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}R = 0$$

38. Αν $R_{ij,k} = 2\lambda_k R_{ij} + \lambda_i R_{kj} + \lambda_j R_{ik}$, όπου λ_i είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, δείξατε ότι $\lambda^i R_{ik} = 0$, όπου $g^{ik}\lambda_k = \lambda^i$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της δοσμένης σχέσης με g^{ij} και προσθέτοντας για i και j παίρνουμε

$$g^{ij}R_{ij,k} = 2\lambda_k g^{ij}R_{ij} + g^{ij}\lambda_i R_{kj} + g^{ij}\lambda_j R_{ik}$$

ή

$$\begin{aligned} R_{,k} &= 2\lambda_k R + \lambda^j R_{kj} + \lambda^i R_{ik} \\ &= 2\lambda_k R + \lambda^i R_{ik} \end{aligned} \tag{1}$$

$$(\because \lambda^i R_{kj} = \lambda^j R_{jk} = \lambda^i R_{ik})$$

Επίσης,

$$R_{ij,k} - R_{ik,j} = 2\lambda_k R_{ij} + \lambda_i R_{kj} + \lambda_j R_{ik} - 2\lambda_j R_{ik} - \lambda_i R_{jk} - \lambda_k R_{ij} =$$

$$\lambda_k R_{ij} - \lambda_j R_{ik} \tag{2}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της (2) με g^{ij} και προσθέτοντας για i και j παίρνουμε

$g^{ij}R_{ij,k} - g^{ij}R_{ik,j} = \lambda_k g^{ij}R_{ij} - g^{ij}\lambda_j R_{ik}$

ή

$$R_{,k} - R^j_{k,j} = \lambda_k R - \lambda^i R_{ik}$$

ή

$$R_{,k} - \frac{1}{2}R_{,k} = \lambda_k R - \lambda^i R_{ik} \quad (\text{από παρ.30})$$

ή

$$\frac{1}{2}R_{,k} = \lambda_k R - \lambda^i R_{ik}$$

ή

$$R_{,k} = 2\lambda_k R - 2\lambda^i R_{ik} \tag{3}$$

Από τις (1) και (3) παίρνουμε

$$2\lambda^i R_{ik} = -2\lambda^i R_{ik}$$

ή

$$4\lambda^i R_{ik} = 0$$

Επομένως,

$$\lambda^i R_{ik} = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3

1. Αν $U_i = \frac{1}{\sqrt{g^{pq}U_pU_q}}V_i$ όπου V_i είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, δείξατε ότι το U_i είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα.

2.Αν ϕ είναι ένα αναλλοίωτο, δείξατε ότι $\frac{\partial\phi}{\partial x^l}(g_{hj}g_{ik}-g_{hi}g_{jk})g^{hl} = \frac{\partial\phi}{\partial x^j}g_{ik}-\frac{\partial\phi}{\partial x^i}g_{jk}$

3. Αν $U^i = A^i + B^i$, όπου A^i και B^i είναι δύο ορθογώνια διανύσματα, δείξατε ότι το τετράγωνο του μήκους του διανύσματος U^i είναι 2.

4. Αν A^i και B^i είναι ορθογώνια διανύσματα ίδιου μήκους l, δείξατε ότι

$$(g_{hj}g_{ki} - g_{hk}g_{ji})A^hB^jA^kB^i = -l^4$$

5. Θεωρώντας ένα $n-$ διάστατο Ευκλείδειο χώρο E_n με ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες σαν μία ειδική περίπτωση ενός V_n, δείξατε ότι σε έναν E_n δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ συναλλοίωτου και ανταλλοίωτου διανύσματος.

6. Δείξατε ότι σε έναν V_4 με γραμμικό στοιχείο

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c(dx^4)^2$$

κάθε ένα από τα ακόλουθα διανύσματα είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα:

$$(i)\left(1, 1, 0, \frac{\sqrt{3}}{c}\right) \text{ και } (ii)\left(\sqrt{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{3}}{c}\right)$$

7. Δείξατε ότι

$$\frac{\partial logg}{\partial x^k} = g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

όπου $g = |g_{ij}|$

8. Αν $\{^{i}_{jk}\} = 0$ σε ένα σύστημα συντεταγμένων, προσδιορίστε πότε είναι μηδέν σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων.
9.Αν A^{ijk} είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής, δείξατε ότι

$$A^{ijk}\{^{l}_{ij}\} = A^{ijk}\{^{l}_{jk}\} = A^{ijk}\{^{l}_{ik}\} = 0$$

10. Προσδιορίστε ποια από τα $\{^{i}_{ij}\}$ είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος.

11. Αν $\Gamma^{i}_{jk} = \{^{i}_{jk}\} + \delta^{i}_{j}A_k + \delta^{i}_{k}A_j$, όπου A_i είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα και T^{ij} είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής, δείξατε ότι $T^{jk}\Gamma^{i}_{jk} = 0$.

12. Αν $T^{jk} = \delta^{i}_{j}\frac{\partial\phi}{\partial x^k} - \delta^{i}_{k}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}$, αποδείξατε ότι $g^{jk}T^{i}_{jk} = 0$, όπου ϕ είναι ένα αναλλοίωτο.

13. Αν $\Gamma^{i}_{jk} = \{^{i}_{jk}\} + 2\delta^{i}_{j}B_k$, όπου B_i είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, δείξατε ότι

$$g_{pj}\Gamma^{p}_{ik} + g_{ip}\Gamma^{p}_{jk} - 4g_{ij}B_k = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

14. Αν A_i είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, προσδιορίστε πότε τα $\{^{i}_{jk}\} + \delta^{i}_{j}A_k + \delta^{i}_{k}A_j$ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή.

15. Βρείτε τα σύμβολα $Christoffel$ δευτέρας τάξεως για τον V_2 για ένα γραμμικό στοιχείο

$$ds^2 = a^2(dx^1)^2 + a^2 sin^2 x^1 (dx^2)^2,$$

όπου α είναι μία σταθερά.

16(i). Δείξατε ότι μόνο τα μη-μηδενικά σύμβολα $Christoffel$ του πρώτου είδους για έναν V_3 με ένα γραμμικό στοιχείο $ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (dx^3)^2$ είναι $[22, 1] = -x^1$, $[12, 2] = [21, 2] = x^1$.
(ii) Υπολογίστε τα σύμβολα $Christoffel$ $[ij, k]$ και $\{^{i}_{jk}\}$ που σχετίζονται με τη μετρική $ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (x^1 sinx^2)^2(dx^3)^2$ $(C.U.1984)$

(iii) Δείξατε ότι αν σε έναν $V_3, g_{ij} = 0$ όταν $i \neq j$ τότε $\{^{l}_{ij}\} = 0$

(iv) Αν $g_{ij} = 0$, όπου $i \neq j$, δείξατε ότι $\{^{l}_{ij}\} = 0$ όποτε τα l, i, j είναι διαφορετικά.

17. Αν ο a_{ij} είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής δείξατε ότι τα $a_{ij,k}$ είναι αντισυμμετρικά για τους δείκτες i και j.

18. Αν ο a_{ij} είναι ο στροβιλισμός ενός συναλλοίωτου διανύσματος, αποδείξτε ότι$a_{ij,k}A^iA^j = 0$ για ένα αυθαίρετο διάνυσμα A^i

19. Αν a_{ij} είναι ο στροβιλισμός ενός συναλλοίωτου διανύσματος, δείξατε ότι

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j} = 0$$

20. Αν A_{ij} είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής έτσι ώστε $A_{ij,k} = A_{ik,j}$, δείξατε ότι $A_{ij,k} = 0$.

21. Αν ο a_{ij} είναι ένας συμμετρικός μη ιδιάζων $|a_{ij}| \neq 0$ τανυστής του τύπου (0,2), έτσι ώστε $a_{ij,k} = 0$, δείξατε ότι

$$\{{}^{l}_{ij}\} = \frac{1}{2}a^{lk}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

22. Αν $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$ σε ένα δοσμένο σημείο, δείξατε ότι οι συνιστώσες των συναλλοίωτων παραγώγων στο σημείο είναι οι ίδιες όπως οι μερικές παράγωγοι.

23. Αν A^{ij} είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής, δείξατε ότι ο

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(A^{ij}\sqrt{g})$$

είναι ένας τανυστής

24. Δείξατε ότι $A^{ij}_{,j} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(A^{ij}\sqrt{g}) + A^{jk}\{{}^{i}_{jk}\}$, όπου A^{ij} ένας τανυστής του τύπου (2,0). (Καλκούτα 1988)

25.Αν B_i είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα και T_{ij} είναι ένας συμμετρικός τανυστής, τέτοιος ώστε $B_kT_{ij} = B_jT_{ik}$, δείξατε ότι $T_{ij} = \rho B_iB_j$, όπου ρ είναι ένα μη μηδενικό βαθμωτό.

26. Δείξατε ότι οι μετασχηματισμοί των συμβόλων $Christoffel$ σχηματίζουν μία ομάδα.

27. Αν A^{ij} είναι ένας συμμετρικός τανυστής, αποδείξτε ότι

$$A^j_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(A^j_i\sqrt{g}) - \frac{1}{2}A^{jk}\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jk}$$

όπου $A^j_i = A^{jk}g_{ik}$.

28. Δείξατε ότι σε έναν V_n η έκφραση $\sqrt{|g_{ij}|}dx^1dx^2...dx^n$ είναι ένα αναλλοίωτο.

29. Αποδείξατε ότι σε έναν V_2 με γραμμικό στοιχείο $ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2$, η απόκλιση του συναλλοίωτου διανύσματος με συνιστώσες $x^1cos2x^2, -(x^1)^2sin2x^2$ είναι μηδέν.

30. Τα (x, y) είναι τα ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων σε ένα επίπεδο και $(\bar{x}, \bar{y})$ είναι συντεταγμένες που προσδιορίζονται από τις σχέσεις $x = \frac{1}{2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$, $y = \bar{x}\bar{y}$. Αν τα A_1, A_2 είναι οι συντεταγμένες ενός συναλλοίωτου διανύσματος στις $(\bar{x}, \bar{y})$ συντεταγμένες που ορίζονται από τα $A_1 = A_2 = (\bar{x}^2 - \bar{y}^2)^2$, δείξατε ότι η απόκλισή του είναι $\frac{2(\bar{x}-\bar{y})^2}{\bar{x}+\bar{y}}$.

31. Αν $A_{11} = A_{22} = 0, A_{12} = A_{21} = \frac{x^2+y^2}{xy}$ είναι οι συνιστώσες ενός συμμετρικού τανυστή σε ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες και x, y και $A^{11}, A^{22}, A^{12}, A^{21}$ είναι οι ανταλλοίωτες συνιστώσες πολικών συντεταγμένων r, θ, δείξατε ότι $A^{11} + r^2 A^{22} = 0$.

32. Αν οι συνιστώσες A_1, A_2, A_3 ενός διανύσματος σε κυλινδρικές συντεταγμένες ρ, ϕ, z, είναι $\rho, zsin\phi, e^{\phi}cosz$,δείξατε ότι $divA_i = 2 + \frac{z}{\rho^2}cos\phi - e^{\phi}sinz$.

33. Αν οι ανταλλοίωτες συνιστώσες A^i ενός διανύσματος σε σφαιρικές συντεταγμένες ρ, ϕ, θ είναι $r, 2cos\phi, -\theta$ βρείτε το $curlA_i$.

34. Αποδείξατε ότι σε έναν V_3 τα ϵ_{ijk} και ϵ^{ijk} είναι συσχετισμένοι τανυστές.

35. Αν σε έναν V_3 $C^i = \epsilon^{ipq}A_{pq}$, όπου A_{pq} είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής, δείξατε ότι $2A_{ij} = \epsilon_{ijt}C^t$.

36. Αν A^{ij} είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής σε έναν V_3, δείξατε ότι $(\sqrt{g}A^{23}, \sqrt{g}A^{31}, \sqrt{g}A^{12})$ είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος. Δείξατε ακόμα ότι αν A_{ij} είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής στον V_3, τότε $\left(\frac{1}{\sqrt{g}}A_{23}, \frac{1}{\sqrt{g}}A_{31}, \frac{1}{\sqrt{g}}A_{12}\right)$ είναι οι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου διανύσματος.

37. Αν $g_{it}R^t_{jkl} = R_{ijkl}$ αποδείξατε ότι $R_{ijkl} = -R_{jikl}$, $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$ και $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$.

38. Αποδείξατε ότι η σχέση $R_{ijkl} = R_{klij}$ έπεται από τις σχέσεις

$R_{ijkl} = -R_{jikl}$, $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$

και $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$.

39. Δείξατε ότι ότι αν σε έναν V_n $(n > 2)$

$$R_{hijk} = g_{hk}T_{ij} + g_{ij}T_{hk} - g_{hj}T_{ik} - g_{ik}T_{hj}$$

τότε

$$T_{ij} = T_{ji}$$

40. Αν σε έναν V_n, $R_{ij}R^{ij} = \frac{R^2}{n}$, όπου

$R^{ij} = g^{ip}g^{jq}R_{pq}$ και $R = g^{ij}R_{ij}$ αποδείξτε ότι $R_{ij} = \frac{R}{n}g^{ij}$

41. Αν σε έναν V_2 όπου $g_{11} = g_{22} = h > 0$ και $g_{12} = g_{21} = 0$, με την h να είναι μία συνάρτηση των x^1 και x^2, δείξατε ότι $R_{ij} = \frac{R}{2}g_{ij}$, όπου R_{ij} είναι ο τανυστής του $Ricci$ και R είναι η βαθμωτή καμπυλότητα. (Ν.Υ.1986)

42. Αν A^h είναι ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα, δείξατε ότι

$$A^h_{,jk} - A^h_{,kj} = A^i R^h_{ijk}$$

($C.U.$ 1989)

43. Αν A_i είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα έτσι ώστε
$A_{i,j} + A_{j,i} = 0$, δείξατε ότι $A_{i,jk} = -A_r R^r_{kij}$

44. Δείξατε ότι ένας V_2 με γραμμικό στοιχείο

$$ds^2 = 2f dx^1 dx^2 \quad f = f(x^1, x^2)$$

είναι επίπεδος αν

$$f\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^2} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial f}{\partial x^2}$$

45. Αν $A^i_j = R^i_j + \delta^i_j(aR + b)$, όπου a και b είναι σταθερές, προσδιορίστε την τιμή του a για το οποίο $A^i_{j,i} = 0$

46.Δείξατε ότι $\frac{d}{dt}(g_{ij}A^iA^j) = 2g_{ij}A^i\frac{\delta A^j}{\delta t}$

47. Αν A^i είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος μίας καμπύλης έτσι ώστε $\frac{\delta A^j}{\delta t} = 0$, δείξατε ότι $\frac{\delta A^j}{\delta t}$ είναι επίσης μηδέν.

48.Δείξατε ότι

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx^i}{dt}\right) = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \{^i_{jk}\}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}$$

49. Αν A^i και B^i είναι δύο μη μηδενικά διανυσματικά πεδία προσδιορισμένα κατά μήκος μιας καμπύλης έτσι ώστε οι συμφυείς παράγωγοι κατά μήκος της καμπύλης είναι μηδέν, δείξατε ότι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων σε κάθε σημείο της καμπύλης είναι σταθερή.

50. Αν $R_{ij,k} + R_{jk,i} + R_{ki,j} = 0$, αποδείξτε ότι η βαθμωτή καμπυλότητα R είναι σταθερή.

51. Αποδείξτε ότι σε έναν V_n ισχύει η παρακάτω ταυτότητα:

$$R^i_{jkl,m} + R^i_{ljm,k} + R^i_{mlk,j} + R^i_{kmj,l} = 0$$

52. Αποδείξτε χρησιμοποιώντας το νόμο πηλίκου αλλά όχι το λήμμα III.10, ότι αν A^i_{jk} είναι ένας τανυστής, τότε

$$\frac{\partial A^i_{jk}}{\partial x^l} + A^p_{jk}\{^i_{lp}\} - A^i_{pk}\{^p_{jl}\} - A^i_{jp}\{^p_{kl}\}$$

είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή του τύπου (1,3).

53. Αν $R_{ij,k} = 2\lambda_k R_{ij} + \lambda_i R_{kj} + \lambda_j R_{ik}$, όπου λ_i είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, δείξατε ότι
$\lambda_k = \frac{\partial}{\partial x^k} log\sqrt{R}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

8. Δεν είναι μηδέν σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων, επειδή η εξίσωση $\{^i_{jk}\} = 0$ δεν είναι μία τανυστική εξίσωση.

10. $\{^i_{ij}\}$ δεν είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος.

14. Όχι οι συνιστώσες ενός τανυστή.
15. $\{^1_{11}\} = 0$, $\{^2_{22}\} = 0$,$\{^1_{12}\} = \{^1_{21}\} = 0$, $\{^2_{11}\} = 0$,
$\{^1_{22}\} = -sinx^1 cosx^1$, $\{^2_{12}\} = \{^2_{21}\} = cotx^1$.
16(ii) $[21,2] = [12,2] = x^1$, $[31,3] = [13,3] = x^1(sinx^2)^2$

$[32,3] = [23,3] = (x^1)^3 sinx^2 cosx^2$
$\{^2_{21}\} = \{^2_{12}\} = \frac{1}{x^1}$,$\{^3_{31}\} = \{^3_{13}\} = \frac{1}{x^1}$, $\{^3_{32}\} = \{^3_{23}\} = cotx^2$.

33.$(-\theta cot\phi, \frac{2}{r}\theta, \frac{4}{r}cot\phi)$
45.$a = -\frac{1}{2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΕ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟ ΧΩΡΟ

$IV.0$ Τρισδιάστατος Ευκλείδειος χώρος και συνήθης διανυσματικός λογισμός.

Με τρισδιάστατο Ευκλείδιο χώρο θα εννοούμε ένα ειδικό τύπο του V_3 στον οποίο το γραμμικό στοιχείο δίνεται από

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{4.1}$$

όπου x^1, x^2, x^3 είναι ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες.[1] Ένας τέτοιος χώρος μπορεί να δηλωθεί με E_3.
Επομένως, ο συνήθης διανυσματικός λογισμός μπορεί να εκτιμηθεί σαν ένας τανυστικός λογισμός τανυστών τάξεως 1 του E_3.

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετούμε μερικά αποτελέσματα του τανυστικού λογισμού τανυστών τάξεως ένα του V_3 και παράγουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα του συνήθη διανυσματικού λογισμού από αυτά. Αυτό γίνεται για να δείξουμε την ισχύ του τανυστικού λογισμού.

$IV.1$ Μερικά χρήσιμα αποτελέσματα

Σε αυτή την παράγραφο θέτουμε μερικά αποτελέσματα τα οποία θα χρειαστούμε στην επόμενη παράγραφο.

Στον E_3 οι συνιστώσες των θεμελιωδών τανυστών g_{ij} και g^{ij} είναι οι ακόλουθες:

$g_{11} = 1, g_{22} = 1, g_{33} = 1$ $g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0,$
$g^{11} = 1, g^{22} = 1, g^{33} = 1$ $g^{12} = g^{21} = g^{13} = g^{31} = g^{23} = g^{32} = 0$

Επομένως στον E_3 ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(1) Τα σύμβολα $Christoffel$ είναι όλα μηδέν.

(2) $|g_{ij}| = 1$

[1] Αν x^1, x^2, x^3 είναι κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες, τότε το γραμμικό στοιχείο δίνεται από το $ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (dx^3)^2$
ή $ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (x^1)^2(sinx^2)^2(dx^3)^2$. Δες τη σημείωση της $V.2$ και τη σημείωση της $V.4$

(3) Δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ συναλλοίωτων και ανταλλοίωτων διανυσμάτων.
(4) Οι συναλλοίωτες παράγωγοι είναι ίσες με τις μερικές παραγώγους.
και (5) Οι συμφυείς παράγωγοι είναι ίσες με τις συνήθεις παραγώγους.

Σημείωση. Σημειώνεται ότι από την (3) φαίνεται ότι μόνο ένα είδος διανύσματος χρειάζεται μελέτη. Για ευκολία, ένα διάνυσμα του E_3 θα έπρεπε να ληφθεί πάντα σε συναλλοίωτη μορφή A_i. Μερικές φορές χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα A, B, C κλπ. του λατινικού αλφαβήτου για να δηλώσουμε διανύσματα με συνιστώσες A_i, B_i, C_i κλπ.

IV.2 **Μερικά αποτελέσματα του συνήθη διανυσματικού λογισμού παράγονται από τα αντίστοιχα αποτελέσματα του τανυστικού λογισμού σε έναν V_3.**

(*i*) **Βαθμωτό γινόμενο δύο διανυσμάτων:**

Αν σε έναν V_3, το βαθμωτό γινόμενο δύο διανυσμάτων A_i και B_i είναι $g^{ij}A_iB_j$.

Στον E_3, $g^{ij}A_iB_j = g^{11}A_1B_1 + g^{22}A_2B_2 + g^{33}A_3B_3 = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$
Έτσι αν στον E_3 το $A \cdot B$ δηλώνει το βαθμωτό γινόμενο δύο διανυσμάτων A και B με συνιστώσες A_i και B_i αντίστοιχα, τότε

$$A \cdot B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \tag{4.2}$$

(*ii*) **Διανυσματικό γινόμενο (εξωτερικό γινόμενο) δύο διανυσμάτων:**

Σε έναν V_3, οι συνιστώσες του διανυσματικού γινομένου δύο διανυσμάτων A_i και B_i είναι

$$\frac{1}{\sqrt{g}}(A_2B_3 - A_3B_2), \frac{1}{\sqrt{g}}(A_3B_1 - A_1B_3), \frac{1}{\sqrt{g}}(A_1B_2 - A_2B_1)$$

(δες 3.92)

Στον E_3 οι παραπάνω συνιστώσες παίρνουν τη μορφή

$$(A_2B_3 - A_3B_2), (A_3B_1 - A_1B_3), (A_1B_2 - A_2B_1)(\because g = 1).$$

Έτσι αν στον E_3, $A \times B$ δηλώνει το διάνυσματικό γινόμενο δύο διανυσμάτων A και B με συνιστώσες A_i και B_i τότε $A \times B = (A_2B_3 - A_3B_2, A_3B_1 - A_1B_3, A_1B_2 - A_2B_1$ (4.3)

(iii) **Βαθμίδα ενός βαθμωτού**

Σε έναν V_3 η κλίση ενός βαθμωτού, $\phi = \phi_{,j}$
Σε έναν E_3 το παραπάνω αποτέλεσμα παίρνει τη μορφή $\frac{\partial \phi}{\partial x^j}$
Έτσι στον E_3

$$Grad\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^j}$$

δηλαδή

$$Grad\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \phi}{\partial x^3}\right) \tag{4.4}$$

(iv) **Απόκλιση ενός διανύσματος:**

Σε έναν V_3, η απόκλιση ενός διανύσματος $A_i = g^{jk}A_{j,k}$ (δες 3.58)

Σε έναν E_3,

$$\begin{aligned} g^{jk}A_{j,k} &= g^{11}A_{1,1} + g^{22}A_{2,2} + g^{33}A_{3,3} \\ &= A_{1,1} + A_{2,2} + A_{3,3} \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} \end{aligned}$$

Επομένως στον E_3

$$divA_i = \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} \tag{4.5}$$

(v) **Στροβιλισμός ενός διανύσματος:**
Αν σε ένα V_3, οι συνιστώσες του στροβιλισμού ενός διανύσματος A_i είναι

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right), \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}\right), \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right) (des 3.90)$$

Στον E_3, αυτές οι συνιστώσες παίρνουν τη μορφή

$$\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}, \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}, \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} (\because g = 1)$$

Επομένως στον E_3,

$$CurlA_i = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}, \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}, \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right) \tag{4.6}$$

(vi) **Η Λαπλασιανή ενός αναλλοίωτου:**
Σε ένα V_3, η Λαπλασιανή ενός αναλλοίωτου ϕ δίνεται από

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{kj}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)(des3.60)$$

Στον E_3, $\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{kj}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(g^{kj}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)(\because g = 1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^1}\left(g^{11}\frac{\partial\phi}{\partial x^1} + g^{12}\frac{\partial\phi}{\partial x^2} + g^{13}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(g^{21}\frac{\partial\phi}{\partial x^1} + g^{22}\frac{\partial\phi}{\partial x^2} + g^{23}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(g^{31}\frac{\partial\phi}{\partial x^1} + g^{32}\frac{\partial\phi}{\partial x^2} + g^{33}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2\phi}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2\phi}{(\partial x^3)^2}(\because g^{12} = g^{13} = g^{23} = 0)$$

Από εδώ στον E_3

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2\phi}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2\phi}{(\partial x^3)^2} \tag{4.7}$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να δείξετε ότι στον E_3

$(i) div(A+B) = divA + divB$
$(ii) curl(A+B) = curlA + curlB.$
Περίπτωση (i)**:** Έστω A_i και B_i δύο διανύσματα ενός V_3
και $A_i + B_i = C_i$ (1)
Τότε $div(A_i + B_i) = div(C_i) = g^{jk}C_{j,k}$ (από την 3.58)
$= g^{jk}(A_{j,k} + B_{j,k})$
$= g^{jk}A_{j,k} + g^{jk}B_{j,k}$
$= divA_i + divB_i$

Έστω ότι στον E_3 τα A και B να είναι διανύσματα με συνιστώσες A_i και B_i. Τότε στον E_3, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$div(A+B) = divA + divB$$

Περίπτωση (ii)**:**

Σε έναν V_3

$$\begin{aligned} curl(A_i + B_i) &= curlC_i \\ &= \epsilon^{ikl} C_{l,k} \\ &= \epsilon^{ikl}(A_{l,k} + B_{l,k}) \\ &= \epsilon^{ikl} A_{l,k} + \epsilon^{ikl} B_{l,k} \\ &= curlA_i + curlB_i \end{aligned}$$

Στον E_3 η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως
$curl(A + B) = curlA + curlB$

2. Να δείξετε ότι στον E_3

$div(A \times B) = BcurlA - AcurlB$

Στον E_3, $A \times B = (A_2B_3 - A_3B_2, A_3B_1 - A_1B_3, A_1B_2 - A_2B_1)$ (από την 4.3)
Επομένως, $div(A \times B) = \frac{\partial}{\partial x^1}(A_2B_3 - A_3B_2) + \frac{\partial}{\partial x^2}(A_3B_1 - A_1B_3) + \frac{\partial}{\partial x^3}(A_1B_2 - A_2B_1)$(από την 4.5)

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial A_2}{\partial x^1} B_3 + \frac{\partial B_3}{\partial x^1} A_2 - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} B_2 - \frac{\partial B_2}{\partial x^1} A_3 \\ &+ \frac{\partial A_3}{\partial x^2} B_1 + \frac{\partial B_1}{\partial x^2} A_3 - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} B_3 - \frac{\partial B_3}{\partial x^2} A_1 \\ &+ \frac{\partial A_1}{\partial x^3} B_1 + \frac{\partial B_2}{\partial x^3} A_3 - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} B_3 - \frac{\partial B_1}{\partial x^3} A_1 \\ &= B_1 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \right) + B_2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \right) + B_3 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right) \\ &- A_1 \left(\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} \right) + A_2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^3} - \frac{\partial B_3}{\partial x^1} \right) + A_3 \left(\frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} \right) \\ &= BcurlA - AcurlB \end{aligned}$$

(από (4.2) και (4.6))

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4

1. Αν στον E_3, $A = (x^1, x^2, x^3)$ να δείξετε ότι
$divA = 3, curlA = 0$
και

$grad\frac{1}{|A|} = \left(-\frac{x^1}{|A|^3}, -\frac{x^2}{|A|^3}, -\frac{x^3}{|A|^3}\right)$
2. Αποδείξτε ότι στον E_3 $div(curlA) = 0$
3. Να δείξετε ότι στον E_3

$$curl(curlA) = graddivA - \nabla^2 A$$

4. Στον E_3, αποδείξτε τα ακόλουθα
$(i) grad(A \cdot B) = B \cdot \nabla A + A \cdot \nabla B + A \times curlB + B \times curlA$
$(ii) curl(A \times B) = B \cdot \nabla A - A \cdot \nabla B + AdivB - BdivA$

όπου $A \cdot \nabla B = A_j \frac{\partial B_i}{\partial x^j}$
5. Αν στον $E_3, A = (x^1, x^2, x^3)$και $B = (a^1, a^2, a^3)$, όπου a^1, a^2, a^3 είναι σταθερές, δείξατε ότι, $curl(B \times A) = 2B$

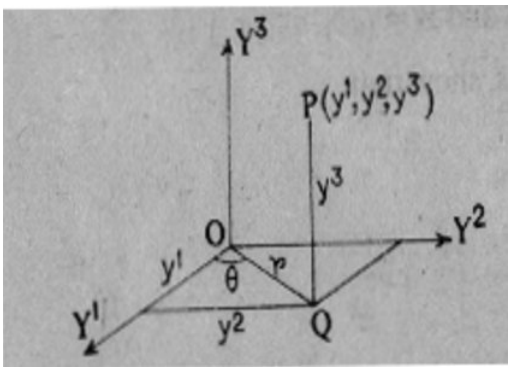
ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΈΝΩΝ ΣΤΟΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟ ΧΩΡΟ E_3 ΚΑΙ ΣΥΝΗΘΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΧΩΡΟ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΟ ΣΕ ΑΥΤΑ ΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

$V.0$ Στην επίπεδη αναλυτική γεωμετρία δύο συστήματα χρησιμοποιούνται γενικά, που ονομάζονται ορθογώνια Καρτεσιανά και πολικά. Υπάρχουν περιπτώσεις στην επίπεδη αναλυτική γεωμετρία για τα οποία ένα από αυτά τα συστήματα είναι περισσότερο κατάλληλο από το άλλο. Μια παρόμοια κατάσταση επικρατεί στη στερεά αναλυτική γεωμετρία. Εκτός από το ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα στον Ευκλείδειο χώρο, δύο άλλα συστήματα συντεταγμένων είναι κατάλληλα για χρήση σε περίπτωση όπου υπάρχει ένας άξονας συμμετρίας ή ένα κέντρο συμμετρίας. Αυτά τα συστήματα καλούνται κυλινδρικά πολικά και σφαιρικά πολικά συστήματα συντεταγμένων ή απλώς κυλινδρικά και σφαιρικά συστήματα συντεταγμένων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισαχθούν αυτά τα δύο συστήματα και θα μελετηθεί η συνήθης διανυσματική ανάλυση που αναφέρεται σε αυτά τα συστήματα.

$V.1$ Κυλινδρικά συστήματα συντεταγμένων.

Το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων είναι μία επέκταση του Ευκλείδειου χώρου του πολικού συστήματος συντεταγμένων στο Ευκλείδειο επίπεδο. Περιγράφεται ως ακολούθως:
Έστω P ένα σημείο του Ευκλείδειου χώρου E_3, με (y^1, y^2, y^3) να είναι οι ορθογώνιες συντεταγμένες του. Για διευκόλυνση παίρνουμε τις συντεταγμένες στο σημείο P ως (y^1, y^2, y^3), ακόμα κι αν είναι συνηθισμένο να τις παίρνουμε ως (x, y, z). Έστω Q η προβολή του P στο $y^1 - y^2$ επίπεδο (δες εικόνα) και (r, θ) να είναι οι πολικές συντεταγμένες του Q στο $y^1 - y^2$ επίπεδο με το O σαν πόλο και τη OY_1 σαν αρχική γραμμή του συστήματος.



Τότε τα r, θ, y^3 καλούνται κυλινδρικές συντεταγμένες του P. r καλείται η διανυσματική ακτίνα, θ καλείται η διανυσματική γωνία και y^3 καλείται προβολή του P. Ένα σημείο με κυλινδρικές συντεταγμένες r, θ, y^3 δηλώνεται με (r, θ, y^3). Έτσι
για κάθε σημείο P του E_3 υπάρχει μία ορισμένη τριάδα αριθμών r, θ, y^3, όπου $r \geq 0, -\pi < \theta \leq \pi$. Αντιστρόφως, δοσμένης μίας ορισμένης τριάδας αριθμών r, θ, y^3, που ικανοποιεί $r \geq 0, -\pi < \theta \leq \pi$, μπορεί να βρεθεί ένα μοναδικό σημείο P του χώρου, το οποίο λαμβάνεται ως ακολούθως:

Πρώτα βρίσκουμε το σημείο Q στο $y^1 - y^2$ επίπεδο, του οποίου οι πολικές συντεταγμένες είναι r, θ. Στη συνέχεια αφήνουμε ένα κομμάτι QP ίσο με το μήκος y^3 στην κάθετη στο $y^1 - y^2$ επίπεδο στο σημείο Q στη θετική ή στην αρνητική κατεύθυνση του Y^3 άξονα σύμφωνα με το αν το y^3 είναι θετικό ή αρνητικό. Τότε το P είναι το ζητούμενο σημείο του οποίου οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι r, θ, y^3.

Έχουμε $y^1 = rcos\theta$ και $y^2 = rsin\theta$. Από εδώ ο μετασχηματισμός από το κυλινδρικό στο ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται από

$$y^1 = rcos\theta$$

$$y^2 = rsin\theta \tag{1}$$

$$y^3 = y^3$$

Ο μετασχηματισμός από ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων λαμβάνεται από την (1) ως ακολούθως:

$$r = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}$$

$$\theta = tan^{-1}\frac{y^2}{y^1} \tag{2}$$

$$y^3 = y^3$$

$V.2$ Στοιχείο απόστασης σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Έστω (y^1, y^2, y^3) και $(y^1 + dy^1, y^2 + dy^2, y^3 + dy^3)$ να είναι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες δύο σημείων P και Q και έστω οι κυλινδρικές τους συντεταγμένες να είναι (r, θ, y^3) και $(r + dr, \theta + d\theta, y^3 + dy^3)$, όπου $dr, d\theta, dy^3$ να είναι μικρές αυξήσεις των r, θ, y^3 αντίστοιχα.

Έστω ότι το ds δηλώνει την απόσταση μεταξύ P και Q.

Τότε

$$(ds^2) = [(y^1 + dy^1) - y^1]^2 + [(y^2 + dy^2) - y^2]^2 + [(y^3 + dy^3) - y^3]^2 =$$

$$= (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 \tag{1}$$

Τώρα $y^1 = rcos\theta, y^2 = rsin\theta, y^3 = y^3$. Επομένως παίρνοντας τα διαφορικά έχουμε

$dy^1 = drcos\theta + r(-sin\theta)d\theta = drcos\theta - rsin\theta d\theta$ και
$dy^2 = drsin\theta + rcos\theta d\theta$

Επομένως $(dy^1)^2 + (dy^2)^2 = (dr)^2(cos^2\theta + sin^2\theta) + r^2(d\theta)^2(sin0^2\theta + cos^2\theta) - 2rdrsin\theta cos\theta d\theta$

$$= (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$$

Επομένως η (1)μπορεί να εκφραστεί ως

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (y^3)^2 \tag{2}$$

Αυτό δίνει τα ζητούμενα στοιχεία απόστασης

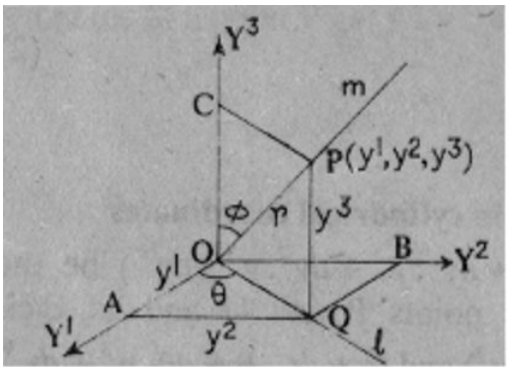
Σημείωση: Παίρνοντας για $x^1 = r, x^2 = \theta$ και $x^3 = y^3$ το γραμμικό στοιχείο (2) μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως:

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{3}$$

Αυτό δίνει το στοιχείο απόστασης σε κυλινδρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3.

$V.3$ Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Έστω P ένα σημείο του E_3 με y^1, y^2, y^3 οι ορθογώνιες καρτεσιανές του συντεταγμένες και Q να είναι η προβολή του P στο $y^1 - y^2$ επίπεδο (δες εικόνα).



Έστω (r, θ) οι πολικές συντεταγμένες του Q στο $(y^1 - y^2)$ επίπεδο με O ως πόλο και OY^1 να είναι η αρχική ημιευθεία του συστήματος συντεταγμένων. Έστω ότι το OP κατασκευάζει μία γωνία ϕ με το θετικό Y^3 άξονα, όπου $0 \leq \phi \leq 180^o$. Τότε τα r, θ, ϕ καλούνται σφαιρικές συντεταγμένες του P. r καλείται ακτινικό διάνυσμα, ϕ καλείται η ζενιθιακή και θ η αζιμούθια γωνία του P. Το σημείο P με συντεταγμένες r, ϕ, θ δηλώνεται ως (r, ϕ, θ).

Έτσι για κάθε σημείο P του E_3 υπάρχει ορισμένη τριάδα αριθμών r, ϕ, θ που ικανοποίει τη συνθήκη $r \geq 0, 0 \leq \phi \leq 180^o, -\pi < \theta \leq \pi$. Αντιστρόφως, δοσμένης μίας ορισμένης τριάδας αριθμών r, ϕ, θ που ικανοποιούν τη συνθήκη $r \geq 0, 0 \leq \phi \leq 180^o, -\pi < \theta \leq \pi$, θα βρεθεί ένα μοναδικό σημείο P του E_3 το οποίο λαμβάνεται ως ακολούθως:

Πρώτα βρίσκουμε την ημιευθεία l στο $y^1 - y^2$ επίπεδο που ξεκινά από το O σχηματίζοντας μία γωνία θ με το θετικό Y^1 άξονα. Στη συνέχεια, στο επίπεδο που ορίζεται από τους l και U^3 άξονες βρίσκουμε την ημιευθεία m που ξεκινά από το O σχηματίζοντας μία γωνία ϕ με τον θετικό Y^3 άξονα (δες εικόνα). Τελικώς, στην ημιευθεία m κόβουμε ένα κομμάτι $OP = r$. Τότε το P είναι το ζητούμενο σημείο του οποίου οι σφαιρικές συντεταγμένες είναι r, ϕ, θ.

Έστω ότι οι προβολές του P στους Y^1, Y^2 και Y^3 άξονες είναι A, B, C αντίστοιχα (δες εικόνα).

Από το τρίγωνο OPC έχουμε

$$CP = rsin\phi \tag{1}$$

Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο OAQ παίρνουμε $y^1 = OA = OQcos\theta$ $(\because OQ = CP)$
$= rsin\phi cos\theta$ (από την (1))

Τελικώς από το ορθογώνιο τρίγωνο OPQ παίρνουμε $y^3 = QP = OPsin(90^o - \phi) = OPcos\phi = rcos\phi$.
Έτσι ο μετασχηματισμός από το σφαιρικό στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται από

$$\begin{aligned} y^1 &= rsin\phi cos\theta \\ y^2 &= rsin\phi sin\theta \\ y^3 &= rcos\phi \end{aligned} \tag{2}$$

Ο μετασχηματισμός από το ορθογώνιο καρτεσιανό στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων λαμβάνεται από την (2) ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2} \\ \phi &= cos^{-1}\frac{y^3}{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}} \\ \theta &= tan^{-1}\frac{y^2}{y^1} \end{aligned} \tag{3}$$

$V.4$ Στοιχείο απόστασης σε σφαιρικές συντεταγμένες

Έστω (y^1, y^2, y^3) και $(y^1+dy^1, y^2+dy^2, y^3+dy^3)$ οι καρτεσιανές συντεταγμένες δύο σημείων P και Q αντίστοιχα του E_3 και (r, ϕ, θ),$(r+dr, \phi+d\phi, \theta+d\theta)$ να είναι οι αντίστοιχες σφαιρικές συντεταγμένες όπου $dr, d\phi, d\theta$ να είναι μικρές αυξήσεις των r, ϕ και θ αντίστοιχα. Έστω ds να δηλώνει την απόσταση μεταξύ P και Q.

Τότε

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= [(y^1 + dy^1) - y^1]^2 + [(y^2 + dy^2) - y^2]^2 + [(y^3 + dy^3) - y^3]^2 \\ &= (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Τώρα, $y^1 = rsin\phi cos\theta$
$y^2 = rsin\phi sin\theta$ (2)
και $y^3 = rcos\phi$

Επομένως, παίρνοντας τα διαφορικά παίρνουμε

$$\begin{aligned} dy^1 &= drsin\phi cos\theta + d\phi rcos\phi cos\theta - rsin\phi cos\theta d\theta \\ dy^2 &= drsin\phi sin\theta + d\phi rcos\phi sin\theta + rsin\phi cos\theta d\theta \\ dy^3 &= drcos\phi - rsin\phi d\phi \end{aligned}$$

Επομένως, $(dy^1)^2 + (dy^2)^2 = (dr)^2 sin^2\phi(cos^2\theta + sin^2\theta)$

$$+r^2cos^2\phi(d\phi)^2(cos^2\theta + sin^2\theta)$$
$$+r^2sin^2\phi(d\theta)^2(sin^2\theta + cos^2\theta)$$
$$+2drd\phi rsin\phi cos\phi cos^2\theta + 2drd\phi rsin\phi cos\phi sin^2\theta$$
$$-2rdrd\theta cos\theta sin\theta sin^2\phi + 2rdrd\theta cos\theta sin\theta sin^2\phi$$
$$-2d\phi d\theta r^2 sin\phi cos\phi cos\theta + 2d\phi d\theta r^2 sin\phi cos\phi sin\theta cos\theta$$
$$= (dr)^2 sin^2\phi + r^2cos^2\phi(d\phi)^2 + r^2sin^2\phi(d\theta)^2 + 2rdrd\phi sin\phi cos\phi$$

Επομένως

$$(dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2$$
$$= (dr)^2 sin^2\phi + (d\phi)^2 r^2 cos^2\phi + (d\theta)^2 r^2 sin^2\phi$$
$$+2rdrd\phi sin\phi cos\phi + (dr)^2 cos^2\phi + (d\phi)^2 r^2 sin^2\phi - 2rdrd\phi sin\phi cos\phi$$
$$= (dr)^2(sin^2\phi + cos^2\phi) + r^2(d\phi)^2(cos^2\phi + sin^2\phi) + (d\theta)^2 r^2 sin^2\phi$$
$$= (dr)^2 + r^2(d\phi)^2 + r^2 sin^2\phi(d\theta)^2$$

Επομένως η (1) μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\phi)^2 + r^2 sin^2\phi(d\theta)^2 \tag{2}$$

Αυτό δίνει το ζητούμενο στοιχείο απόστασης.

Σημείωση. Παίρνοντας $x^1 = r$,$x^2 = \phi$ και $x^3 = \theta$ το στοιχείο απόστασης (2) μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως:

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (x^1 sinx^2)^2(dx^3)^2 \tag{3}$$

Αυτό δίνει το στοιχείο απόστασης σε σφαιρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3.

V.5 Συντεταγμένες επιφάνειες και συντεταγμένες καμπύλες μέσω σημείου σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Θεωρούμε κυλινδρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3 που δίνονται από

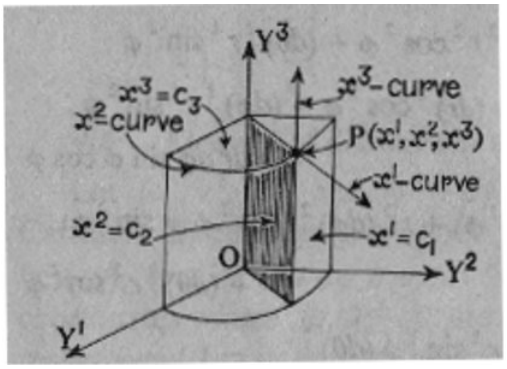
$$y^1 = x^1 cosx^2$$
$$y^2 = x^1 sinx^2$$
$$y^3 = x^3.$$

Έστω ότι τα y^1, y^2, y^3 είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου P και x^1, x^2, x^3 να είναι οι κυλινδρικές του συντεταγμένες.

Τότε $y^1 = x^1 cosx^2$, $y^2 = x^1 sinx^2$, $y^3 = x^3$
Έστω κρατάμε σταθερό το x^1, έστω $x^1 = c_1$, όπου c_1 είναι μία σταθερά και έστω τα x^2 και x^3 να μπορούν να μεταβάλλονται. Τότε $y^1 = c_1 cosx^2$, $y^2 = c_1 sinx^2$ και $y^3 = x^3$.
Επομένως

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 = c_1^2(cos^2x^2 + sin^2x^2) = c_1^2 \tag{1}$$

Από την (1) έπεται ότι το σημείο $P(y^1, y^2, y^3)$ βρίσκεται σε έναν κύλινδρο με τον Y^3 άξονα σαν άξονά του.
Έτσι $x^1 = c_1$ αναπαριστάνει μία επιφάνεια η οποία είναι ένας κυκλικός κύλινδρος με τον Y^3 άξονα σαν άξονά του. (δες εικόνα)



Στη συνέχεια, έστω x^2 να μπορούν να κρατηθούν σταθερά, πείτε $x^2 = c_2$, όπου c_2 είναι μία σταθερά και έστω x^1 και x^3 να μπορούν να μεταβάλλονται. Τότε $y^1 = x^1 cosc_2$, $y^2 = x^1 sinc_2$, $y^3 = x^3$

Έτσι $tanc_2 = \frac{y^2}{y^1}$ ή $\frac{y^2}{y^1} = \lambda$, όπου $\lambda = tanc_2 =$μία σταθερά.
ή $\lambda y^1 - y^2 = 0$ (2)
Από τη (2) έπεται ότι το σημείο $P(y^1, y^2, y^3)$ βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο που διέρχεται από τον Y^3 άξονα.
Έτσι το $x^2 = c_2$ αναπαριστά μία επιφάνεια, δηλαδή ένα επίπεδο που διέρχεται από τον Y^3 άξονα (δες εικόνα).
Τελικώς, έστω ότι κρατάμε το x^3 σταθερό, πείτε $x^3 = c_3$, όπου c_3 είναι μία σταθερά και τα x^1 και x^2 να μπορούν να μεταβάλλονται.
Τότε $y^3 = c_3$ (3)

Από την (3) έπεται ότι το $P(y^1, y^2, y^3)$ κείται ενός επιπέδου παράλληλου στο $(y^1 - y^2)$ επίπεδο.

Έτσι, η $x^3 = c_3$ παριστάνει μία επιφάνεια, δηλαδή ένα επίπεδο παράλληλο στο $(y^1 - y^2)$ επίπεδο (δες εικόνα).

Κάθε μία από τις επιφάνειες $x^1 = c_1$, $x^2 = c_2$, $x^3 = c_3$ καλείται μία *συντεταγμένη επιφάνεια*. Θα υπάρχουν τρεις οικογένειες τέτοιων επιφανειών που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές των c_1, c_2, c_3.

Συντεταγμένες καμπύλες:

Έστω ότι κρατάμε δύο συντεταγμένες x^1,x^3 σταθερές, πείτε $x^1 = c_1$, και $x^3 = c_3$, όπου c_1 και c_3 είναι σταθερές και η x^2 να μπορεί να μεταβάλλεται. Τότε παίρνουμε

$y^1 = c_1 cosx^2$
$y^2 = c_1 cosx^2$
$y^1 = c_3$

Έτσι $(y^1)^2 + (y^2)^2 = c_1^2$,$y^3 = c_3$ (4)

Από την (4) βλέπουμε ότι το σημείο $P(y^1, y^2, y^3)$ κείται σε ένα κύκλο ακτίνας c_1 στο επίπεδο $y^3 = c_3$ παράλληλο στο $(y^1 - y^2)$ επίπεδο.
Επομένως το P κείται σε μία καμπύλη.
Έτσι τα $x^1 = c_1$, $x^3 = c_3$ αναπαριστούν μία καμπύλη η οποία καλείται μία *συντεταγμένη καμπύλη*. Αυτή η καμπύλη καλείται x^2 καμπύλη (δες εικόνα).

Στη συνέχεια κρατήστε τα x^1 και x^2 σταθερά, έστω $x^1 = c_1$ και $x^2 = c_2$, όπου c_1 και c_2 είναι σταθερές και έστω το x^3 να μπορεί να μεταβάλλεται.
Τότε $y^1 = c_1 cosc_2$, $y^2 = c_1 sinc_2$, $y^3 = x^3$

Επομένως $\frac{y^1}{y^2} = cotc_2$, $y^3 = x^3$
ή, $y^1 - \lambda y^2 = 0$ $y^3 = x^3$ (5)
όπου $\lambda = cotc_2$ =μία σταθερά.
Από την (5) έπεται ότι, το σημείο $P(y^1, y^2, y^3)$, κείται σε ευθεία γραμμή παράλληλη στον Y^3 άξονα (δες εικόνα)

Έτσι $x^1 = c_1$ και $x^2 = c_2$ αναπαριστά μία καμπύλη η οποία καλείται συντεταγμένη καμπύλη. Αυτή η καμπύλη καλείται x^3-καμπύλη.

Τελικώς, θεωρούμε τα x^2 και x^3 σταθερά, πείτε $x^2 = c_2$, $x^3 = c_2$, όπου c_2 και c_3 είναι σταθερές και έστω το x^1 να μπορεί να μεταβάλλεται. Τότε

παίρνουμε

$y^1 = x^1 cosc_2, y^2 = x^1 sinc_2, y^3 = c_3$

Έτσι, $\frac{y^1}{y^2} = cotc_2, y^3 = c_3$ ή $y^1 - \lambda y^2 = 0,\ y^3 = c_3$ (6)

όπου $\lambda = cotc_2 =$ σταθερά.

Από την (6), έπεται ότι το $P(y^1, y^2, y^3)$ κείται στην τομή δύο επιπέδων, δηλαδή το P κείται στην ευθεία γραμμή (δες εικόνα).
Έτσι τα $x^2 = c_2$, $x^3 = c_3$ αναπαριστούν μία καμπύλη η οποία καλείται μία άλλη συντεταγμένη καμπύλη. Αυτή η καμπύλη καλείται x^1 καμπύλη.

Κατά μήκος δοσμένου σημείου $P(x^1, x^2, x^3)$ περνάνε τρεις συντεταγμένες καμπύλες που αντιστοιχούν στις σταθερές τιμές c_1, c_2, c_3. Σημειώνεται ότι από αυτές τις τρεις καμπύλες η μία είναι κύκλος και οι άλλες δύο ευθείες γραμμές.

$V.6$ Συντεταγμένες επιφάνειες και συντεταγμένες καμπύλες κατά μήκος ενός σημείου σε σφαιρικές συντεταγμένες

Θεωρούμε σφαιρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3 που δίνονται από τις

$$y^1 = x^1 sinx^2 cosx^3$$

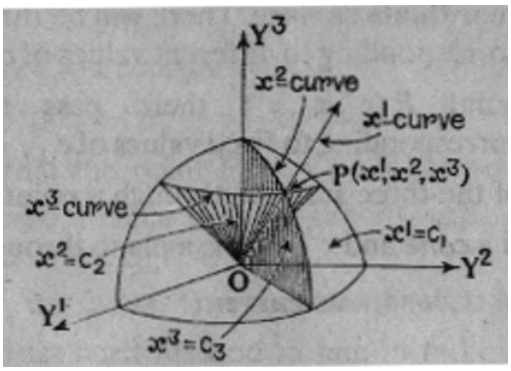
$$y^2 = x^1 sinx^2 sinx^3$$

$$y^3 = x^1 cosx^2$$

Έστω y^1, y^2, y^3 οι ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου P και x^1, x^2, x^3 να είναι οι σφαιρικές του συντεταγμένες. Αν το x^1 κρατείται σταθερό, πείτε $x^1 = c_1$, όπου c_1 είναι μία σταθερά και x^2, x^3 μπορούν να μεταβάλλονται, τότε $y^1 = c_1 cosx^2 cosx^3, y^2 = c_1 sinx^2 sinx^3, y^3 = c_1 cosx^2$.

Επομένως, $(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = c_1^2 (sinx^2)^2 (cos^2 x^3 + sin^2 x^3) + c_1^2 (cosx^2)^2$
$c_1^2 (sinx^2)^2 + c_1^2 (cosx^2)^2 = c_1^2$ (1)

Από την (1) έπεται ότι το σημείο $P(y^1, y^2, y^3)$ κείται σε μία σφαίρα της οποίας το κέντρο είναι η αρχή και η ακτίνα είναι c_1 (δες εικόνα).



Έτσι το $x^1 = c_1$ αναπαριστά μία επιφάνεια. Στη συνέχεια, έστω ότι κρατάμε το x^2 σταθερό, πείτε $x^2 = c_2$, όπου c_2 είναι μία σταθερά και έστω ότι τα x^1 και x^3 να μπορούν να μεταβάλλονται.
Τότε $y^1 = x^1 sinc_2 cosx^3, y^2 = x^1 sinc_2 sinx^3, y^3 = x^1 cosc_2$.

ή,

$$cosc_2 = \frac{y^3}{x^1} = \frac{y^3}{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}}$$

ή,

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = \lambda^2 (y^3)^2$$

, όπου
$\lambda = secc_2 =$ σταθερά

ή,

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 = (\lambda^2 - 1)(y^3)^2 \tag{2}$$

Από τη (2) έπεται ότι το σημείο $P(y^1, y^2, y^3)$ κείται σε ένα κώνο, του οποίου η άκρη είναι η αρχή και ο άξονας είναι ο Y^3 άξονας (δες εικόνα).

Έτσι η $x^2 = c_2$ αναπαριστά μία επιφάνεια.

Τελικώς, κρατάμε το x^3 σταθερό, πείτε $x^3 = c_3$, όπου c_3 είναι μία σταθερά και να αφήσουμε τα x^1 και x^2 να μεταβάλλονται.

Τότε $cotx^3 = \frac{y^1}{y^2}$ ή, $y^1 - \lambda y^2 = 0$ (3)

όπου $\lambda cotx^3 =$ μία σταθερά.

Από την (3) έπεται ότι το $P(y^1, y^2, y^3)$ κείται σε ένα επίπεδο που διέρχεται από τον Y^3 άξονα. (δες εικόνα).

Έτσι η $x^3 = c_3$ αναπαριστά μία επιφάνεια.

Κάθε μία από τις επιφάνειες $x^1 = c_1$, $x^2 = c_2$, $x^3 = c_3$ καλείται μία **συντεταγμένη επιφάνεια**. Θα υπάρχουν τρεις οικογένειες τέτοιων επιφανειών που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές των c_1, c_2, c_3. Μέσα από ένα δοσμένο σημείο $P(x^1, x^2, x^3)$ περνάνε τρεις συντεταγμένες επιφάνειες που αντιστοιχούν σε τρεις σταθερές τιμές των c_1, c_2, c_3. Σημειώνεται ότι οι τρεις επιφάνειες που τέμνονται σε ένα σημείο, $x^1 = c_1$ είναι ένας κώνος, $x^2 = c_2$ είναι ένας κώνος και $x^3 = c_3$ είναι ένα επίπεδο διά μέσω του Y^3 άξονα.

Συντεταγμένες καμπύλες:

Έστω x^1 και x^2 κρατούνται σταθερές, πείτε $x^1 = c_1$ και $x^2 = c_2$, όπου c_1 και c_2 είναι σταθερές και το x^3 να μπορεί να μεταβάλλεται ελεύθερα.

Τότε $y^1 = c_1 sinc_2 cosx^3$
$y^2 = c_1 sinc_2 sinx^3$
και $y^3 = c_1 cosc_2$

Επομένως,

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 = c_1^2 sin^2 c_2 (cos^2 x^3 + sin^2 x^3)$$

$$c_1^2 sin^2 c_2 = \lambda^2,$$

όπου $\lambda = c_1 sinc_2 =$ σταθερά
και $y^3 = \mu$, όπου $\mu = c_1 cosc_2 =$ σταθερά.
Επομένως $(y^1)^2 + (y^2)^2 = \lambda^2$, $y^3 = \mu$ (4)

Από την (4) έπεται ότι το σημείο $P(y^1, y^2, y^3)$ είναι η τομή ενός κυλίνδρου που έχει Y^3 άξονα σαν άξονά του και ενός επιπέδου παράλληλου στο $(y^1 - y^2)$ επίπεδο.

Έτσι η (4) αναπαριστά ένα κύκλο στο επίπεδο $y^3 = \mu$ (δες εικόνα)
Επομένως η (4) είναι μία καμπύλη η οποία καλείται συντεταγμένη καμπύλη. Αυτή η καμπύλη καλείται x^3 καμπύλη.

Στη συνέχεια, έστω ότι κρατάμε τα x^1 και x^3 σταθερά, πείτε $x^1 = c_1$ και $x^3 = c_3$ όπου c_1 και c_3 είναι σταθερές και έστω ότι το x^2 μπορεί να μεταβάλλεται ελεύθερα.
Τότε $y^1 = c_1 sinx^2 cosc_3$,$y^2 = c_1 sinx^2 sinc_3$,$y^3 = c_1 cosx^2$
Έτσι,

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = c_1^2 (sinx^2)^2 (cos^2 c_3 + sin^2 c_3) + c_1^2 (cosx^2)^2$$

$$= c_1^2(sinx^2)^2 + c_1^2(cosx^2)^2 = c_1^2$$

και

$$\frac{y^2}{y^1} = tanc_3$$

ή

$$y^2 - \lambda y^1 = 0$$

όπου $\lambda = tanc_3 =$ μία σταθερά.
Έτσι $(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = c_1^2$,$y^2 - \lambda y^1 = 0$ (5)

Από την (5) έπεται ότι το σημείο $P(y^1, y^2, y^3)$ κείται στην τομή μίας σφαίρας κι ενός επιπέδου διαμέσου του άξονα Y^3. Αυτή η τομή είναι ένας μέγιστος κύκλος. (δες εικόνα)

Έτσι $x^1 = c_1$, $x^3 = c_3$ είναι ένας κύκλος. Αυτός ο κύκλος καλείται άλλη μία συντεταγμένη καμπύλη. Καλείται x^2 καμπύλη.
Τελικώς, έστω ότι κρατάμε τα x^2 και x^3 σταθερά, πείτε $x^2 = c_2$ και $x^3 = c_3$ και έστω ότι το x^1 να μπορεί να μεταβάλλεται.

Τότε $y^1 = x^1 sinc_2 cosc_3$ $y^2 = x^1 sinc_2 sinc_3$, $y^3 = x^1 cosc_2$

Επομένως, $cosc_2 = \frac{y^3}{x^1} = \frac{y^3}{\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2}}$

ή, $(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = \lambda^2(y^3)^2$ όπου
$\lambda = secc_2 =$ μία σταθερά.
ή, $(y^1)^2 + (y^2)^2 = (\lambda^2 - 1)(y^3)^2$
Έπίσης $\frac{y^2}{y^1} = tanc_3$, ή $\mu y^1 - y^2 = 0$
όπου $\mu = tanc_3 =$ μία σταθερά
Έτσι $(y^1)^2 + (y^2)^2 = (\lambda^2 - 1)(y^3)^2$,$\mu y^1 - y^2 = 0$ (6)

Από την (6) έπεται ότι το σημείο $P(y^1, y^2, y^3)$ κείται στην τομή ενός κώνου με αρχή την κορυφή του και ένα επίπεδο δια μέσω του Y^3 άξονα. Αυτή η διατομή είναι επομένως μία ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή (δες εικόνα).

Έτσι η $x^2 = c_2$,$x^3 = c_3$ είναι μία καμπύλη. Αυτή η καμπύλη καλείται μία τρίτη συντεταγμένη καμπύλη. Καλείται x^1 καμπύλη.
Από ένα δοσμένο σημείο $P(x^1, x^2, x^3)$ περνάν τρεις συντεταγμένες καμπύλες που αντιστοιχούν στις σταθερές τιμές των c_1, c_2, c_3. Σημειώνεται ότι από αυτές τις τρεις καμπύλες, οι δύο είναι κύκλοι και η μία που μένει είναι μία ευθεία

γραμμή που περνά από την αρχή.

$V.7$ Εφαπτόμενα διανύσματα σε συντεταγμένες καμπύλες δια μέσω ενός σημείου $P(y^1, y^2, y^3)$

Έστω ένα σημείο P του E_3 δίνεται από το διάνυσμα θέσης

$$r = y^1 i + y^2 j + y^3 k \tag{1}$$

όπου i, j, k έχουν τη συνήθη σημασία της στοιχειώδους διανυσματικής ανάλυσης. Για κυλινδρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3

$$y^1 = x^1 cosx^2, y^2 = x^1 sinx^2, y^3 = x^3$$

Επομένως, η (1) παίρνει τη μορφή

$$r = (x^1 cosx^2)i + (x^1 sinx^2)j + x^3 k \tag{2}$$

Τώρα, κατά μήκος της x^1 καμπύλης έχουμε $x^2 =$ σταθερά και $x^3 =$ σταθερά. Συνεπώς, από τη (2) βλέπουμε ότι κατά μήκος της x^1 καμπύλης r είναι μία συνάρτηση της x^1 μόνο. Επομένως $\frac{\partial r}{\partial x^1}$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα κατά μήκος της x^1 καμπύλης. Επομένως $\frac{\partial r}{\partial x^2}$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα κατά μήκος της x^2 καμπύλης και $\frac{\partial r}{\partial x^3}$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα κατά μήκος της x^3 καμπύλης.

Το ερώτημα που προκύπτει τώρα είναι κατά πόσο αυτά τα διανύσματα είναι μοναδιαία διανύσματα και κατά πόσο είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Η απάντηση θα ληφθεί από την ακόλουθη συζήτηση.

Από τη (2) έχουμε

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial r}{\partial x^1} = (cosx^2)i + (sinx^2)j \\ \frac{\partial r}{\partial x^2} = (-x^1 sinx^2)i + (x^1 cosx^2)j \\ \frac{\partial r}{\partial x^3} = k \end{array}\right\} \tag{3}$$

Έτσι, $|\frac{\partial r}{\partial x^1}|^2 = (cosx^2)^2 + (sinx^2)^2 = 1$ (4)
$|\frac{\partial r}{\partial x^2}|^2 = (x^1)^2(sinx^2)^2 + (x^1)^2(cosx^2)^2 = (x^1)^2$ (5)
και $|\frac{\partial r}{\partial x^3}|^2 = 1$ (6)

Από τις (4), (5) και (6) έπεται ότι κάθε ένα από τα $\frac{\partial r}{\partial x^1}$ και $\frac{\partial r}{\partial x^3}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, αλλά το $\frac{\partial r}{\partial x^2}$ δεν είναι.

Δηλώνουμε με e_1, e_2, e_3 τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των εφαπτόμενων διανυσμάτων $\frac{\partial r}{\partial x^1} = e_1, \frac{\partial r}{\partial x^2} = x^1 e_2$ και $\frac{\partial r}{\partial x^3} = e_3$.

Από εδώ, η (3) μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως:

$$e_1 = (cosx^2)i + (sinx^2)j$$
$$x^1 e_2 = (-x^1 sinx^2)i + (x^1 cosx^2)j$$

ή

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= (cosx^2)i + (sinx^2)j \\ e_2 &= (-sinx^2)i + (cosx^2)j \\ \text{και } e_3 &= k \end{aligned}\right\} (7)$$

Επομένως $e_2 \cdot e_3 = 0$,$e_3 \cdot e_1 = 0$
και $e_1 \cdot e_2 = -cosx^2 sinx^2 + sinx^2 cosx^2 = 0$
Έτσι $e_2 \cdot e_1 = e_3 \cdot e_1 = e_1 \cdot e_2 = 0$ (8)
Από την (8) έπεται ότι τα εφαπτόμενα διανύσματα στις συντεταγμένες καμπύλες είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Έτσι τα εφαπτόμενα διανύσματα στις συντεταγμένες καμπύλες σε κάθε σημείο σε ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων είναι μεταξύ τους ορθογώνια.

Σε μία τέτοια περίπτωση το σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται ορθογώνιο. Έτσι το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων είναι ορθογώνιο.
Για σφαιρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3
$y^1 = x^1 sinx^2 cosx^3, y^2 = x^1 sinx^2 sinx^3, y^3 = x^1 cosx^2$
Έτσι, το $r = y^1 i + y^2 j + y^3 k$ παίρνει τη μορφή

$$r = (x^1 sinx^2 cosx^3)i + (x^1 sinx^2 sinx^3)j + (x^1 cosx^2)k$$

Επομένως,

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial r}{\partial x^1} &= (sinx^2 cosx^3)i + (sinx^2 sinx^3)j + (cosx^2)k \\ \tfrac{\partial r}{\partial x^2} &= (x^1 cosx^2 cosx^3)i + (x^1 cosx^2 sinx^3)j + (-x^1 sinx^2)k \\ \tfrac{\partial r}{\partial x^3} &= (-x^1 sinx^2 sinx^3)i + (x^1 sinx^2 cosx^3)j \end{aligned}\right\} (9)$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} |\frac{\partial r}{\partial x^1}|^2 &= (sinx^2)^2 (cosx^3)^2 + (sinx^2)^2 (sinx^3) + (cosx^2)^2 \\ &= (sinx^2)^2 + (cosx^2)^2 = 1 \end{aligned} \quad (10)$$

$$|\frac{\partial r}{\partial x^2}|^2 = (x^1)^2 (cosx^2)^2 (cosx^3)^2 + (x^1)^2 (sinx^2)^2 (sinx^3)^2 + (x^1)^2 (sinx^2)^2 = (x^1)^2$$

$$= (x^1)^2(cosx^2)^2 + (x^1)^2(sinx^2)^2 = (x^1)^2 \tag{11}$$

Τελικώς,

$$|\frac{\partial r}{\partial x^3}|^2 = (x^1)^2(sinx^2)^2(sinx^3)^2 + (x^1)^2(sinx^2)^2(cosx^3)^2 =$$

$$= (x^1 sinx^2)^2 \tag{12}$$

Έτσι το $\frac{\partial r}{\partial x^1}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, αλλά κανένα από τα $\frac{\partial r}{\partial x^2}$ και $\frac{\partial r}{\partial x^3}$ δεν είναι κι αυτό. Αν δηλώσουμε με e_1, e_2, e_3 μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των εφαπτόμενων στις συντεταγμένες καμπύλες, τότε παίρνουμε

$\frac{\partial r}{\partial x^1} = e_1, \frac{\partial r}{\partial x^2} = x^1 e_2$ και $\frac{\partial r}{\partial x^3} = x^1 sinx^2 e_3$

Επομένως η (9) μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= (sinx^2 cosx^2)i + (sinx^2 sinx^3)j + (cosx^2)k \\ e_2 &= (cosx^2 cosx^3)i + (cosx^2 sinx^3)j + (-sinx^2)k \\ e_3 &= (-sinx^3)i + (cosx^3)j \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Από τη (13) παίρνουμε

$$e_2 \cdot e_3 = 0, e_3 \cdot e_1 = 0, e_1 \cdot e_2 = 0$$

Επομένως το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων είναι επίσης ορθογώνιο.

Σημείωση. Στα κυλινδρικά και σφαιρικα συστήματα συντεταγμένων τα e_1, e_2, e_3 δεν είναι απαραίτητα σταθερά σε όλα τα σημεία του E_3. Γενικά, θα αλλάζουν τις κατευθύνσεις τους από σημείο σε σημείο. Αυτή η οπτική των κυλινδρικών και σφαιρικών συστημάτων συντεταγμένων γεννιούνται στη σκέψη. Η βασική διαφορά μεταξύ κυλινδρικών και σφαιρικών συστημάτων συντεταγμένων και ορθογώνιων καρτεσιανών συστημάτων συντεταγμένων βρίσκεται στο γεγονός ότι στο τελευταίο σύστημα τα e_1, e_2, e_3 είναι σταθερά για όλα τα σημεία και είναι αντίστοιχα ίσα με i, j, k, ενώ στα προηγούμενα δύο συστήματα δεν είναι.

$V.8$ Μήκη των στοιχείων των συντεταγμένων καμπύλων.

Γνωρίζουμε ότι για τις κυλινδρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3, το στοιχείο μήκους ds δίνεται ως ακολούθως:

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{1}$$

Αν ds_1 είναι ένα στοιχείο μήκους τόξου κατά μήκος της x^1 καμπύλης, τότε το ds^1 λαμβάνεται από την (1) θέτοντας $x^2 =$ σταθερά και $x^3 =$ σταθερά. Συνεπώς $dx^2 = 0$ και $dx^3 = 0$.
Από εδώ $(ds_1)^2 = (dx^1)^2$

Έτσι, $ds_1 = dx^1$ (2)

Παρόμοια, αν ds_2 και ds_3 δηλώνουν στοιχεία μήκους τόξου κατά μήκος της x^2 και της x^3 καμπύλης αντίστοιχα, τότε

$$(ds_2)^2 = (x^1)^2(dx^2)^2$$

Έτσι

$$ds_2 = x^1 dx^2 \tag{3}$$

Επίσης,

$$(ds_3)^2 = (dx^3)^2$$

ή

$$ds_3 = dx^3 \tag{4}$$

V.9 **Βασικές πράξεις και ποσότητες του στοιχειώδους διανυσματικού λογισμού σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.**

Η κλίση, η απόκλιση και ο στροβιλισμός είναι βασικές διαφορικές δράσεις του στοιχειώδους διανυσματικού λογισμού. Ποσότητες σαν την κλίση και τη Λαπλασιανή ενός βαθμωτού πεδίου είναι ευρέως εφαρμόσιμες σε προβλήματα μαθηματικής φυσικής. Οι τύποι για αυτά που σχετίζονται με τέτοια πεδία απλοποιούνται όταν γράφονται σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες αντίθετα από τις καρτεσιανές συντεταγμένες. Σε αυτή την παράγραφο θα παράγουμε τους τύπους για την κλίση ενός βαθμωτού πεδίου σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.
Αν είναι γνωστό από το διανυσματικό λογισμό [1] ότι η κλίση ενός βαθμωτού πεδίου δίνεται από τη βαθμίδα $f = \frac{\partial f}{\partial s_1}e_1 + \frac{\partial f}{\partial s_2}e_2 + \frac{\partial f}{\partial s_3}e_3$ (1)

όπου $\frac{\partial f}{\partial s_1}e_1$, $\frac{\partial f}{\partial s_2}e_2$, $\frac{\partial f}{\partial s_3}e_3$ είναι οι παράγωγοι κατεύθυνσης της f στις κατευθύνσεις e_1, e_2, e_3 αντίστοιχα.

[1] δες 'A textbook of vector analysis' του συγγραφέα,Calcutta Publishers, 1991, (3) της σελίδας 114.

Για κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \lim_{\Delta s_1 \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s_1}$$
$$= \lim_{\Delta x^1 \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_1} =$$

(δες (2) της $V.8$)

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}$$

Παρομοίως, $\frac{\partial f}{\partial s_2} = \frac{1}{x^1}\frac{\partial f}{\partial x^2}$ και $\frac{\partial f}{\partial s_3} = \frac{\partial f}{\partial x^3}$
Επομένως, η (1) μπορεί να γραφεί ως

$$gradf = \frac{\partial f}{\partial x^1}e_1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}e_2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}e_3 \tag{2}$$

Αυτή είναι η ζητούμενη έκφραση σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Για σφαιρικές συντεταγμένες παίρνουμε
$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{\partial f}{\partial x^1}$, $\frac{\partial f}{\partial s_2} = \frac{1}{x^1}\frac{\partial f}{\partial x^2}$ και $\frac{\partial f}{\partial s_3} = \frac{1}{x^1 sinx^2}\frac{\partial f}{\partial x^3}$

Επομένως, η (1) παίρνει τη μορφή

$$gradf = \frac{\partial f}{\partial x^1}e_1 + \frac{1}{x^1}\frac{\partial f}{\partial x^2}e_2 + \frac{1}{x^1 sinx^2}\frac{\partial f}{\partial x^3}e_3 \tag{3}$$

Αυτή είναι η ζητούμενη έκφραση σε σφαιρικές συντεταγμένες.
Σημείωση. Θέτωντας $f = x^1$ στην (2) παίρνουμε

$$gradx^1 = e_1 \tag{4}$$

Παρομοίως,

$$gradx^2 = \frac{1}{x^1}e_2 \tag{5}$$

και

$$gradx^3 = e_3 \tag{6}$$

Οι (4),(5) και (6) δίνουν τις κλίσεις σε κυλινδρικές συντεταγμένες των x^1, x^2 και x^3 αντίστοιχα.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Βρείτε τις ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου του οποίου οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $(4, \frac{\pi}{3}, 2)$.

Ξέρουμε ότι αν (y^1, y^2, y^3) είναι ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου του οποίου οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι (x^1, x^2, x^3) τότε

$$y^1 = x^1 cosx^2, y^2 = x^1 sinx^2, y^3 = x^3$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση,

$$x^1 = 4, x^2 = \frac{\pi}{3}, x^3 = 2$$

Άρα,

$$y^1 = 4cos\frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2, y^2 = 4sin\frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

και $y^3 = 2$. Έτσι οι ζητούμενες συντεταγμένες είναι $(2, 2\sqrt{3}, 2)$.

2. Βρείτε τις κυλινδρικές συντεταγμένες του σημείου του οποίου οι σφαιρικές συντεταγμένες είναι $(4, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$.

Ξέρουμε ότι αν (y^1, y^2, y^3) είναι οι ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου του οποίου οι σφαιρικές συντεταγμένες είναι (x^1, x^2, x^3), τότε

$$y^1 = x^1 sinx^2 cosx^3$$
$$y^2 = x^1 sinx^2 sinx^3$$
$$y^1 = x^1 cosx^2$$

Στην προκειμένη περίπτωση $x^1 = 4$, $x^2 = \frac{\pi}{2}$,$x^3 = \frac{\pi}{3}$

Έτσι,

$$y^1 = 4sin\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{3} = 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$y^2 = 4sin\frac{\pi}{2}sin\frac{\pi}{3} = 4 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$y^3 = 4cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Έτσι έχουμε να βρούμε τις κυλινδρικές συντεταγμένες ενός σημείου του οποίου οι ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες είναι $(2, 2\sqrt{3}, 0)$.

Έστω (x^1, x^2, x^3) οι ζητούμενες κυλινδρικές συντεταγμένες.
Τότε $y^1 = x^1 cosx^2, y^2 = x^1 sinx^2, y^3 = x^3$
Εδώ $y^1 = 2, y^2 = 2\sqrt{3}, y^3 = 0$

Έτσι $2 = x^1 cosx^2$ (1)
και $2\sqrt{3} = x^1 sinx^2$ (2)
Από την (1) και τη (2) παίρνουμε $2^2 + (2\sqrt{3})^2 = (x^1)^2(cosx^2)^2 + (x^1)^2(sinx^2)^2$
$= (x^1)^2$

ή, $4 + 12 = (x^1)^2$. Από εδώ $x^1 = 4$
Επίσης διαιρόντας την (2) με την (1) παίρνουμε $tanx^2 = \sqrt{3}$.

Από εδώ , $x^2 = \frac{\pi}{3}$. Επίσης, $x^3 = 0$

Έτσι οι ζητούμενες συντεταγμένες είναι $(4, \frac{\pi}{3}, 0)$.
3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^1 = 4cosx^2$ σε σφαιρικές συντεταγμένες αναπαριστά μία σφαίρα.
Ξέρουμε ότι αν (y^1, y^2, y^3) είναι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου του οποίου οι σφαιρικές συντεταγμένες είναι (x^1, x^2, x^3), τότε $x^1 = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}$ και $x^2 = cos^{-1}\frac{y^3}{\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2}}$ (από την (3) της $V.3$)

Η δοσμένη εξίσωση μπορεί επομένως να γραφεί ως

$$\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2} = 4\frac{y^3}{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}}$$

ή, $(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = 4y^3$
ή,$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3 - 2)^2 = 4$

η οποία αναπαριστά μία σφαίρα.

4. Βρείτε τις σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου του οποίου οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1)$.

Γνωρίζουμε ότι αν (y^1, y^2, y^3) είναι ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου του οποίου οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι (x^1, x^2, x^3), τότε
$y^1 = x^1 cosx^2, y^2 = x^1 sinx^2, y^3 = x^3$
Εδώ, $x^1 = 2\sqrt{2}$,$x^2 = \frac{\pi}{4}$,$x^3 = 1$
Άρα,

$$y^1 = 2\sqrt{2}cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$

$$y^2 = 2\sqrt{2}sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$

$$y^3 = 1$$

Έτσι έχουμε να βρούμε τις σφαιρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3 του σημείου του οποίου οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι (2,2,1).

Ξέρουμε ότι

$$x^1 = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}$$

$$x^2 = cos^{-1}\frac{y^3}{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}}$$

$$x^3 = tan^{-1}\frac{y^2}{y^1}$$

Επομένως, σε αυτή την περίπτωση

$$x^1 = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$x^2 = cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{4+4+1}} = cos^{-1}\frac{1}{3}$$

και

$$x^3 = tan^{-1}\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Άρα οι ζητούμενες συντεταγμένες είναι $(3, cos^{-1}\frac{1}{3}, \frac{\pi}{4})$.

5. Εκφράστε το διανυσματικό πεδίο

$$\alpha = y^2 i - 2y^1 j + y^3 k$$

σε κυλινδρικές συντεταγμένες,
όπου y^1, y^2, y^3 είναι ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου.

Είναι γνωστό ότι αν x^1, x^2, x^3 είναι κυλινδρικές συντεταγμένες, τότε

$$e_1 = (cosx^2)i + (sinx^2)j \tag{1}$$

$$e_2 = (-sinx^2)i + (cosx^2)j \tag{2}$$

$$e_3 = k$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε

$$i = (cosx^2)e_1 - (sinx^2)e_2$$

$$j = (sinx^2)e_1 + (cosx^2)e_2$$

Επίσης $k = e_3$

Επομένως, το $\alpha = y^2 i - 2y^1 j + y^3 k$ μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως:

$$\alpha = (x^1 sinx^2)(cosx^2 e_1 - sinx^2 e_2)$$
$$-2(x^1 cosx^2)(cosx^2 e_1 + cosx^2 e_2) + x^3 e_3$$
$$= (-x^1 sinx^2 cosx^2)e_1 + [-x^1(sinx^2)^2 - 2x^1(cosx^2)^2]e_2 + x^3 e_3$$

Αυτή είναι η ζητούμενη έκφραση.

6. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3 βρείτε την βαθμίδα του βαθμωτού πεδίου

$$\phi = (x^1)^2 + x^1 cosx^2 - (x^3)^2$$

Είναι γνωστό ότι αν f είναι ένα βαθμωτό πεδίο, τότε

$$gradf = \frac{\partial f}{\partial x^1} e_1 + \frac{1}{x^1}\frac{\partial f}{\partial x^2} e_2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} e_3$$

(δες (2)της $(V.9)$)

Επομένως,

$$grad\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^1} e_1 + \frac{1}{x^1}\frac{\partial \phi}{\partial x^2} e_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x^3} e_3 \tag{1}$$

Εδώ $\frac{\partial \phi}{\partial x^1} = 2x^1 + cosx^2$
$\frac{\partial \phi}{\partial x^2} = -x^1 sinx^2$
$\frac{\partial \phi}{\partial x^3} = -2x^3$

Επομένως, η (1) παίρνει τη μορφή

$$grad\phi = (2x^1 + cosx^2)e_1 + \frac{1}{x^1}(-x^1 sinx^2)e_2 + (-2x^3)e_3$$
$$= (2x^1 + cosx^2)e_1 - (sinx^2)e_2 - (2x^3)e_3$$

Αυτή είναι η βαθμίδα του ϕ σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε τις ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων του οποίου οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι οι ακόλουθες:

$(i)(6, \frac{\pi}{3}, 2)$; $(ii)(2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{4}, 3)$
$(iii)(8, \frac{2\pi}{3}, -4)$; $(iv)(4, \frac{\pi}{6}, 1)$

2. Βρείτε τις κυλινδρικές συντεταγμένες των σημείων των οποίων οι ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες είναι οι ακόλουθες:
$(i)(4, 8, 3), (ii)(0, 1, 1), (iii)(0, -3, -3), (iv)(-2, 3, 2)$

3.Βρείτε τις κυλινδρικές συντεταγμένες των σημείων των οποίων οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι οι ακόλουθες:

$(i)(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$; $(ii)(6, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$
$(iii)(8, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$; $(iv)(2, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$

4.Βρείτε τις σφαιρικές συντεταγμένες των σημείων των οποίων οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι οι ακόλουθες:
$(i)(4, \frac{\pi}{2}, 3)$; $(ii)(1, \frac{5\pi}{6}, -2)$
$(iii)(7, \frac{2\pi}{3}, -4)$; $(iv)(3, -\frac{\pi}{4}, 2)$

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^1 sinx^2 = 4$ σε σφαιρικές συντεταγμένες αναπαριστά ένα κανονικό κυκλικό κύλινδρο.

6.Αποδείξτε ότι η εξίσωση $(x^1)^2 - (x^3)^2 = 1$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες αναπαριστά ένα υπερβολοειδές ενός φύλλου.

7.Εκφράστε το διανυσματικό πεδίο $\alpha = 2y^3 i - 3y^1 j + 2y^2 k$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3.

8. Αν μία δύναμη F δίνεται από τις ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες από την

$$F = By^2 i - By^1 j$$

όπου B είναι μία σταθερά, βρείτε τις συνιστώσες της σε κυλινδρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3. (C.U.Physics Hons.1985)

9. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3 βρείτε την βαθμίδα του βαθμωτού πεδίου

$$\phi = 3x^1 cosx^2 + x^3 (sinx^2)^2 - 2^{x^1}$$

10. Σε σφαιρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3 βρείτε την βαθμίδα του βαθμωτού πεδίου:

$$\phi = (x^1)^2 sinx^3$$

11. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $(x^1)^2[(sinx^2)^2 cos2x^3 - (cosx^2)^2] = 16$ σε σφαιρικές συντεταγμένες αναπαριστά ένα υπερβολοειδές δύο φύλλων.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1.$(i)(3, 3\sqrt{3}, 2); (ii)(2, -2, 3); (iii)(-4, 4\sqrt{3}, -4)(iv)(2\sqrt{3}, 2, 1)$
2.$(i)(4\sqrt{5}, tan^{-1}2, 3); (ii)(1, \frac{\pi}{2}, 1); (iii)(3, \frac{\pi}{2}, -3)$
$(iv)(\sqrt{13}, tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right), 2)$
3.$(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}, 2\sqrt{2}); (ii)(3\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}, 3); (iii)(4\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}, -4);$
$(iv)(\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}, -1)$
4.$(i)(5, cos^{-1}\frac{1}{5}, \frac{\pi}{2}); (ii)(\sqrt{5}, cos^{-1}\frac{-2}{\sqrt{5}}, -\frac{\pi}{6});$
$(iii)(\sqrt{65}, cos^{-1}\frac{-4}{\sqrt{65}}, -\frac{\pi}{3})\cdot$ $(iv)(\sqrt{13}, cos^{-1}\frac{-2}{\sqrt{13}}, -\frac{\pi}{4})$
5.$(y^1)^2 + (y^2)^2 = 16$
6.$(y^1)^2 + (y^2)^2 - (y^3)^2 = 1$
7.$\alpha = (2x^3 cosx^2 - 3x^1 sinx^2 cosx^2)e_1 - [2x^3 sinx^2 + 3x^1(cosx^2)^2]e_2 + (2x^1 sinx^2)^2 e_3$
8.0,$-Bx^1$,0
9.$grad\phi = (3cosx^2 - 2^{x^1} log2)e_1 + \frac{1}{2}(-3x^1 sinx^2 + 2x^3 sinx^2 cosx^2)e_2 + (sinx^2)^2 e_3$
10.$grad\phi = (2x^1 sinx^3)e_1 + x^1 \frac{cosx^3}{sinx^2} e_3$
11.$(y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 = 16.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΣΕ ΕΥΚΛΕΙΔΙΟ ΧΩΡΟ E_3 ΚΑΙ ΤΑΝΥΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΟΝ E_3 ΜΕ ΑΝΑΦΟΡΑ ΣΕ ΕΝΑ ΤΕΤΟΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

$VI.0$ **Καμπυλόγραμμες Συντεταγμένες**

Στο κεφάλαιο V έχουμε μελετήσει τις κυλινδρικές πολικές και σφαιρικές πολικές συντεταγμένες στον E_3. Σε αυτό το κεφάλαιο θα θεωρήσουμε ένα τύπο συντεταγμένων στον E_3 του οποίου οι κυλινδρικές πολικές και σφαιρικές πολικές συντεταγμένες είναι ειδικές περιπτώσεις. Τέτοιες συντεταγμένες καλούνται Καμπυλόγραμμες Συντεταγμένες οι οποίες ορίζονται ως ακολούθως:

Έστω x^1, x^2, x^3 τρεις ποσότητες που σχετίζονται με τις ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες y^1, y^2, y^3 με τις ακόλουθες μορφές:

$$\begin{aligned} y^1 &= f_1(x^1, x^2, x^3) \\ y^2 &= f_2(x^1, x^2, x^3) \\ y^3 &= f_3(x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \tag{1}$$

όπου f_1, f_2, f_3 είναι μονότιμες συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή R του E_3. Αφού οι f_1, f_2, f_3 πρέπει να είναι ανεξάρτητες, η Ιακοβιανή

$$\frac{\partial(y^1, y^2, y^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0$$

Κάτω από αυτές τις συνθήκες τα x^1, x^2, x^3 μπορούν να ληφθούν σαν μονότιμες συναρτήσεις των y^1, y^2, y^3 με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$x^1 = \phi_1(y^1, y^2, y^3)$$

$$x^2 = \phi_2(y^1, y^2, y^3) \tag{2}$$

$$x^3 = \phi_3(y^1, y^2, y^3)$$

Από την (1) και τη (2) έπεται ότι για κάθε σημείο $P(y^1, y^2, y^3)$ υπάρχει μία καθορισμένη τριάδα (x^1, x^2, x^3) και αντιστρόφως. Μπορούμε επομένως να πούμε ότι ένα σύστημα συντεταγμένων έχει προσαρτηθεί στον E_3. Ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων καλείται ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων και τα x^1, x^2, x^3 καλούνται καμπυλόγραμμες συντεταγμένες του σημείου P.
Οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες x^1, x^2, x^3 στον E_3 σχετίζονται με τις ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες y^1, y^2, y^3 μέσω των σχέσεων (1).

Συντεταγμένες Επιφάνειες:

Έστω ότι ένα από τα x^1, x^2, x^3 κρατιέται σταθερό, πείτε $x^1 = c_1$, όπου c_1 είναι μία σταθερά και x^2 και x^3 μπορούν να μεταβάλλονται. Τότε για το $P(y^1, y^2, y^3)$ θα ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$y^1 = f_1(c_1, x^2, x^3)$$
$$y^2 = f_2(c_1, x^2, x^3) \tag{3}$$

(από την (1))

$$y^3 = f_3(c_1, x^2, x^3)$$

Από την (3) έπεται ότι το $P(y^1, y^2, y^3)$ θα βρίσκεται σε μία επιφάνεια η οποία ορίζεται ως

$$x^1 = c_1 \tag{4}$$

Παρόμοια, αν x^2 κρατείται σταθερό, και x^1 και x^3 μπορούν να μεταβάλλονται τότε το P θα βρίσκεται σε μία άλλη επιφάνεια η οποία θα ορίζεται ως

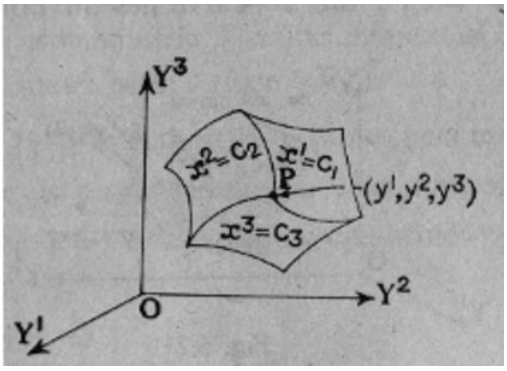
$$x^2 = c_2, \text{όπου } c_2 \text{ είναι μία σταθερά} \tag{5}$$

Παρόμοια κατάσταση θα συμβεί κρατώντας το x^3 σταθερό και επιτρέποντας τα x^1 και x^2 να μεταβάλλονται. Σε αυτή την περίπτωση το P θα κείται σε μία άλλη επιφάνεια η οποία δηλώνεται ως

$$x^3 = c_3, \text{όπου } c_3 \text{ είναι μία σταθερά} \tag{6}$$

Κάθε μία από τις επιφάνειες (4),(5),(6) καλείται μία συντεταγμένη επιφάνεια του καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων. (δες εικόνα)

Υπάρχουν τρεις οικογένειες τέτοιων επιφανειών που σχετίζονται με διαφορετικές τιμές των c_1, c_2, c_3. Μέσα από ένα δοσμένο σημείο $P(y^1, y^2, y^3)$, θα περνάν τρεις συντεταγμένες επιφάνειες που σχετίζονται με τις σταθερές τιμές των c_1, c_2, c_3. (δες εικόνα)



Συντεταγμένες Καμπύλες:

Αν δύο από τις συντεταγμένες x^1, x^2, x^3 κρατηθούν σταθερές, πείτε $x^2 = c_2$, $x^3 = c_3$ όπου c_2 και c_3 είναι σταθερές και η x^1 μπορεί να μεταβάλλεται, τότε το σημείο $P(y^1, y^2, y^3)$ θα ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} y^1 &= f_1(x^1, c_2, c_3) \\ y^2 &= f_2(x^1, c_2, c_3) \\ y^3 &= f_3(x^1, c_2, c_3) \end{aligned} \tag{7}$$

Από τη στιγμή που οι f_1, f_2, f_3 είναι συναρτήσεις μίας μόνο μεταβλητής, έπεται από την (7) ότι το $P(y^1, y^2, y^3)$ θα βρίσκεται σε μία καμπύλη. Μία τέτοια καμπύλη καλείται μία συντεταγμένη καμπύλη.

Αυτή η συντεταγμένη καμπύλη

$$x^2 = c_2, x^3 = c_3 \tag{8}$$

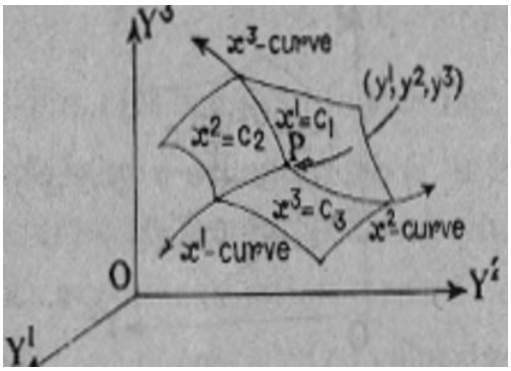
καλείται η x^1 καμπύλη.

Παρομοίως κρατώντας τα x^1 και x^3 σταθερά και επιτρέποντας το x^2 να μεταβάλλεται παίρνουμε άλλη μία συντεταγμένη καμπύλη

$$x^1 = c_1, x^2 = c_2, \text{όπου } c_1 \text{ και } c_2 \text{ είναι σταθερές} \tag{9}$$

η οποία καλείται x^3 καμπύλη.

Έτσι η x^1 καμπύλη κείται αμφοτέρων των επιφανειών $x^2 = c_2$ και $x^3 = c_3$, η x^2 καμπύλη κείται αμφοτέρων των επιφανειών $x^1 = c_1$ και $x^3 = c_3$, και η x^3 καμπύλη κείται αμφοτέρων των επιφανειών $x^1 = c_1$ και $x^2 = c_2$. (δες εικ.6.2) Σημειώνεται ότι δια μέσω σημείου $P(x^1, x^2, x^3)$ περνάν τρεις συντεταγμένες καμπύλες που σχετίζονται με τις δοσμένες τιμές c_1, c_2, c_3 (δες εικόνα)



VI.1 **Το στοιχειώδες μήκος του E_3 σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες.**

Έστω (y^1, y^2, y^3) και $(y^1 + dy^1, y^2 + dy^2, y^3 + dy^3)$ να είναι οι ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες δύο σημείων P και Q αντίστοιχα και ds να είναι η απόσταση μεταξύ τους. Τότε

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= [(y^1 + dy^1) - y^1]^2 + [(y^2 + dy^2) - y^2]^2 + [(y^3 + dy^3) - y^3]^2 \\ &= (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 \\ &\quad dy^i dy^i \end{aligned} \tag{1}$$

$i = 1, 2, 3$

Επειδή y^i είναι συναρτήσεις των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων x^i, έχουμε

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^p} dx^p$$

Επομένως η (1) μπορεί να γραφεί ως

$$(ds)^2 = \frac{\partial y^i}{\partial x^p} dx^p \frac{\partial y^i}{\partial x^q} dx^q$$

$$= \frac{\partial y^i}{\partial x^p} \frac{\partial y^i}{\partial x^q} dx^p dx^q = \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^p}{\partial x^j} dx^i dx^j$$

$$= g_{ij} dx^i dx^j \tag{2}$$

όπου

$$g_{ij} = \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^p}{\partial x^j} \tag{3}$$

Επειδή το $(ds)^2$ είναι ένα αναλλοίωτο και το διάνυσμα dx^i είναι αυθαίρετο, έπεται από τη (2) ότι ο g_{ij} είναι ένας (0,2) τανυστής. Επίσης από την (3) έχουμε $g_{ij} = g_{ji}$ δηλαδή ο τανυστής g_{ij} είναι συμμετρικός. Το στοιχειώδες μήκος του E_3 σε όρους καμπυλόγραμμων συντεταγμένων δίνεται έτσι από τη (2).

Σημείωση. Αν δηλώσουμε το $|g_{ij}|$ με g, τότε το g είναι θετικό, διότι η τετραγωνική μορφή $g_{ij}dx^i dx^j$ είναι θετικά ορισμένη. Η τάξη του πίνακα (g_{ij}) είναι έτσι 3. Άρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ποσότητες g^{ij} ως ακολούθως: (Δες Κεφάλαιο II)

$$g^{ij} = \frac{\text{ελάσσονα υποορίζουσα του } g_{ij} \text{ στην } |g_{ij}|}{g} \tag{4}$$

Επομένως ο g^{ij} είναι ένας συμμετρικός (2,0) τανυστής συζυγής στον g_{ij}.

Ο τανυστής g_{ij} παίζει σημαντικό ρόλο για την παραγωγή μετρικών ιδιοτήτων του χώρου E_3.

$VI.2$ Μήκος ενός διανύσματος του E_3 σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Έστω ότι το A^i είναι ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Τότε το μήκος A του διανύσματος προσδιορίζεται από τη μορφή:

$$A = (g_{ij} A^i A^j)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

Μοναδιαίο διάνυσμα: Ένα διάνυσμα του οποίου το μήκος είναι 1 καλείται μοναδιαίο διάνυσμα.
Από την (2) της $VI.2$ έχουμε

$$1 = g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \tag{3}$$

Έπεται ότι από την (3) ότι το $\frac{dx^i}{ds}$ είναι ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα, επειδή το g_{ij} είναι ένας $(0,2)$ τανυστής και 1 είναι ένα αναλλοίωτο. Άρα αν γράψουμε $v^i = \frac{dx^i}{ds}$, τότε η (3) μπορεί να γραφεί ως

$$g_{ij}v^iv^j = 1$$

Επομένως το $v^i = \frac{dx^i}{ds}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα.

$VI.3$ **Η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων του E_3 σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων**

Αν A^i και B^i είναι δύο ανταλλοίωτα διανύσματα, τότε η γωνία θ μεταξύ τους προσδιορίζεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$cos\theta = \frac{g_{ij}A^iB^j}{\sqrt{g_{ij}A^iA^j}\sqrt{g_{ij}B^iB^j}} \tag{1}$$

Αν A_i και B_i είναι δύο συναλλοίωτα διανύσματα, τότε η γωνία θ μεταξύ τους προσδιορίζεται από τον τύπο

$$cos\theta = \frac{g^{ij}A_iB_j}{\sqrt{g^{ij}A_iA_j}\sqrt{g^{ij}B_iB_j}} \tag{2}$$

Γωνία μεταξύ δύο κατευθύνσεων σε ένα σημείο:

Αν x^1, x^2, x^3 είναι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες ενός σημείου P και $t^i = \frac{dx^i}{ds}$, $i = 1, 2, 3$ τότε το μοναδιαίο διάνυσμα t^i ορίζεται να είναι μία κατεύθυνση του σημείου P.

Έτσι αν t^i και t'^i είναι δύο κατευθύνσεις ενός δοσμένου σημείου, τότε η γωνία θ μεταξύ τους δίνεται από το

$$cos\theta g_{ij}t^it'^i \tag{1}$$

(από την (1))

$VI.4$ **Μήκη στοιχείων τόξων κατά μήκος συντεταγμένων καμπύλων**

Το στοιχείο μήκους του E_3 σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες δίνεται από το

$$ds^2 = g_{ij}dx^idx^j \tag{1}$$

όπου,

$$g_{ij} = \frac{\partial y^p}{\partial x^i}\frac{\partial y^p}{\partial x^j} \tag{2}$$

Έστω ds_1 να δηλώνει το στοιχείο τόξου κατά μήκος μίας x^1 καμπύλης στο $P(x^1, x^2, x^3)$. Τότε το ds^1 λαμβάνεται από την (1) παίρνοντας το $x^2 =$ σταθερό και το $x^3 =$ σταθερό. Επομένως $dx^2 = 0$, $dx^3 = 0$. Επομένως, από την (1) παίρνουμε

$(ds_1)^2 = g_{11}dx^1dx^1$ ($\because$ οι άλλοι όροι είναι μηδέν)

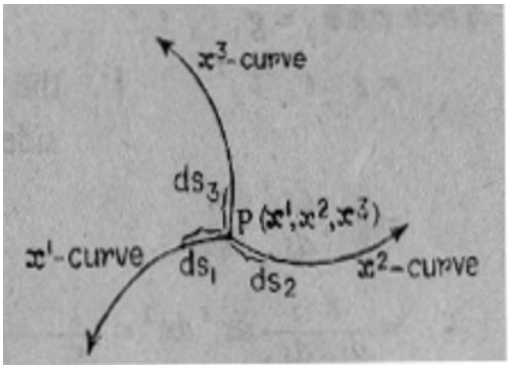
$$= g_{11}(dx^1)^2$$

Έτσι $ds_1 = \sqrt{g_{11}}dx^1$ (3)

Παρομοίως $ds_2 = \sqrt{g_{22}}dx^2$ (4)

και $ds_3 = \sqrt{g_{33}}dx^3$ (5)

Αυτά είναι τα ζητούμενα μήκη



VI.5 Γωνίες μεταξύ των συντεταγμένων καμπύλων σε ένα σημείο

Ας θεωρήσουμε τρεις κατευθύνσεις t_1^i, t_2^i, t_3^i σε ένα σημείο $P(x^1, x^2, x^3)$ που δίνεται ως ακολούθως:

$$t_1^i = \left(\frac{dx^1}{ds_1}, 0, 0\right)$$

$$t_2^i = \left(0, \frac{dx^2}{ds_2}, 0\right)$$

$$t_3^i = \left(0, 0, \frac{dx^3}{ds_3}\right)$$

Τότε κάθε ένα από τα διανύσματα t_1^i, t_2^i, t_3^i είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κατευθυνόμενο κατά μήκος των εφαπτομένων στις x^1, x^2, x^3 καμπύλες στο σημείο

P αντίστοιχα.
Δηλώνετε τη γωνία μεταξύ των x^1 και x^2 καμπύλων με θ_1, η γωνία μεταξύ των x^2 και x^3 καμπύλων με θ_2 και αυτή μεταξύ των x^3 και x^1 καμπύλων με θ_3.
Τότε $cos\theta_1 = g_{ij}t_1^i t_2^j$ (από την (3) της $VI.3$)

$$g_{12}t_1^1 t_2^2$$

($\because$ οι άλλοι όροι στη δεξιά πλευρά είναι μηδέν)

$$g_{12}\frac{dx^1}{ds_1}\frac{dx^2}{ds_2}$$

$$= \frac{g_{12}}{ds_1 ds_2}dx^1 dx^2 = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}dx^1\sqrt{g_{22}}dx^2}dx^1 dx^2$$

(από τις (3),(4) της $VI.4$)

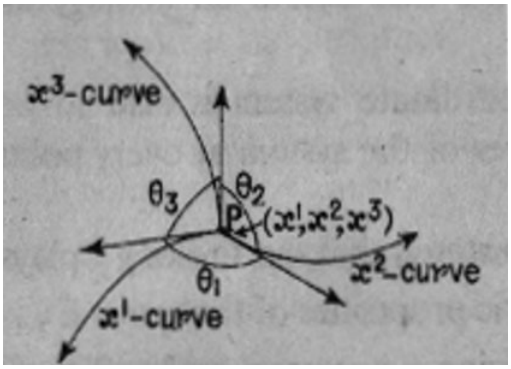
$$= \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \tag{1}$$

Παρομοίως

$$cos\theta_2 = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}} \tag{2}$$

και

$$cos\theta_3 = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}} \tag{3}$$



$VI.6$ Ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων

Στο κεφάλαιο V έχει δειχθεί ότι τα κυλινδρικά πολικά και τα σφαιρικά πολικά συστήματα συντεταγμένων είναι ορθογώνια. Για να πάρουμε μία απάντηση, πρώτα ορίζουμε ένα ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων.

Ορισμός: Ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων λέγεται ότι είναι ορθογώνιο αν οι συντεταγμένες καμπύλες του συστήματος σε κάθε σημείο είναι

αμοιβαία ορθογώνιες.

Στο τέλος της $VI.1$ έχει προταθεί ότι ο τανυστής g_{ij} παίζει σημαντικό ρόλο στην παραγωγή μετρικών ιδιοτήτων του χώρου E_3.

Ο ρόλος που παίζει ο g_{ij} στην παραγωγή μίας αναγκαίας και ικανής συνθήκης για ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων για να είναι ορθογώνιο, θα κατανοηθεί από το ακόλουθο θεώρημα.
Θεώρημα 1. Μία αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων ορισμένο σε μία περιοχή R του E_3 να είναι ορθογώνιο είναι $g_{ij} = 0$ για $i \neq j$ σε κάθε σημείο του R.

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι αν θ_1 είναι η γωνία μεταξύ των x^1 και x^2 καμπύλων, θ_2 είναι η γωνία μεταξύ των x^2 και x^3 καμπύλων και θ_3 αυτή μεταξύ των x^3 και x^1 καμπύλων, τότε

$$cos\theta_1 = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \tag{2}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}} \tag{2}$$

και

$$cos\theta_3 = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}} \tag{3}$$

Πρώτα υποθέτουμε ότι ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων είναι ορθογώνιο.

Τότε κάθε ένα από τα $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ είναι $\frac{\pi}{2}$. Συμπερασματικά $cos\theta_1 = 0$,$cos\theta_2 = 0$ και $cos\theta_3 = 0$.

Από τις (1),(2) και (3) έχουμε

$$g_{12} = 0, g_{23} = 0, g_{31} = 0$$

Επομένως, $g_{ij} = 0$, για $i \neq j$ για κάθε σημείο της R.

Τότε από τις (1),(2) και (3) έχουμε

$$cos\theta_1 = 0, cos\theta_2 = 0, \text{και} cos\theta_3 = 0$$

δηλαδή οι συντεταγμένες καμπύλες είναι αμοιβαία ορθογώνιες σε κάθε σημείο P της R■

Σημείωση. Σε κάθε ένα από τα κυλινδρικά και σφαιρικά συστήματα συντεταγμένων $g_{ij} = 0$ για $i \neq j$. Επομένως από το παραπάνω θεώρημα κάθε ένα από τα δύο αυτά συστήματα είναι ορθογώνιο. Αυτό έχει ήδη αποδειχθεί στο κεφάλαιο V.

$VI.7$ Βαθμωτό γινόμενο, διανυσματικό γινόμενο και μικτό γινόμενο διανυσμάτων στη διανυσματική ανάλυση του E_3 με αναφορά ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων.

Για τους θεωρούμενους ορισμούς σε αυτή την παράγραφο τα διανύσματα θεωρούνται ότι έχουν το ίδιο αρχικό σημείο.

Βαθμωτό γινόμενο:

Το βαθμωτό γινόμενο δύο διανυσμάτων α και β δηλώνεται από το $\alpha \cdot \beta$ και ορίζεται από τον τύπο

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = |\alpha||\beta| cos\theta \tag{1}$$

όπου $|\alpha|$ και $|\beta|$ είναι τα μήκη των διανυσμάτων α και β αντίστοιχα και θ είναι η γωνία μεταξύ τους.

Διανυσματικό γινόμενο:

Το διανυσματικό γινόμενο δύο διανυσμάτων α και β, δηλώνεται από το $\alpha \times \beta$, είναι από μόνο του ένα διάνυσμα, κάθετο στα διανύσματα α και β που έχει μήκος ίσο με το εμβαδόν παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα διανύσματα. Επιπλέον τα διανύσματα, α, β και $\alpha \times \beta$ σχηματίζουν ένα δεξιόστροφο σύστημα. Έτσι

$$\alpha \times \beta = -\beta \times \alpha \text{ και } |\alpha \times \beta| = |\alpha||\beta| sin\theta \tag{2}$$

Μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων:
Το μικτό γινόμενο ή βαθμωτό τριπλό γινόμενο τριών προσανατολισμένων διανυσμάτων α, β, γ δηλώνεται από το $\alpha \cdot (\beta \times \gamma)$, ορίζεται να είναι ο όγκος παραλληλεπιπέδου που σχηματίζεται από αυτά τα διανύσματα.

Έτσι αν V είναι ο όγκος, τότε

$$V = \alpha \cdot (\beta \times \gamma) = \beta \cdot (\gamma \times \alpha) = \gamma \cdot (\alpha \times \beta) =$$

$$= -\alpha \cdot (\gamma \times \beta) = -\beta \cdot (\alpha \times \gamma) = -\gamma \cdot (\beta \times \alpha) \tag{3}$$

$VI.8$Η Λαπλασιανή είναι μία αναλλοίωτη σε κυλινδρικά πολικά και σφαιρικά πολικά συστήματα συντεταγμένων

Στο κεφάλαιο V οι εκφράσεις της βαθμίδας ενός βαθμωτού πεδίου έχουν ληφθεί σε κυλινδρικές πολικές και σφαιρικές πολικές συντεταγμένες.
Καθώς η λαπλασσιανή ενός αναλλοίωτου είναι ευρέως εφαρμόσιμη στη μαθηματική φυσική, σε αυτή την παράγραφο θα λάβουμε τις εκφράσεις για αυτό σε δύο ειδικά καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων, δηλαδή τα κυλινδρικά και τα σφαιρικά. Καθώς το κάνουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση για τη Λαπλασιανή ενός αναλλοίωτου σε *Riemannian* χώρο V_3.

I. **Λαπλασιανή ενός αναλλοίωτου σε κυλινδρικές συντεταγμένες:** Είναι γνωστό ότι σε ένα χώρο Riemann V_3 με στοιχείο μήκους $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, η Λαπλασιανή ενός αναλλοίωτου ϕ δηλώνεται με $\nabla^2\phi$ και δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g_{kj}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)$$

(δες την 3.60) Στον E_3, το στοιχείο μήκους σε κυλινδρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3 δίνεται από το

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

Έτσι έχουμε $g_{11} = 1$,$g_{22} = (x^1)^2$,$g_{33} = 1$ και $g_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Άρα

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x^1)^2$$

Έτσι $\sqrt{g} = x^1$.

Επομένως $g^{11} = 1$,$g^{22} = \frac{1}{(x^1)^2}$, $g^{33} = 1$ και $g^{ij} = 0 i \neq j$.

Επομένως

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{x^1}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(x^1 g^{kj}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{x^1}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(x^1 g^{1j}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right) +$$

$$+\frac{1}{x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(x^1 g^{2j}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right) + \frac{1}{x^1}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(x^1 g^{3j}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^1}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(x^1 g^{11}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right) + \frac{1}{x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(x^1 g^{22}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{x^1}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(x^1 g^{33}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)$$

$$= \frac{1}{x^1}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(x^1\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right) + \frac{1}{x^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(x^1\frac{1}{(x^1)^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{x^1}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(x^1\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^1}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial^2\phi}{\partial(x^1)^2}\right] + \frac{1}{x^1}\frac{1}{x^1}\frac{\partial^2\phi}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial(x^3)^2}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial(x^1)^2} + \frac{1}{(x^1)^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial(x^3)^2} + \frac{1}{x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^1} \tag{1}$$

Αυτή είναι η ζητούμενη έκφραση.

II. **Λαπλασιανή ενός αναλλοίωτου σε σφαιρικές συντεταγμένες:**

Στον E_3 το στοιχείο μήκους σε σφαιρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3 δίνεται από

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (x^1 sinx^2)^2(dx^3)^2$$

Έτσι, σε αυτή την περίπτωση $g_{11} = 1, g_{22} = (x^1)^2, g_{33} = (x^1 sinx^2)^2$ $g_{ij} = 0, i \neq j$

Άρα

$$|g_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1 sinx^2)^2 \end{vmatrix} = (x^1)^4(sinx^2)^2$$

Έτσι, $\sqrt{g} = (x^1)^2 sinx^2$
Επομένως

$$g^{11} = \frac{(x^1)^4(sinx^2)^2}{(x^1)^4(sinx^2)^2} = 1$$

$$g^{22} = \frac{(x^1 sinx^2)^2}{(x^1)^4(sinx^2)^2} = \frac{1}{(x^1)^2}$$

$$g^{33} = \frac{(x^1)^2}{(x^1)^4(sinx^2)^2} = \frac{1}{(x^1 sinx^2)^2}$$

και $g^{ij} = 0$, $i \neq j$.
Έτσι σε αυτή την περίπτωση

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g}g^{11}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g}g^{22}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{g}g^{33}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{(x^1)^2 sinx^2}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left\{(x^1)^2 sinx^2 g^{11}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^2}\left\{(x^1)^2 sinx^2 g^{22}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right\} + \frac{\partial}{\partial x^3}\left\{(x^1)^2 sinx^2 g^{33}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{(x^1)^2 sinx^2}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left\{(x^1)^2 sinx^2 \frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^2}\left\{(x^1)^2 sinx^2 \frac{1}{(x^1)^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right\} + \frac{\partial}{\partial x^3}\left\{(x^1)^2 sinx^2 \frac{1}{(x^1 sinx^2)^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{(x^1)^2 sinx^2}\left[2(x^1) sinx^2 \frac{\partial\phi}{\partial x^1} + (x^1)^2 sinx^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial(x^1)^2} + \right.$$

$$\left. + \cos x^2 \frac{\partial\phi}{\partial x^2} + sinx^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial(x^2)^2} + \frac{1}{(x^1 sinx^2)^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial(x^3)^2}\right] =$$

$$= \frac{2}{x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^1} + \frac{\partial^2\phi}{\partial(x^1)^2} + \frac{1}{(x^1)^2} cotx^2 \frac{\partial\phi}{\partial x^2} + \frac{1}{(x^1)^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial(x^2)^2} +$$

$$+ \frac{1}{(x^1 sinx^2)^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial(x^3)^2}$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial(x^1)^2} + \frac{1}{(x^1)^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial(x^2)^2} + \frac{1}{(x^1 sinx^2)^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial(x^3)^2} + \frac{2}{x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^1} +$$

$$+ \frac{1}{(x^1)^2} cotx^2 \frac{\partial\phi}{\partial x^2} \tag{2}$$

Αυτή είναι η ζητούμενη έκφραση.

Σημείωση. Οι μετρικές ιδιότητες του E_3 προσδιορίζονται πλήρως από τον τανυστή g_{ij} δοσμένο από την (3) της $VI.1$. Επομένως αυτός καλείται μετρικός τανυστής του E_3 σε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων και ο τανυστής g^{ij} δοσμένος από την (4) της $VI.1$ καλείται συζυγής μετρικός τανυστής στο σύστημα. Επιπλέον, η δευτεροβάθμια μορφή $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ καλείται δευτεροβάθμια θεμελιώδης μορφή του E_3 στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες.

$VI.9$ Συνήθης διανυσματική ανάλυση στον E_3, αναφερόμενη σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων

Στις παραγράφους $V.7$ με $V.9$ του κεφαλαίου V έχουν μελετηθεί μερικά θέματα της συνήθους διανυσματικής ανάλυσης του E_3 αναφερόμενα στα κυλινδρικά και σφαιρικά συστήματα συντεταγμένων. Σε αυτή την παράγραφο μελετούμε μερικά θέματα της συνήθους διανυσματικής ανάλυσης του E_3 αναφερόμενα σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Το αντικείμενο αυτό είναι να δείξει πως κάποια αποτελέσματα της διανυσματικής ανάλυσης του E_3 αναφερόμενα σε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων μπορεί να αποδοθεί στη γλώσσα και το συμβολισμό της συνήθους διανυσματικής ανάλυσης του E_3 που αναφέρεται σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων.

Βάση ενός καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων:

Στη συνήθη διανυσματική ανάλυση τα διανύσματα ορίζονται σαν τμήματα γραμμής με κατεύθυνση. Τέτοια διανύσματα λέγονται ελεύθερα διανύσματα. Αν υποθέσουμε ότι όλα αυτά τα διανύσματα έχουν το ίδιο αρχικό σημείο O, τότε κάθε τέτοιο διάνυσμα α μπορεί να εκφραστεί μοναδικά στη μορφή $\alpha = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ όπου x_1, y_1, z_1 καλούνται οι συντεταγμένες του διανύσματος σε σχέση με τα διανύσματα i, j, k τα οποία λέγεται ότι σχηματίζουν μία βάση του ορθογώνιο καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων με το O για αρχή. Το ερώτημα που προκύπτει τώρα είναι κατά πόσο για ένα τέτοιο διάνυσμα της συνήθους διανυσματικής ανάλυσης μία παρόμοια κατάσταση ισχύει στην περίπτωση ενός καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων.

Η απάντηση σε αυτό το σημαντικό ερώτημα θα ληφθεί από την ακόλουθη συζήτηση.

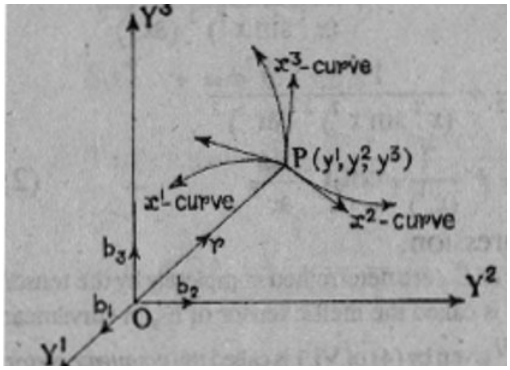
Έστω ότι r είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου $P(y^1, y^2, y^3)$ αναφερόμενο στην αρχή O ενός ορθογώνιου καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και (x^1, x^2, x^3) να είναι οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες του. Δηλώστε τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των OY^1, OY^2, OY^3 με b_1, b_2, b_3 αντί-

στοιχα [1]

Τότε μπορούμε να εκφράσουμε το διάνυσμα r ως ακολούθως:

$$r = y^1 b_1 + y^2 b_2 + y^3 b_3 \tag{1}$$

Τα διανύσματα b_1, b_2, b_3 είναι ανεξάρτητα των x^1, x^2, x^3, αλλά τα y^1, y^2, y^3 είναι συναρτήσεις των x^1, x^2, x^3. Επειδή κατά μήκος της x^1 καμπύλης τα x^2 και x^3 είναι σταθερές, έπεται από την (1) ότι κατά μήκος της x^1 καμπύλης το r είναι μία συνάρτηση του x^1 μόνο. Επομένως το $\frac{\partial r}{\partial x^1}$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στην x^1 καμπύλη στο P. Παρομοίως το $\frac{\partial r}{\partial x^2}$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στην x^2 καμπύλη στο P και το $\frac{\partial r}{\partial x^3}$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στην x^3 καμπύλη στο P (δες εικόνα).

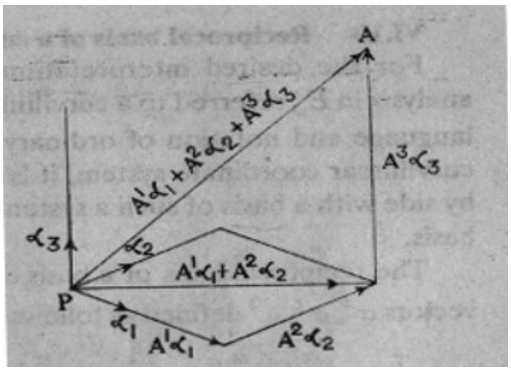


Δηλώνουμε τα διανύσματα $\frac{\partial r}{\partial x^1}, \frac{\partial r}{\partial x^2}, \frac{\partial r}{\partial x^3}$ με α_1,α_2,α_3, αντίστοιχα.
Σημειώνεται ότι κάθε διάνυσμα α στο P μπορεί να αναπαρασταθεί με τη μορφή

$$\alpha = A^1 \alpha_1 + A^2 \alpha_2 + A^3 \alpha_3 \tag{2}$$

όπου τα A^1, A^2, A^3 είναι κατάλληλα βαθμωτά (δες την επόμενη εικόνα).

[1] Για τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων έχουμε χρησιμοποιήσει τους συναλλοίωτους συμβολισμούς, αντί για i, j, k. Ο λόγος δίνεται στο τέλος αυτής της παραγράφου.



Με βάση τη (2), τα α_1,α_2,α_3 λέγεται ότι κατασκευάζουν μία βάση ενός καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων και τα α_1,α_2,α_3 καλούνται διανύσματα βάσης.
Έτσι από αυτή τη συζήτηση παίρνουμε μία καταφατική απάντηση στην ερώτηση που ανέκυψε στην αρχή αυτής της παραγράφου.
Ο λόγος για τη χρήση του συναλλοίωτου συμβολισμού α_i για τη βάση διανυσμάτων $\frac{\partial r}{\partial x^1}$ θα δοθεί τώρα.

Από την (1) έχουμε $dr = b_i dy^i$ (3)
Επίσης $dr = \frac{\partial r}{\partial x^j} dx^j$ (4)

Από τις (3) και (4) παίρνουμε

$$\frac{\partial r}{\partial x^j} dx^j = b_i dy^i = b_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j =$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x^j} - b_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) dx^j = 0 \tag{5}$$

Επειδή η (5) ισχύει για όλα τα dx^j παίρνουμε

$$\frac{\partial r}{\partial x^j} - b_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} = 0$$

ή

$$\frac{\partial r}{\partial x^j} = b_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

Από την (6) βλέπουμε ότι τα διανύσματα βάσης b_i και $\frac{\partial r}{\partial x^j}$ μετασχηματίζονται σύμφωνα με το νόμο μετασχηματισμού των συναλλοίωτων διανυσμάτων.

Αυτή είναι η αιτία για τη χρήση του συναλλοίωτου συμβολισμού b_i για τα i, j, k και α_i για το $\frac{\partial r}{\partial x^i}$.

$VI.10$ **Αντίστροφη βάση ενός καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων.**

Για την επιθυμητή ερμηνεία κάποιων αποτελεσμάτων της τανυστικής ανάλυσης στον E_3 με αναφορά ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων, είναι απαραίτητο να εισάγουμε παράλληλα με μία βάση ενός τέτοιου συστήματος την έννοια της αντίστροφης βάσης της.

Η αντίστροφη βάση μίας βάσης $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ αποτελείται από τρία διανύσματα $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ ορίζεται ως ακολούθως:

$$\alpha^1 = \frac{\alpha_2 \times \alpha_3}{\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot \alpha_3)}, \alpha^2 = \frac{\alpha_3 \times \alpha_1}{\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \times \alpha_3)}, \alpha^3 = \frac{\alpha_1 \times \alpha_2}{\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \times \alpha_3)} \tag{1}$$

Από την (1) έπεται ότι το $\alpha_1 \cdot \alpha^1 = \frac{\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \times \alpha_3)}{\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \times \alpha_3)} = 1$

Παρομοίως, $\alpha_2 \cdot \alpha^3 = 0$,$\alpha_3 \times \alpha^1 = 0$,$\alpha_3 \cdot \alpha^2 = 0$,$\alpha_1 \cdot \alpha^2 = 0$, $\alpha_1 \cdot \alpha^3 = 0$.

Έτσι έχουμε

$$\alpha_1 \cdot \alpha^1 = \alpha_2 \cdot \alpha^2 = \alpha_3 \cdot \alpha^3 = 1 \tag{2}$$

και

$$\alpha_1 \cdot \alpha^2 = \alpha_1 \cdot \alpha^3 = \alpha_2 \cdot \alpha^1 = \alpha_2 \cdot \alpha^3 = \alpha_3 \cdot \alpha^1 = \alpha_3 \cdot \alpha^2 = 0 \tag{3}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε τις (2) και (3) με την απλή σχέση

$$a_i \cdot a^k = \delta_i^k \tag{4}$$

Τα διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ είναι μη συνεπίπεδα. Τώρα θα δείξουμε ότι τα διανύσματα $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ είναι επίσης. Αυτό θα γίνει ως ακολούθως:

Η σχέση (6) της $VI.9$ μπορεί να γραφεί ως

$$\alpha_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} b_i$$

Άρα

$$\alpha_2 = \frac{\partial y^i}{\partial x^2} b_i$$

και

$$\alpha_3 = \frac{\partial y^j}{\partial x^3} b_j$$

Έτσι

$$\alpha_2 \times \alpha_3 = \frac{\partial y^i}{\partial x^2}\frac{\partial y^j}{\partial x^3} b_i \times b_j$$

Επίσης

$$\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \times \alpha_3) = \frac{\partial y^i}{\partial x^2}\frac{\partial y^j}{\partial x^3}\frac{\partial y^p}{\partial x^1} b_p \cdot (b_i \times b_j)$$

$$b_p \cdot (b_i \times b_j)\frac{\partial y^p}{\partial x^1}\frac{\partial y^i}{\partial x^2}\frac{\partial y^j}{\partial x^3}$$

ή

$$\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \times \alpha_3) = b_i \cdot (b_j \times b_k)\frac{\partial y^i}{\partial x^1}\frac{\partial y^j}{\partial x^2}\frac{\partial y^k}{\partial x^3} \tag{5}$$

(Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες p, i, j και i, j, k αντίστοιχα)

Έστω ότι το V δηλώνει τον όγκο ενός παραλληλεπιπέδου που κατασκευάζεται από τα διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ και το V' δηλώνει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που κατασκευάζεται από τα διανύσματα b_1, b_2, b_3. Τότε από την (3) της $VI.7$ έχουμε $V = \alpha_1 \cdot (\alpha_2 \times \alpha_3)$ και $V' = b_1 \cdot (b_2 \times b_3)$. Αλλά η (5) μπορεί να γραφεί ως

$$V = e_{ijk}\frac{\partial y^i}{\partial x^1}\frac{\partial y^j}{\partial x^2}\frac{\partial y^k}{\partial x^3} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^3} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix}$$

(από την (1.19) του κεφαλαίου I)

Επομένως

$$V^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^3} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^3} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial y^p}{\partial x^1}\frac{\partial y^p}{\partial x^1} & \frac{\partial y^p}{\partial x^1}\frac{\partial y^p}{\partial x^2} & \frac{\partial y^p}{\partial x^1}\frac{\partial y^p}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^p}{\partial x^2}\frac{\partial y^p}{\partial x^1} & \frac{\partial y^p}{\partial x^2}\frac{\partial y^p}{\partial x^2} & \frac{\partial y^p}{\partial x^2}\frac{\partial y^p}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^p}{\partial x^3}\frac{\partial y^p}{\partial x^1} & \frac{\partial y^p}{\partial x^3}\frac{\partial y^p}{\partial x^2} & \frac{\partial y^p}{\partial x^3}\frac{\partial y^p}{\partial x^3} \end{vmatrix} \text{(τα } p \text{ αθροίζονται)}$$

$$= \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= |g_{ij}| = g$$

Επομένως $V = \sqrt{g} (\because g > 0)$

Έτσι παίρνουμε $\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \times \alpha_3) = \sqrt{g}$

Επίσης από την (1)

$$\alpha^1 \cdot (\alpha^2 \times \alpha^3) = \frac{1}{\sqrt{g}} \tag{6}$$

Άρα η $\alpha^1 \cdot (\alpha^2 \times \alpha^3) \neq 0$

Επομένως τα διανύσματα $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ είναι μη συνεπίπεδα.

Επομένως, οιοδήποτε διάνυσμα α σε ένα σημείο P μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$\alpha = A_1\alpha^1 + A_2\alpha^2 + A_3\alpha^3 \tag{7}$$

όπου A_1, A_2, A_3 είναι κατάλληλα βαθμωτά.

Χάριν της (7) οι $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ λέγεται ότι κατασκευάζουν άλλη μία βάση ενός καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων το οποίο καλείται η αντίστροφη βάση της βάσης που κατασκευάζεται από τα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ και $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ καλούνται τα αντίστροφα διανύσματα βάσης.

$VI.11$ **Ανταλλοίωτες και συναλλοίωτες συνιστώσες ενός διανύσματος α του E_3**

Από την (2) της $VI.9$ και την (7) της $VI.10$ έχουμε

$$\alpha = A^i\alpha_i \tag{1}$$

και

$$\alpha = A_i\alpha^i \tag{2}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της (1) βαθμωτά με a^j παίρνουμε $\alpha \cdot \alpha^j = A^i \alpha_i \cdot \alpha^j$ ή. $\alpha \cdot \alpha^j = A^i \delta_i^j$ (από την (4) της $VI.10$)) .

$= A^j$

Επομένως,

$$A^j = \alpha \cdot \alpha^j \tag{3}$$

Επίσης πολλαπλασιάζοντας αμφότερες τις πλευρές της (2) βαθμωτά με a_j, παίρνουμε

$\alpha \cdot \alpha_j = A_i a^i \cdot a_j = A_i \delta_j^i$ (από την (4) της $VI.10$))
$= A_j$

Άρα

$$A_j = \alpha \cdot \alpha_j \tag{4}$$

Οι ποσότητες A^j και A_j καλούνται ανταλλοίωτες και συναλλοίωτες συνιστώσες αντίστοιχα του διανύσματος α.

Έτσι βλέπουμε ότι στη συνήθη διανυσματική ανάλυση του E_3 που αναφέρεται σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων ένα διάνυσμα μπορεί να έχει ανταλλοίωτες και συναλλοίωτες συνιστώσες των οποίων η μορφή σχετίζεται με τη βάση και η τελευταία με την αντίστροφη βάση του καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων.

Τώρα μπορεί να τεθεί το ερώτημα αν είναι δυνατόν να πάρουμε τη βάση των διανυσμάτων ενός καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων αν η αντίστροφη βάση διανυσμάτων είναι γνωστή και αν είναι δυνατόν, πως μπορούμε να τις πάρουμε. Το ακόλουθο θεώρημα είναι χρήσιμο για να πάρουμε μία απάντηση.

Θεώρημα 2 Αν α_i είναι μία βάση ενός καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων στον E_3 και g_{ij} είναι ο μετρικός τανυστής του E_3 σε αυτό το σύστημα τότε

$$g_{ij} = \alpha_i \cdot \alpha_j$$

Απόδειξη. Έστω r το διάνυσμα θέσης ενός σημείου P του οποίου οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες είναι x^1, x^2, x^3 και οι ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες είναι y^1, y^2, y^3

Τότε $r = y^1 b_1 + y^2 b_2 + y^3 b_3$

Επομένως το $dr = dy^1 b_1 + dy^2 b_2 + dy^3 b_3$

Έπομένως, $dr \cdot dr = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 = (ds)^2$
Έτσι

$$(ds)^2 = dr \cdot dr \tag{5}$$

Επίσης

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x^i} dx^i$$

Άρα η (5) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial x^i} dx^i\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x^j} dx^j\right) \\ &= \left(\frac{\partial r}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x^j}\right) dx^i dx^j \\ &= \alpha_i \alpha_j dx^i dx^j \end{aligned} \tag{6}$$

Επίσης ξέρουμε ότι

$$(ds)^2 = \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^p}{\partial x^j} dx^i dx^j \tag{7}$$

Από τις (6) και (7) έχουμε

$$\frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^p}{\partial x^j} = \alpha_i \cdot \alpha_j$$

ή

$$g_{ij} = \alpha_i \cdot \alpha_j \blacksquare$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει το ρόλο του μετρικού τανυστή g_{ij} στην εξασφάλιση μίας απάντησης στο παραπάνω σημειωθέν ερώτημα.

Ερώτημα 3. Αν α_i είναι μία βάση και a^i μία αντίστροφη βάση ενός καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων, τότε

$$\alpha_i = g_{ik} \alpha^k$$

Απόδειξη. Από τη στιγμή που το α^i είναι μία βάση, το διάνυσμα α_i μπορεί να εκφραστεί σαν ένας γραμμικός συνδυασμός του α^i.

Έστω

$$\alpha_1 = A_1\alpha^1 + A_2\alpha^2 + A_3\alpha^3 \tag{8}$$

Τότε το $\alpha_1 \cdot \alpha_1 = A_1\alpha^1 \cdot \alpha_1 + A_2\alpha^2 \cdot \alpha_1 + A_3\alpha^3 \cdot \alpha_1$

ή,

$$g_{11} = A_1$$

(από το Θ.(2) και (4) της $VI.10$)

Παρομοίως, $g_{12} = A_2$ και $g_{13} = A_3$

Δηλαδή

$$\alpha_1 = g_{11}\alpha^1 + g_{12}\alpha^2 + g_{13}\alpha^3 \tag{9}$$

Παρομοίως παίρνουμε

$$\alpha_2 = g_{21}\alpha^1 + g_{22}\alpha^2 + g_{23}\alpha^3 \tag{10}$$

και

$$\alpha_3 = g_{31}\alpha^1 + g_{32}\alpha^2 + g_{33}\alpha^3 \tag{11}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε τις (9),(10) και (11) στη συμπαγή μορφή

$$\alpha_i = g_{i1}\alpha^1 + g_{i2}\alpha^2 + g_{i3}\alpha^3$$

ή

$$\alpha_i = g_{ik}\alpha^k \blacksquare$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει πως ο συζυγής μετρικός τανυστής g^{ij} παρέχει ένα τρόπο για να λάβουμε την αντίστροφη βάση διανυσμάτων από τη βάση διανυσμάτων.

Θεώρημα 4. $\alpha^i = g^{ik}\alpha_k$

$$g_{11}\alpha^1 + g_{12}\alpha^2 + g_{13}\alpha^3 = \alpha_1$$
$$g_{21}\alpha^1 + g_{22}\alpha^2 + g_{23}\alpha^3 = \alpha_2$$
$$g_{31}\alpha^1 + g_{32}\alpha^2 + g_{33}\alpha^3 = \alpha_3$$

Από τη στιγμή που το $|g_{ij}| \neq 0$ το παραπάνω σύστημα εξισώσεων μπορεί να λυθεί για τα $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ με τον κανόνα *Cramer* ως ακολούθως:

$$\frac{\alpha^1}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & g_{12} & g_{12} \\ \alpha_2 & g_{22} & g_{23} \\ \alpha_3 & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\alpha^2}{\begin{vmatrix} g_{11} & \alpha_1 & g_{13} \\ g_{21} & \alpha_2 & g_{23} \\ g_{31} & \alpha_3 & g_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\alpha^3}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \alpha_1 \\ g_{21} & g_{22} & \alpha_2 \\ g_{31} & g_{32} & \alpha_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}}$$

Επομένως

$$\alpha^1 = \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & \alpha_1 & g_{13} \\ g_{21} & \alpha_2 & g_{23} \\ g_{31} & \alpha_3 & g_{33} \end{vmatrix}}{g} \text{όπου } g = |g_{ij}|$$

$$= \alpha_1 g^{11} + \alpha_2 g^{21} + \alpha_3 g^{31} \tag{12}$$

Παρομοίως

$$\alpha^2 = \alpha_1 g^{12} + \alpha_2 g^{22} + \alpha_3 g^{32} \tag{13}$$

και

$$\alpha^3 = \alpha_1 g^{13} + \alpha_2 g^{23} + \alpha_3 g^{33} \tag{14}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε τις (12),(13) και (14) στην ακόλουθη συμπαγή μορφή

$$\alpha^i = g^{ik}\alpha_k \blacksquare$$

Πόρισμα. $\alpha^i \cdot \alpha^j = g^{ij}$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές βαθμωτά με α^j παίρνουμε

$$\alpha^i \cdot \alpha^j = g^{ik}\alpha_k \cdot \alpha^j =$$

$$= g^{ik}\delta^j_k (\text{από την (4)της } VI.10)$$

$$= g^{ij} \blacksquare$$

VI.12 **Τύποι για το μετασχηματισμό ανταλλοίωτων συνιστωσών ενός διανύσματος στις συναλλοίωτες συνιστώσες του και αντίστροφα**

Σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε πως με τη βοήθεια των μετρικών τανυστών g_{ij} και g^{ij} μπορούμε να πάρουμε τις συναλλοίωτες συνιστώσες ενός διανύσματος από τις ανταλλοίωτες συνιστώσες του και αντιστρόφως.

Από την (3) της $VI.11$ έχουμε $A^k = \alpha \cdot \alpha^k$

Άρα

$$g_{ik}A^k = g_{ik}(\alpha \cdot \alpha^k) = \alpha \cdot (g_{ik}\alpha^k)$$
$$= \alpha \cdot \alpha_i (\text{από το Θεώρημα 3})$$

$$= A_i (\text{Από την (4) της } VI.11)$$

Έτσι

$$g_{ik}A^k = A_i \tag{1}$$

Επίσης από την (4) της $VI.11$ έχουμε $A^k = \alpha \cdot \alpha^k$

Επομένως

$$g^{ik}A_k = g^{ik}(\alpha \cdot \alpha_k) = \alpha \cdot (g^{ik}\alpha_k)$$

$$= \alpha \cdot \alpha^i (\text{από το Θεώρημα 4})$$

$$= A^i (\text{Από την (3) της } VI.11)$$

Έτσι

$$g^{ik}A_k = A^i \tag{2}$$

Έτσι από τον τύπο (1) μπορούμε να πάρουμε τις συναλλοίωτες συνιστώσες ενός διανύσματος από τις ανταλλοίωτες συνιστώσες του και από τον τύπο (2)μπορούμε να πάρουμε τις ανταλλοίωτες συνιστώσες ενός διανύσματος από τις συναλλοίωτες συνιστώσες του.

$VI.13$ **Φυσικές συνιστώσες ενός διανύσματος α αναφερόμενες σε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων.**

Στη συνήθη διανυσματική ανάλυση του E_3 οι προβολές ενός διανύσματος στους άξονες ενός ορθογώνιου καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων καλούνται οι **φυσικές του συνιστώσες**. Στη συνήθη διανυσματική ανάλυση του E_3 που αναφέρεται σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων, οι φυσικές συνιστώσες ενός διανύσματος α σχετικά με τις συντεταγμένες καμπύλες x^i του

συστήματος θα δηλώνονται με $A_{(i)}$ και προσδιορίζονται ως ακολούθως:

$$A_{(i)} = \frac{\alpha \cdot \alpha_i}{|\alpha_i|} \tag{1}$$

Το ακόλουθο θεώρημα εγκαθιδρύει τη σχέση μεταξύ των φυσικών, ανταλλοίωτων και συναλλοίωτων συνιστωσών ενός διανύσματος α σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων.

Θεώρημα 5. Αν $A_{(i)}, A^i$ και A_i δηλώνουν τις φυσικές, ανταλλοίωτες και συναλλοίωτες συνιστώσες ενός διανύσματος α, τότε

$$A_{(i)} = \frac{A_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{g_{ik}A^k}{\sqrt{g_{ii}}}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό έχουμε

$$A_{(i)} = \frac{\alpha\alpha_i}{|\alpha_i|} = \frac{A_i}{|\alpha_i|}(\text{από την (4) της } VI.11\ )$$

$$= \frac{A_i}{\sqrt{g_{ii}}} \tag{2}$$

($\because g_{ii} = \alpha_i \cdot \alpha_i = |\alpha_i|^2$)
Επίσης από την (1) της $V.12$

$$A_i = g_{ik}A^k$$

Άρα από τη (2) παίρνουμε

$$A_{(i)} = \frac{g_{ik}A^k}{\sqrt{g_{ii}}} \tag{3}$$

Επομένως από τις (2) και (3) έχουμε

$$A_{(i)} = \frac{A_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{g_{ik}A^k}{\sqrt{g_{ii}}} \blacksquare$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ένα θεώρημα με όρους στους οποίους η συναλλοίωτη παράγωγος ενός διανύσματος μπορεί να αποδοθεί στη γλώσσα της συνήθους διανυσματικής ανάλυσης του E_3 που αναφέρεται σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων.

Θεώρημα 6. Αν α_i και α^i είναι η βάση και η αντίστροφη βάση διανυσμάτων ενός καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων στον E_3 και $\{{}^{i}_{jk}\}$ είναι τα σύμβολα $Christoffel$ δευτέρου είδους που σχετίζονται με το μετρικό τανυστή του E_3, τότε

$$(i)\frac{\partial a_i}{\partial x^j} = \{{}^{k}_{ij}\}\alpha_k$$

και

$$(ii)\frac{\partial a_i}{\partial x^k} = -\{{}^{i}_{jk}\}\alpha^j$$

Απόδειξη της (i)**.** Έχουμε $g_{ij} = \alpha_i \cdot \alpha_j$

Παίρνοντας τη μερική παράγωγο με το x^k παίρνουμε

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} \cdot \alpha_j + \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^k} \cdot \alpha_i \tag{4}$$

Αντιμεταθέτοντας τους δείκτες στην (4) έχουμε

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} \cdot \alpha_k + \frac{\partial \alpha_k}{\partial x^i} \cdot \alpha_j$$

και

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \cdot \alpha_k + \frac{\partial \alpha_k}{\partial x^j} \cdot \alpha_i$$

Τώρα γράφοντας

$$[ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

παίρνουμε

$$[ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \cdot \alpha_k + \frac{\partial \alpha_k}{\partial x^j} \cdot \alpha_i + \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} \cdot \alpha_k + \frac{\partial \alpha_k}{\partial x^i} \cdot \alpha_j - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} \cdot \alpha_j + \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^k} \cdot \alpha_i\right)$$

$$= \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \cdot \alpha_k (\because \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i})$$

ή,

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \cdot \alpha_k = [ij,k]$$

ή

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \cdot \alpha_p = [ij, p]$$

ή

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \cdot \alpha_p = [ij, k]\alpha^k \alpha_p (\because \alpha_k \cdot \alpha_p = \delta_p^k)$$

ή

$$\left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - [ij, k]\alpha^k\right] \cdot \alpha_p = 0$$

Έτσι το διάνυσμα $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - [ij, k]\alpha^k$ είναι ορθογώνιο σε κάθε ένα από τα τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Αλλά στον E_3 αυτό είναι δυνατόν μόνο όταν το $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - [ij, k]\alpha^k$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Έτσι,

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - [ij, k]\alpha^k = 0$$

δηλαδή

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} = [ij, k]\alpha^k \tag{5}$$

Από την (5) παίρνουμε

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \cdot \alpha_p = [ij, k]\alpha^k \cdot \alpha_p = [ij, k]g^{kp} (\text{από το πόρισμα του θεωρήματος } 4)$$

$$= \left\{ {p \atop ij} \right\} \tag{6}$$

όπου

$$g^{kp}[ij, k] = \left\{ {p \atop ij} \right\}$$

Από την (6) παίρνουμε, όπως πριν ,

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} = \left\{ {p \atop ij} \right\} \alpha_p \text{ ή } \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} = \left\{ {k \atop ij} \right\} \alpha_k \blacksquare$$

Απόδειξη της (ii)**.** Έχουμε $\alpha^i \cdot a_j = \delta_j^i$

Επομένως

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} \cdot \alpha_j + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \cdot \alpha_k = 0$$

Έτσι,

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} \cdot \alpha_j = -\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \cdot \alpha_k$$

$$= -\alpha_i \cdot \{^p_{jk}\}\alpha_p$$

(από την (i) αυτού του θεωρήματος)

$$= (-\alpha_i \cdot \alpha_p)\{^p_{jk}\}$$
$$= -\{^i_{jk}\} \tag{7}$$

Από την (7) παίρνουμε, όπως πριν,

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} = -\{^i_{jk}\}\alpha^j \blacksquare$$

$VI.14$ **Μερική παράγωγος ενός διανύσματος α με x^j σε ένα σημείο x^i**

Έστω α ένα διάνυσμα σε ένα σημείο P του οποίου οι ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες είναι (y^1, y^2, y^3). Υποθέτουμε ότι σε κάθε σημείο μιας περιοχής R γύρω από το P υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα α του οποίου οι συνιστώσες είναι συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις του y^i στο R και του οποίου οι συνιστώσες A^i αναφέρονται σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων είναι συνεχείς διαφορίσιμες συναρτήσεις του x^1. Τότε σε κάθε ένα από τα σημεία του R, το α θα εκφράζεται στη μορφή

$$\alpha = A^i\alpha_i \tag{1}$$

όπου α_i είναι τα διανύσματα βάσης του καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων.

Έστω ότι το $\Delta\alpha$ δηλώνει τη μεταβολή του α όταν το P θεωρηθεί σε διαφορετική θέση P' με συντεταγμένες $(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3)$.

Τότε από την (1) παίρνουμε

$$\Delta\alpha = (A^i + \Delta A^i)(\alpha_i + \Delta\alpha_i) - A^i\alpha_i$$

$$A^i\alpha_i + \Delta A^i\alpha_i + A^i\alpha_i + (\Delta A^i)(\Delta\alpha_i) - A^i\alpha_i =$$
$$= \Delta A^i\alpha_i + A^i\alpha_i + (\Delta A^i)(\Delta\alpha_i) \tag{2}$$

Από τη (2) έχουμε

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta x^j} = \frac{\Delta A^i}{\Delta x^j}\alpha_i + A^i\frac{\Delta\alpha_i}{\Delta x^j} + \frac{\Delta A^i}{\Delta x^j}\Delta\alpha_i$$

Άρα

$$\lim_{\Delta x^j\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta x^j} = \lim_{\Delta x^j\to 0}\frac{\Delta A^i}{\Delta x^j}\alpha_i + \lim_{\Delta x^j\to 0}A^i\frac{\Delta\alpha_i}{\Delta x^j} + \lim_{\Delta x^j\to 0}\frac{\Delta A^i}{\Delta x^j}\Delta\alpha_i$$
$$= \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\alpha_i + A^i\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} \tag{3}$$

($\because$ το τρίτο όριο είναι μηδέν)

Η μερική παράγωγος ενός διανύσματος α με το x^j θα ορίζεται από το ακόλουθο όριο:

$$\lim_{\Delta x^j\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta x^j}$$

Θα δηλώνεται με $\frac{\partial A}{\partial x^j}$.

Έτσι από την (3) μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\partial A}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\alpha_i + A^i\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} \tag{4}$$

Στην επόμενη παράγραφο βρίσκουμε τις συνιστώσες του διανύσματος $\frac{\partial A}{\partial x^j}$ αναφερόμενες σε μία βάση α_i.

$VI.15$ **Οι συνιστώσες του $\frac{\partial A}{\partial x^j}$ αναφερόμενες σε μία βάση α_i**

Από την (4) της $VI.14$ έχουμε

$$\frac{\partial A}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\alpha_i + A^i\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} =$$

$$= \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\alpha_i + A^i\{{}^{p}_{ij}\}\alpha_p(\text{Από το θεώρημα 6})$$

$$= \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\alpha_i + A^p\{{}^{i}_{pj}\}\alpha_i(\text{Αντικαθιστώντας τους βουβούς δείκτες } i \text{ και } p \text{ με } p \text{ και } i)$$

$$= \left[\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + A^p\{{}^{i}_{pj}\}\right]\alpha_i$$

$$= A^i_{,j}\alpha_i \tag{1}$$

Από την (1) βρίσκουμε ότι οι συνιστώσες του $\frac{\partial A^i}{\partial x^j}$ που αναφέρονται στη βάση α_i είναι $A^i_{,j}$, δηλαδή οι συναλλοίωτες παράγωγοι του A^i με το g_{ij}.

Σαν συνέπεια της (1) έχουμε την ακόλουθη ερμηνεία της συναλλοίωτης παραγώγου ενός διανύσματος A^i στη γλώσσα της συνήθους διανυσματικής ανάλυσης του E_3 που αναφέρεται σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων.

Ερμηνεία: Αν ένα διάνυσμα α του E_3 έχει ανταλλοίωτες συνιστώσες A^i σχετικά με μία βάση α_i, τότε η συναλλοίωτη παράγωγος του διανύσματος A^i με βάση το μετρικό τανυστή του E_3 είναι ένα διάνυσμα του οποίου οι συνιστώσες είναι αυτές του διανύσματος $\frac{\partial \alpha}{\partial x^j}$ αναφερόμενες σε μία βάση α_i.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Αν g_{ij} είναι ο μετρικός τανυστής του Ευκλείδιου χώρου E_3 σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες x^i, και y^i σε ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες, να δείξετε ότι

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^p} = g_{pq}\frac{\partial x^q}{\partial x^i}$$

Έχουμε

$$g_{pq} = \frac{\partial y^j}{\partial x^p}\frac{\partial y^j}{\partial x^q} \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της (1) με $\frac{\partial x^q}{\partial y^i}$ παίρνουμε

$$g_{pq}\frac{\partial x^q}{\partial y^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^p}\frac{\partial y^j}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial y^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^p}\delta^j_i (\because \frac{\partial y^j}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial y^i} = \delta^j_i)$$

$$= \frac{\partial y^i}{\partial x^p}$$

Έτσι

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^p} = g_{pq}\frac{\partial x^q}{\partial y^i}$$

2. Να δείξετε ότι το $\frac{\partial x^p}{\partial y^i} = g^{pq}\frac{\partial y^i}{\partial x^q}$

όπου g^{ij} είναι ο συζυγής μετρικός τανυστής του E_3 σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες.

Επειδή ο g^{ij} είναι ένας (2,0) τανυστής, μελετώντας τα συστήματα συντεταγμένων (x^i) και (y^i), βρίσκουμε σύμφωνα με το νόμο μετασχηματισμού ενός τανυστή (2,0)

$$g^{pq} = \delta^{ij}\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^j} \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της (1) με $\frac{\partial y^i}{\partial x^q}$ παίρνουμε

$$g^{pq}\frac{\partial y^i}{\partial x^q} = \delta^{ij}\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^j}\frac{\partial y^i}{\partial x^q} = \delta^{ij}\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial y^j}$$

$$= \delta^{ij}\delta^p_q\frac{\partial x^q}{\partial y^j} = \delta^{ij}\frac{\partial x^p}{\partial y^j} = \frac{\partial x^p}{\partial y^i}$$

Άρα

$$g^{pq}\frac{\partial y^i}{\partial x^q} = \frac{\partial x^p}{\partial y^i}.$$

3. Να δείξετε ότι

$$g^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial y^r}\frac{\partial x^j}{\partial y^r}$$

Από την (1) του παραδείγματος (2) έχουμε

$$g^{pq} = \delta^{ij}\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^j} \tag{1}$$

Έτσι

$$g^{pq} = \frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^j}\delta^{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^i}\delta^{ii} = \frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^i}(\because \delta^{ii} = 1 \text{για κάθε} i)$$

Αντικαθιστώντας το βουβό δείκτη i με r και γράφοντας τα i και j για τους ελεύθερους δείκτες p και q παίρνουμε

$$g^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial y^r}\frac{\partial x^j}{\partial y^r}$$

4. Να βρείτε τις φυσικές συνιστώσες του διανύσματος με συνιστώσες A^i σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες.

Σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3, $g_{11} = 1$, $g_{22} = (x^1)^2$ και $g_{33} = (x^1 sinx^2)^2$, $g_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Έτσι, $\sqrt{g_{11}} = 1$, $\sqrt{g_{22}} = x^1$ και $\sqrt{g_{33}} = x^1 sinx^2$

Αν $A_{(i)}$ δηλώνουν τις φυσικές συνιστώσες τότε από τη σχέση

$$A_{(i)} = \frac{g_{it}A^t}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{g_{i1}A^1 + g_{i2}A^2 + g_{i3}A^3}{\sqrt{g_{ii}}}$$

έχουμε

$$A_{(1)} = \frac{g_{11}A^1}{\sqrt{g_{11}}} = A^1$$

$$A_{(2)} = \frac{g_{22}A^2}{\sqrt{g_{22}}} = \frac{(x^1)^2}{x^1}A^2 = x^1A^2$$

$$A_{(i)} = \frac{g_{33}A^3}{\sqrt{g_{33}}} = \sqrt{g_{33}}A^3 = (x^1 sinx^2)A^3$$

Επομένως οι ζητούμενες συνιστώσες είναι A^1,x^1A^2, $(x^1 sinx^2)A^3$.

5. Αν y^i και x^i είναι οι ορθογώνιες καρτεσιανές και καμπυλόγραμμες συντεταγμένες αντίστοιχα, να δείξετε ότι τα σύμβολα $Christoffel$ πρώτου είδους $[ij, k]$ δίνονται από

$$[ij, k] = \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial y^p}{\partial x^k}$$

Έχουμε

$$g_{ik} = \frac{\partial y^p}{\partial x^i}\frac{\partial y^p}{\partial x^k}$$

Επομένως,

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^j \partial x^i}\frac{\partial y^p}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\partial y^p}{\partial x^i} \tag{1}$$

Παρομοίως

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial y^p}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^i \partial x^k}\frac{\partial y^p}{\partial x^j} \tag{2}$$

και

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^k \partial x^i}\frac{\partial y^p}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^k \partial x^j}\frac{\partial y^p}{\partial x^i} \tag{3}$$

Άρα

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 2\frac{\partial^2 y^p}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial y^p}{\partial x^k}$$

ή

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = 2\frac{\partial^2 y^p}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial y^p}{\partial x^k}$$

ή

$$[ij,k] = 2\frac{\partial^2 y^p}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial y^p}{\partial x^k}$$

6. Αν το στοιχείο του όγκου ενός παραλληλεπίπεδου που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\alpha_1 dx^1, \alpha_2 dx^2, \alpha_3 dx^3 (dx^i > 0)$ δηλώνεται με dV, όπου x^1, x^2, x^3 είναι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, να δείξετε ότι το $dV = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3$

Αν V είναι ο όγκος ενός παραλληλεπιπέδου που σχηματίζεται από τα διανύσματα βάσης $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ τότε ξέρουμε ότι

$$V = \alpha_1 \cdot (\alpha_2 \times \alpha_3) \tag{1}$$

Επίσης

$$\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \times \alpha_3) = \sqrt{g} \tag{2}$$

Έτσι,

$$dV = (\alpha_1 dx^1) \cdot (\alpha_2 dx^2 \times \alpha_3 dx^3)(\text{από την (1) })$$

$$\sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 (\text{από την (2) })$$

7. Να δείξετε ότι η περιοχή του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα διανύσματα βάσης α_2 και α_3 είναι $\sqrt{gg^{11}}$, όπου g_{ij} και g^{ij} είναι ο μετρικός και ο συζυγής μετρικός τανυστής σε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων και $g = |g_{ij}|$.
Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα διανύσματα βάσης α_2 και α_3 είναι το μήκος του διανύσματος $\alpha_2 \times \alpha_3$ (δες $VI.7$)

Από την (1) της $VI.10$ έχουμε

$$\alpha^1 = \frac{\alpha_2 \times \alpha_3}{\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \times \alpha_3)} \tag{1}$$

Επίσης $\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \times \alpha_3) = \sqrt{g}$

Επομένως

$$\sqrt{g}\alpha^1 = (\alpha_2 \times \alpha_3) \text{ (από την (1))}$$

Έτσι,

$$|\sqrt{g}\alpha^1| = |\alpha_2 \times \alpha_3|$$

ή,

$$|\alpha_2 \times \alpha_3| = \sqrt{g}|\alpha_1| \tag{2}$$

Έπισης έχουμε

$$g^{ij} = \alpha^i \cdot \alpha^j$$

Έτσι,

$$g^{11} = \alpha^1 \cdot \alpha^1 = |\alpha^1|^2$$

Άρα

$$|\alpha^1| = \sqrt{g^{11}}$$

Επομένως η (2) μπορεί να γραφεί ως $|\alpha_2 \times \alpha_3| = \sqrt{g}\sqrt{g^{11}} = \sqrt{gg^{11}}$

Έτσι το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\sqrt{gg^{11}}$.

8. Αν α_i και α^i είναι η βάση και η αντίστροφη βάση διανυσμάτων ενός καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων,
να δείξετε ότι

$$\alpha^1 = \frac{\alpha_2 \times \alpha_3}{\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \times \alpha_3)}, \alpha^2 = \frac{\alpha_3 \times \alpha_1}{\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \times \alpha_3)}$$

$$\alpha^3 = \frac{\alpha_1 \times \alpha_2}{\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \times \alpha_3)}$$

Επειδή το $\alpha_i \times \alpha_j$ είναι ένα διάνυσμα, μπορεί να εκφραστεί σαν ένας γραμμικός συνδιασμός της βάσης διανυσμάτων α_i.

Έστω

$$\alpha_i \times \alpha_j = A^{ijk}\alpha_k \tag{1}$$

όπου

$$A^{ijk}$$

είναι κατάλληλα βαθμωτά.

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της (1) βαθμωτά με α^p, έχουμε

$$(\alpha^i \times \alpha^j) \cdot \alpha^p = A^{ijk}\alpha_k\alpha^p = A^{ijk}\delta_k^p$$

$$= A^{ijp} \tag{2}$$

Αλλά

$$(\alpha^i \times \alpha^j) \cdot \alpha^p = \frac{e^{ijp}}{\sqrt{g}} \tag{3}$$

(από την (6) της $VI.10$)
Επομένως η (1) μπορεί να γραφεί ως

$$\alpha^i \times \alpha^j = \frac{e^{ijk}}{\sqrt{g}}\alpha_k \text{ (από τις (2) και (3))}$$

$$= \frac{e^{ij1}\alpha_1 + e^{ij2}\alpha_2 + e^{ij3}\alpha_3}{\sqrt{g}}$$

ή

$$\sqrt{g}(\alpha^i \times \alpha^j) = e^{ij1}\alpha_1 + e^{ij2}\alpha_2 + e^{ij3}\alpha_3$$

ή,

$$\sqrt{g} = \frac{1}{(\alpha^2 \times \alpha^3) \cdot \alpha^1}$$

Επομένως από την (4) παίρνουμε

$$\alpha_1 = \frac{\alpha^2 \times \alpha^3}{(\alpha^2 \times \alpha^3) \cdot \alpha^1}$$

Παρομοίως

$$\alpha_2 = \frac{\alpha^3 \times \alpha^1}{(\alpha^2 \times \alpha^3) \cdot \alpha^1}$$

και

$$\alpha_3 = \frac{\alpha^1 \times \alpha^2}{(\alpha^2 \times \alpha^3) \cdot \alpha^1}$$

9. Αν

$$A = A_i\alpha^i$$

Να δείξετε ότι

$$\frac{\partial A}{\partial x^j} = A_{i,j}\alpha^i$$

Έχουμε $\alpha^i \cdot \alpha_j = \delta^i_j$

Επομένως

$$\frac{\partial \alpha^i}{\partial x^k} \cdot \alpha_j + \alpha^i \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^k} = 0$$

Έτσι, $\frac{\partial \alpha^i}{\partial x^k} \cdot \alpha_j = -\alpha_i \cdot \frac{\partial \alpha^j}{\partial x^k} = -\alpha^i \alpha_p \{^p_{jk}\}$
(Από την (i) του Θεωρήματος 6)

$$-\delta^l_p \{^p_{jk}\} = -\{^i_{jk}\} \tag{1}$$

Από την (1) έπεται ότι

$$\frac{\partial \alpha^i}{\partial x^k} = -\{^i_{jk}\} \tag{2}$$

Από την (1) έπεται ότι

$$\frac{\partial \alpha^i}{\partial x^k} = -\{^i_{jk}\}\alpha^j$$

Πάλι από την

$$A = A_i \alpha^i$$

έχουμε

$$\frac{\partial A}{\partial x^k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\alpha^i + \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^k} A_i$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\alpha^i - A_i\{^i_{pk}\}\alpha^p (\text{από την (2) })$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\alpha^i - A_p\{^p_{ik}\}\alpha^i$$

$$\left[\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - A_p\{^p_{ik}\}\right]\alpha^i$$

$$= A_{i,k}\alpha^i$$

ή,

$$\frac{\partial A}{\partial x^j} = A_{i,j}\alpha^i$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τις φυσικές συνιστώσες ενός διανύσματος του οποίου οι συνιστώσες είναι A_i σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες.

2. Να βρείτε τις φυσικές συνιστώσες ενός διανύσματος του οποίου οι συνιστώσες είναι A^i σε κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες.

3. Να αποδείξετε ότι στις ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες, οι φυσικές, οι συναλλοίωτες και οι ανταλλοίωτες συνιστώσες ενός διανύσματος συμπίπτουν.

4. Να δείξετε ότι η θεμελιώδης τετραγωνική μορφή $g_{ij}dx^i dx^j$ είναι θετικά ορισμένη.

5. Αν y^i είναι οι ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες και x^i είναι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, να αποδείξετε ότι τα σύμβολα $Cristoffel$ του δεύτερου είδους $\{^i_{jk}\}$ δίνονται από τις

$$\{^i_{jk}\} = \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^p}$$

6. Να δείξετε ότι $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}$, όπου α_i είναι η διανυσματική βάση.

7. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα διανύσματα βάσης α_3 και α_1 είναι $\sqrt{gg^{22}}$ και το εμβαδόν αυτού που σχηματίζεται από τα διανύσματα βάσης α_1 και α_2 είναι $\sqrt{gg^{33}}$.

8. Αν $dr = \alpha^i dx_i$, όπου dx_i είναι οι κατάλληλες συνιστώσες του dr να δείξετε ότι $ds^2 = g^{ij}dx_i dx_j$.

9. Να αποδείξετε ότι $(\alpha^i \times \alpha_j) \cdot \alpha_k = g^{ip}e_{pjk}$,

όπου e_{ijk} έχει τη συνήθη σημασία.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. $A_1, \frac{1}{x^1}A_2, \frac{1}{x^1 sinx^2}A_3 \cdot 2. A^1, x^1 A^2, A^3$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

$AI.0$ Παράλληλα διανυσματικά πεδία κατά μήκος μίας καμπύλης στον E_3

Έστω C μία καμπύλη στον E_3 που δίνεται από

$$x^i = x^i(t), i = 1, 2, 3$$

όπου x^i είναι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες στον E_3. Ακόμη, έστω ότι το A είναι ένα διάνυσμα εφαρμοστό στο σημείο P της καμπύλης C. Αν σε κάθε σημείο της καμπύλης C λαμβάνεται ένα διάνυσμα ίσο με A στο μήκος και παράλληλο σε αυτό στην κατεύθυνση, τότε λέμε ότι έχουμε ένα παράλληλο πεδίο διανυσμάτων κατά μήκος της καμπύλης C. Έτσι αν A είναι ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της C, τότε τα διανύσματα A δεν αλλάζουν κατά μήκος της καμπύλης. Συνεπώς

$$\frac{dA}{dt} = 0 \tag{1}$$

Τώρα,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt} = A^\alpha_{,j}\alpha_\alpha\frac{dx^j}{dt}(\text{από την (1) της } VI.15)$$

όπου A^α είναι οι ανταλλοίωτες συνιστώσες του A και α_i αναπαριστά μία βάση συστήματος

$$\left[\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^j} + \left\{{\alpha \atop ij}\right\}A^i\right]\alpha_\alpha\frac{dx^j}{dt}\left(\because A^\alpha_{,j} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^j} + \left\{{\alpha \atop ij}\right\}A^i\right)$$

$$= \left[\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt} + \left\{{\alpha \atop ij}\right\}A^i\frac{dx^j}{dt}\right]\alpha_\alpha = \left[\frac{dA^\alpha}{dt} + \left\{{\alpha \atop ij}\right\}A^i\frac{dx^j}{dt}\right]\alpha_\alpha \tag{2}$$

Με χρήση της (1), έπεται από τη (2) ότι το

$$\left[\frac{dA^\alpha}{dt} + \left\{{\alpha \atop ij}\right\}A^i\frac{dx^j}{dt}\right] = 0 \tag{3}$$

Έτσι οι συνιστώσες A^α ενός παράλληλου διανυσματικού πεδίου κατά μήκος μίας καμπύλης στον E_3 ικανοποιεί το σύστημα των εξισώσεων (3).

Μπορεί να δειχθεί ότι κάθε λύση της (3) δίνει ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο διανυσμάτων κατά μήκος της C.

Επομένως μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ένα διανυσματικό πεδίο A^i παράλληλο κατά μήκος μίας καμπύλης στον E_3 μπορεί να διατυπωθεί ως ακολούθως:

$$\frac{dA^i}{dt} + \{^i_{jk}\}A^j\frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{4}$$

Σημείωση. Σημειώνεται ότι η εξίσωση (4) μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} = 0 \tag{5}$$

όπου $\frac{\delta A^i}{\delta t}$ δηλώνει την συμφυή παράγωγο του A^i ως προς την παράμετρο t.

A.II. Παράλληλα διανυσματικά πεδία στον E_3

Η έννοια του παράλληλου διανυσματικού πεδίου κατά μήκος μίας καμπύλης στον E_3 μπορεί να επεκταθεί για να ορίσει τα παράλληλα διανυσματικά πεδία στον E_3 ως ακολούθως: Έστω ότι το P είναι ένα σημείο του E_3 και το A να είναι ένα διάνυσμα εφαρμοστό στο P. Αν σε κάθε σημείο του E_3 ένα διάνυσμα λαμβάνεται ίσο με αυτό σε μέγεθος και παράλληλο σε αυτό σε κατεύθυνση, τότε λέμε ότι έχουμε ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο στον E_3.

Αν σχεδιάσουμε μία καμπύλη C που διέρχεται από το P, τότε τα διανύσματα A^i του πεδίου που κείνται στην C θα σχηματίσουν ένα πεδίο παράλληλο κατά μήκος της C και επομένως θα ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{dA^i}{dt} + \{^i_{jk}\}A^j\frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{6}$$

(από την (4))

Επειδή το A^i είναι ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο στον E_3, τα A^i ορίζονται σε κάθε σημείο x^i του E_3. Από εδώ

$$\frac{dA^i}{dt} = \{^i_{jk}\}\frac{\partial A^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}$$

Επομένως η εξίσωση (6) παίρνει τη μορφή

$$\left[\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \{^i_{jk}\}A^j\right]\frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{7}$$

Επειδή η (7) πρέπει να ισχύει για όλες τις καμπύλες που διέρχονται από το P, δηλαδή για όλες τις τιμές της $\frac{dx^k}{dt}$, καταλήγουμε στο ότι

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \{^i_{jk}\}A^j = 0$$

ή

$$A^i_{,k} = 0 \tag{9}$$

Σημείωση. Η συνθήκη για να είναι διανυσματικό πεδίο A_i στον E_3 παράλληλο είναι

$$A_{i,k} = 0 \tag{10}$$

A.III **Παράλληλα διανυσματικά πεδία σε ένα χώρο Riemann.**

Η έννοια ενός παράλληλου διανυσματικού πεδίου σε ένα χώρο Riemann V_n μπορεί να εισαχθεί ως ακολούθως:

Μία λύση A^i ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$A^i_{,j} = 0 \tag{1}$$

όπου το κόμμα δηλώνει συναλλοίωτη παραγώγιση ως προς το μετρικό τανυστή του V_n, λέγεται ότι κατασκευάζει ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο στον V_n.

Αλλά το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (1) δεν είναι γενικά συνεπές. Από εδώ ο παραπάνω ορισμός ενός παράλληλου διανυσματικού πεδίου δε γίνεται καρποφόρος. Επομένως μία πιο περιοριστική ιδέα ενός παράλληλου διανυσματικού πεδίου, δηλαδή το παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος μίας καμπύλης έχει καταλήξει να είναι πιο κατάλληλη. Εισάγουμε στη συνέχεια αυτή τη σκέψη.

Έστω μία καμπύλη C σε ένα χώρο RiemannV_n να ορίζεται από τη

$$x^i = x^i(t) i = 1, 2, ...n \tag{2}$$

Αν A^i είναι μία λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} = \frac{dA^i}{dt} + \{^i_{jk}\}A^j\frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{3}$$

τότε τα διανύσματα A^i λέγεται ότι κατασκευάζουν ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της καμπύλης (2). Είναι γνωστό από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων της μορφής (3) ότι τέτοια παράλληλα διανυσματικά πεδία ορίζονται μονοσήμαντα από τις τιμές των συνιστωσών τους σε κάποιο σημείο της καμπύλης. Με άλλα λόγια, αν το διάνυσμα A^i δίνεται από ένα σημείο της καμπύλης, τότε ορίζεται μονοσημάντως σε κάθε άλλο σημείο της καμπύλης. Σε αυτή την οπτική, λέγεται μερικές φορές ότι ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο παράγεται από ένα δοσμένο διάνυσμα από μία παράλληλη μεταφορά ή μετάθεση κατά μήκος της καμπύλης.

Παράλληλα διανυσματικά πεδία σε μία επιφάνεια ενός χώρου Riemann :

Τώρα θεωρούμε τον παραλληλισμό επιφανειακών διανυσμάτων.

Έστω ότι C είναι μία καμπύλη σε μία επιφάνεια ενός χώρουRiemannπου ορίζεται από

$$u^\alpha = u^\alpha(s) \tag{4}$$

όπου s είναι τόξο της C

Αν A^α είναι μία λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{\delta A^\alpha}{\delta s} = \frac{dA^\alpha}{ds} + \{^{\alpha}_{\beta\gamma}\} A^\beta \frac{du^\gamma}{ds} \tag{5}$$

τότε τα διανύσματα A^α λέγεται ότι κατασκευάζουν ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της καμπύλης (4).

Κάθε τέτοιο παράλληλο διανυσματικό πεδίο ορίζεται μονοσήμαντα από τις τιμές των συνιστωσών σε κάποιο σημείο της καμπύλης (βλέπε ασκ.1). Επειδή ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος μίας καμπύλης λαμβάνεται από ένα δοσμένο διάνυσμα σε αυτή, μερικές φορές λέγεται ότι ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο σε μία καμπύλη λαμβάνεται όταν ένα δοσμένο διάνυσμα υφίσταται μία παράλληλη μεταφορά κατά μήκος αυτής. Μία παράλληλη μεταφορά κατά μήκος μίας καμπύλης καλείται επίσης παράλληλη μετάθεση ή παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος αυτής.

Αν μία επιφάνεια είναι συγκεκριμένα ένα επίπεδο που αναφέρεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες, τότε οι εξισώσεις (5) ανάγονται στις

$$\frac{dA^\alpha}{ds} = 0$$

από τις οποίες έπεται ότι οι A^α είναι σταθερές. Σε μία τέτοια περίπτωση τα διανύσματα είναι παράλληλα με την Ευκλείδεια έννοια. Έτσι ο παραλληλισμός διανυσματικών πεδίων που ορίζονται από την (5) είναι μία γενίκευση του παραλληλισμού διανυσματικών πεδίων με την έννοια του Ευκλείδη.

Σημείωση 1. Σημειώνεται ότι αν μία καμπύλη σε μία επιφάνεια είναι κλειστή και ένα διάνυσμα από ένα σημείο P σε αυτή υφίσταται μία παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος αυτής και επιστρέφει στο P, δεν παραμένει ίδιο με το αρχικό διάνυσμα (δες ασκ.2)

Σημείωση 2. Από τη στιγμή που οι εξισώσεις (5) περιέχουν μόνο την πρώτη αρχική μορφή μίας επιφάνειας, ο παραλληλισμός ενός διανυσματικού πεδίου που ορίζεται από την (5) είναι μία συμφυής ιδιότητα μίας επιφάνειας. Αυτός ο ορισμός του παραλληλισμού οφείλεται στον $Levi - Civita$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1. Η V_2 είναι μία επιφάνεια στον E_3 με το στοιχείο μήκους $ds^2 = d\phi^2 + sin^2\phi d\theta^2$ σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες r, ϕ, θ. Αν ένα διανυσματικό πεδίο A^i στον V_2 είναι παράλληλο κατά μήκος της καμπύλης $\phi = \beta$, δείξατε ότι

$$A^1 = sin\beta[\alpha \sin(\theta cos\beta) + b\cos(\theta \cos\beta)]$$

και

$$A^2 = \alpha \cos(\theta \cos\beta) - b\sin(\theta \cos\beta)$$

όπου α και β είναι αυθαίρετες σταθερές.

Λύση:

Είναι εύκολο να δούμε ότι η επιφάνεια V_2 είναι μία σφαίρα μοναδιαίας ακτίνας και η καμπύλη $\phi = \beta$ είναι επομένως ένας μικρός κύκλος πάνω στη σφαίρα. Από εδώ $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = sin^2\phi$.

Επομένως υπολογίζοντας τα σύμβολα $Christoffel$ δευτέρου είδους βρίσκουμε ότι τα μόνα μη-μηδενικά τέτοια σύμβολα είναι τα ακόλουθα:

$\{^1_{22}\} = -\sin\phi\cos\phi$ και $\{^2_{12}\} = \{^2_{21}\} = \cot\phi$

Επειδή το A^i είναι παράλληλο κατά μήκος του μικρού κύκλου $\phi = \beta$, έχουμε

$$\frac{dA^i}{d\theta} + \{^{i}_{jk}\}A^j\frac{dx^k}{d\theta} = 0 \tag{1}$$

Από την (1) παίρνουμε

$$\frac{dA^1}{d\theta} + \{^{1}_{22}\}A^2\frac{dx^2}{d\theta} = 0$$

ή

$$\frac{dA^1}{d\theta} - \sin\beta\cos\beta A^2 = 0 \tag{2}$$

$(\because x^1 = \phi, x^2 = \theta)$

Παρομοίως, έχουμε

$$\frac{dA^2}{d\theta} + \{^{2}_{12}\}A^1 = 0$$

ή

$$\frac{dA^2}{d\theta} + \cot\beta A^1 = 0 \tag{3}$$

Από την (3) έχουμε

$$\frac{d^2A^2}{\delta\theta^2} + \cot\beta\frac{dA^1}{d\theta} = 0$$

ή,

$$\frac{d^2A^2}{\delta\theta^2} + \cot\beta(\sin\beta\cos\beta)A^2 = 0(\text{από τη (2) })$$

ή,

$$\frac{d^2A^2}{\delta\theta^2} + \cos^2\beta A^2 = 0$$

Επομένως η $A^2 = C\cos\theta(\theta\cos\beta) + D\sin(\theta\cos\beta)$, όπου C και D είναι αυθαίρετες σταθερές.

Έτσι από τη (2) έχουμε

$$\frac{dA^1}{d\theta} - \sin\beta\cos\beta[C\cos(\theta\cos\beta) + D\sin(\theta\cos\beta)] = 0$$

ή

$$\frac{dA^1}{d\theta} = C\sin\beta\cos\beta\cos(\theta\cos\beta) + D\sin\beta\cos\beta\sin(\theta\cos\beta)$$

Επομένως

$$A^1 = C\sin\beta\sin(\theta\cos\beta) - D\sin\beta\cos(\theta\cos\beta) =$$

$$= \sin\beta[C\sin(\theta\cos\beta) - D\cos(\theta\cos\beta)]$$

Γράφοντας $C = \alpha$ και $D = -b$ παίρνουμε,

$$A^1 = \sin\beta[\alpha\sin(\theta\cos\beta) + b\cos(\theta\cos\beta)]$$
$$A^2 = \alpha\cos\theta(\theta\cos\beta) - b\sin(\theta\cos\beta)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Η V_2 είναι μία επιφάνεια στον E_3 με στοιχείο μήκους $ds^2 = d\phi^2 + sin^2\phi d\theta^2$ σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες r, θ, ϕ. Αν στο σημείο P μίας καμπύλης $\phi = \beta$ στη V_2 αντιστοιχώντας το $\theta = 0$ ένα διάνυσμα A^i ληφθεί ως (1,0), δείξατε ότι ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο ορίζεται μονοσήμαντα στην καμπύλη $\phi = \beta$ από συνιστώσες

$$cos[\theta\cos\beta], -\frac{\sin[\theta\cos\beta]}{\sin\beta}$$

2. Αν σε μία επιφάνεια V_2 της ασκ.1, ένα διάνυσμα A^i ληφθεί στο σημείο P στην καμπύλη $\phi = \beta$ αντιστοιχώντας το $\theta = 0$ ως (1,0) και υποστεί μία παράλληλη μετάθεση κατά μήκος της καμπύλης, βρείτε το A^i όταν επιστρέψει στο σημείο P.

3. Στην V_2 με μετρική $ds^2 = (dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + (dx^2)^2$, όπου g_{12} είναι μία συνάρτηση των x^1 και x^2, δείξατε ότι τα εφαπτόμενα διανύσματα στις καμπύλες $x^1 =$ σταθερά κατασκευάζουν ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος των καμπύλων $x^2 =$ σταθερά.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

2. Το ζητούμενο διάνυσμα είναι
$\left(\cos[2\pi\cos\beta], -\frac{\sin[2\pi\cos\beta]}{\sin\beta}\right)$