

Περί Εποπτείας

Kant (1724-1804)

Η κριτική του παραδοσιακού εμπειρισμού: η γνώση δεν είναι παθητική διαδικασία πρόσληψης δεδομένων των αισθήσεων. Ο νους ως ενεργός αρχή θέτει σε τάξη την εμπειρία. Μέσω των κατηγοριών της νόησης και των μορφών της καθαρής εποπτείας.

Χώρος-χρόνος

Αιτιότητα

Ουσία.

Κριτική του προ-κριτικού ρασιοναλισμού—ο Λόγος δεν συλλαμβάνει

προυπάρχουσες αναγκαίες αλήθειες μέσω της εποπτείας ή με το να τις θεωρεί

προφανείς. Ο Λόγος *θέτει* τις βασικές κατηγορίες και μορφές της εποπτείας που

κάνουν δυνατή την εμπειρία. *Η Κοπερνίκια στροφή.*

Η κριτική στον ιδεαλισμό. Φαινόμενα-νοούμενα. Αλλά μόνο τα φαινόμενα είναι

γνώσιμα. Άρα ο νους θέτει δομή και συγκροτεί τον κόσμο των φαινομένων, δηλ. τον

κόσμο της εμπειρίας.

Πως είναι δυνατή η εμπειρία; Η απάντηση στον Hume. *Συνθετικές a priori αρχές.*

Οι καντιανές διακρίσεις—αναλυτικές-συνθετικές κρίσεις

A priori-a posteriori κρίσεις.

αναλυτικές-συνθετικές κρίσεις

Οι δύο έννοιες της *αναλυτικότητας* στον Καντ.

ι) το νόημα (η έννοια) του κατηγορουμένου εμπεριέχεται στο νόημα (έννοια) του υποκειμένου

--μέρος-όλον πχ. Όλα τα κόκκινα τριαντάφυλλα είναι τριαντάφυλλα.

--ουσιώδης και ατυχηματικές ιδιότητες (συμβεβηκότα) πχ. Ο άνθρωπος είναι ορθολογικό ον.

ιι) μια πρόταση είναι αναλυτική εάν η άρνησή της οδηγεί σε λογική αντίφαση.

Το δεύτερο κριτήριο είναι το πιο σημαντικό, αλλά τα δύο κριτήρια συμπίπτουν με βάση την Αριστοτελική Λογική.

Εννοιολογική ανάλυση ως η μέθοδος της αναλυτικότητας.

Οι προτάσεις της λογικής είναι αναλυτικές

Πόρισμα: οι προτάσεις της αριθμητικής και της γεωμετρίας δεν είναι αναλυτικές.

$$5+7=12$$

αλλά επίσης: το επιχείρημα των μεγάλων αριθμών,

$33512+72151=105723$. Δεν προκύπτει από τις έννοιες μόνο μέσω εννοιολογικής ανάλυσης.

Οι προτάσεις που δεν είναι αναλυτικές είναι *συνθετικές*.

Οι συνθετικές κρίσεις είναι ενισχυτικές: προτείνουν νέους τρόπους σύνδεσης μεταξύ εννοιών.

Δύο έννοιες συνθετικότητας.

ι) οι προτάσεις που δεν είναι αναλυτικές.

ιι) οι προτάσεις στις οποίες εμπλέκεται η εποπτεία—δηλ. οι προτάσεις οι οποίες απαιτούν εποπτεία για να διαπιστωθεί εάν είναι αληθείς.

Σημείωση: προφανώς η εποπτεία δεν εμπλέκεται στις αναλυτικές προτάσεις—η εννοιολογική ανάλυση είναι αρκετή.

Πχ. το χιόνι είναι άσπρο

Υπάρχουν ροζ τριαντάφυλλα.

Δύο μορφές εποπτείας.

Εμπειρική εποπτεία. Εμπειρικές έννοιες μπορούν να ενισχυθούν στην εμπειρική εποπτεία. Πχ. οι κύκνοι είναι άσπροι. Το νέο κατηγορημα προστίθεται στην έννοια ΚΥΚΝΟΣ μέσω της εμπειρικής εποπτείας. (Και προφανώς όχι μέσω εννοιολογικής ανάλυσης.)

Καθαρή εποπτεία. Παρατήρηση: κάποιες συνθετικές κρίσεις είναι αναγκαία αληθείς. Πχ. εάν κάτι είναι κόκκινο, τότε δεν είναι μαύρο. Εάν το α είναι μεγαλύτερο από το β και το β μεγαλύτερο από το γ, τότε το α είναι μεγαλύτερο από το γ. Οι προτάσεις αυτές δεν είναι αναλυτικές—άρα είναι συνθετικές. Αλλά είναι και αναγκαίες. Τι τις κάνει αληθείς. *Η καθαρή εποπτεία.* Οι συνθετικές κρίσεις που είναι a priori βέβαιες και αποδείξιμα αληθείς είναι προτάσεις των οποίων η αλήθεια εδράζεται στην καθαρή εποπτεία. Δύο έννοιες μπορεί να συνδέονται αναγκαία μεταξύ τους, αλλά στο βαθμό που αυτό συμβαίνει στην (καθαρή) εποπτεία (και απαιτεί εποπτεία) η σχετική κρίση είναι συνθετική Για την οποία ο Καντ λέει: «Ως εποπτεία a priori είναι αδιάσειστα συνδεδεμένη με την έννοια πριν από κάθε εμπειρία ή συγκεκριμένη αντίληψη». Η καθαρή εποπτεία περιέχει μόνο την μορφή της αισθητικότητας—η οποία είναι γνώσιμη a priori, αφού τίθεται από το υποκείμενο στα πράγματα.

Μορφές της καθαρής εποπτείας: *χώρος και χρόνος*

Η έννοια της καθαρής εποπτείας είναι κεντρική για την κατανόηση της θέσης του Καντ ότι τα μαθηματικά και η γεωμετρία εμπεριέχουν συνθετικές a priori κρίσεις.

A priori-a posteriori κρίσεις

Το ερώτημα εδώ είναι: πώς γίνεται γνωστή (δικαιολογείται) η αλήθεια μιας πρότασης;

Αλλά επίσης: ποιο είναι το τροπικό status μιας πρότασης (αναγκαία αληθής ή ενδεχομενική);

Το κύριο χαρακτηριστικό των a posteriori προτάσεων είναι ότι είναι ενδεχομενικές. Καμία a posteriori κρίση δεν μπορεί να φέρει μαζί της την δύναμη της αναγκαιότητας. Η εμπειρία δεν μπορεί ποτέ να μας δείξει την αναγκαιότητα μιας κρίσης.

Παρ' όλα αυτά υπάρχουν αναγκαίες κρίσεις. Αυτές οι κρίσεις (είτε αναλυτικές είτε συνθετικές) δεν μπορεί να είναι a posteriori. Επομένως, πρέπει να είναι a priori.

Ο Καντ ταυτίζει την a priori γνωσιμότητα με την αναγκαιότητα.

«Η αναγκαιότητα και η καθολικότητα είναι ασφαλή κριτήρια για την a priori γνώση».

A priori κρίσεις: Αναγκαίες, καθολικές, μη-αναθεωρίσιμες.

Σημαντική παρατήρηση: η αναγκαιότητα μιας κρίσης δεν καθορίζει το περιεχόμενό της. Η πρόταση μπορεί να είναι είτε αναλυτική είτε συνθετική.

Πχ. ο νόμος του αποκλεισμένου τρίτου—αναλυτική *a priori*

Οι αλήθειες της αριθμητικής και της γεωμετρίας—συνθετικές *a priori*.

Συνθετικές (καθαρή εποπτεία) αλλά αναγκαία αληθείς (άρα *a priori*).

Επομένως, το κεντρικό ερώτημα: *πώς είναι δυνατές οι συνθετικές a priori κρίσεις;*

Το καθήκον της κριτικής μεταφυσικής είναι να απαντήσει σ' αυτό ερώτημα.

Κρίσιμο1: οι *συνθετικές a priori κρίσεις* έχουν ουσιαστικό περιεχόμενο (το οποίο δεν αποκαλύπτεται απλώς με εννοιολογική ανάλυση) αλλά είναι αναγκαία αληθείς.

Κρίσιμο2: το ότι έχουν ουσιαστικό περιεχόμενο έπεται από το ότι εμπλέκεται σ' αυτές η εποπτεία. Αλλά η αναγκαιότητά τους έπεται από το ότι οι προτάσεις αυτές αναφέρονται στη *μορφή* της εποπτείας.

Οι *συνθετικές a priori κρίσεις* ως συνθήκες δυνατότητας της εμπειρίας.

Η θεμελίωση της Νευτώνειας μηχανικής.

Ο ρόλος της εποπτείας στα Μαθηματικά και στη Γεωμετρία

Σύνοψη: Ο Καντ για την *a priori* γνώση

Γνώση η οποία είναι καθολική, αναγκαία και βέβαιη.

Έχει περιεχόμενο (εάν η κρίση είναι συνθετική) ή είναι κενή περιεχομένου (εάν η κρίση είναι αναλυτική).

Το περιεχόμενο της είναι τυπικό (formal). Εννοιολογικές συνδέσεις (εάν η κρίση είναι αναλυτική) ή η μορφή της εποπτείας (εάν η κρίση είναι συνθετική).

Είναι συγκροτητική της εμπειρίας (καμία εμπειρία δεν είναι δυνατή χωρίς *a priori* αρχές).

Αποσυνδεδεμένη από το περιεχόμενο (σε αντίθεση με τη μορφή) της εμπειρίας.

Επομένως, μη αναθεωρίσιμη.

Η κριτική του συνθετικού *a priori* και η πτώση της εποπτείας.

Ο Εμπειρισμός του John Stuart Mill (1806-73)

Ο Συμβατισμός του Henri Poincare

Ο Λογικισμός του Gottlob Frege (1848-1925)

Αφαίρεση της εποπτείας από την αριθμητική—η έννοια της απόδειξης από πρώτες αρχές. Η προσπάθεια αναγωγής της αριθμητικής στη λογική.

David Hilbert (1899)

Η αφαίρεση της εποπτείας από την γεωμετρία

Frege

Κυριότερα έργα

Begriffsschrift Εννοιογραφία 1879

Τα θεμέλια της αριθμητικής 1884

Οι Βασικοί νόμοι της αριθμητικής 1893

Η θεμελίωση της νέας λογικής

Από τη φιλοσοφία της αριθμητικής στη φιλοσοφία της γλώσσας

Σε τι συνίσταται η ιδιαιτερότητα των αληθειών της αριθμητικής;

Η αριθμητική ανάγεται στη λογική (Λογικισμός) και άρα η αριθμητική γνώση είναι λογική γνώση.

Συμφωνία με Καντ στο ότι η Λογική είναι ένα σώμα *αναλυτικών αληθειών*. Άρα και οι αλήθειες της αριθμητικής είναι αναλυτικές αλήθειες, αφού ανάγονται στη Λογική.

Άρνηση του Καντιανού συνθετικού *a priori* της αριθμητικής.

Άρνηση της πρώτης έννοιας της αναλυτικότητας του Καντ (ως συνέπεια της νέας Λογικής). Αλλά συμφωνία με τη δεύτερη έννοια. (Η άρνηση μιας αναλυτικής αλήθειας συνιστά λογική αντίφαση.)

Μια πρόταση είναι *αναλυτικά αληθής* εάν μπορεί να παραχθεί (αποδειχθεί) μέσω γενικών λογικών νόμων και ορισμών.

Όμως, εάν η απόδειξη μιας πρότασης εξαρτάται από αληθείς προτάσεις που ανήκουν στη σφαίρα των εμπειρικών επιστημών, τότε η πρόταση αυτή είναι *συνθετική*.

Μια πρόταση είναι *a priori αληθής* εάν η απόδειξή της εξαρτάται μόνο γενικούς νόμους οι οποίοι δεν είναι οι ίδιοι αποδείξιμοι (κάτι σαν αξιώματα).

Κεντρική η έννοια της *απόδειξης*. Αλλά δεν αρκεί για την αναλυτικότητα. Έχει σημασία από τι προκύπτουν συνάγεται μια πρόταση.

Εάν οι προκειμένες είναι λογικοί νόμοι και ορισμοί (όπως στην αριθμητική) τότε η εν λόγω πρόταση είναι *αναλυτική και a priori*.

Εάν οι προκειμένες είναι αξιώματα τα οποία δεν επιδέχονται απόδειξη (όπως στη γεωμετρία), τότε η εν λόγω πρόταση είναι *συνθετική και a priori*.

Εάν οι προκειμένες είναι εμπειρικές προτάσεις (όπως στη φυσική), τότε η εν λόγω πρόταση είναι *συνθετική και a posteriori*.

Ιεραρχική προσέγγιση στη γνώση.

συνθετικές και a posteriori προτάσεις (οι αλήθειες του φυσικού και του ψυχολογικού πεδίου)

συνθετικές και a priori προτάσεις (οι αλήθειες της γεωμετρίας).

Συνθετικές επειδή εδράζονται στη χωρική εποπτεία—αλλά και επειδή μπορούμε να τις αρνηθούμε χωρίς να υποπέσουμε σε λογική αντίφαση (βλ. μη ευκλείδειες γεωμετρίες)

A priori επειδή διέπουν οτιδήποτε μπορεί να εποπτευθεί στο χώρο.

Οι *συνθετικές a priori* προτάσεις διέπουν ένα χώρο πολύ ευρύτερο από αυτόν που διέπουν οι *συνθετικές a posteriori* προτάσεις. Αλλά δεν έχουν καθολική ισχύ.

Αναλυτικές a priori προτάσεις (λογική και αριθμητική). Έχουν καθολική ισχύ—διέπουν τα πάντα—το ευρύτερο δυνατό πεδίο: οτιδήποτε μπορεί να γίνει νοητό.

Οτιδήποτε είναι νοητό είναι και αριθμήσιμο. Στενά συνδεδεμένες με τους νόμους της σκέψης. Η άρνηση των νόμων της λογικής και της αριθμητικής κάνουν τη σκέψη αδύνατη.

Συνεπώς, τα ιδιαίτερα γνωρίσματα των νόμων της λογικής και της αριθμητικής είναι:

Ότι δεν έχουν κάποιο συγκεκριμένο πεδίο εφαρμογής—διέπουν τα πάντα.

Ότι δεν μπορεί κάποιος να τους αρνηθεί χωρίς να υποπέσει σε λογική αντίφαση.

Ότι είναι ανεξάρτητες από την εμπειρία (η εποπτεία δεν είναι αναγκαία, αρκεί η απόδειξη).

Σημαντική διαφορά από τον Καντ: ο λόγος από μόνος του (χωρίς την εμπειρία) είναι η πηγή της αριθμητικής γνώσης.

Το επιχείρημα των μεγάλων αριθμών. Ο Frege το χρησιμοποιεί εναντίον της Καντιανής εποπτείας.

John Stuart Mill (1806-1873)

Κύρια Έργα:

- System of Logic (1843)
- Principles of Political Economy (1848)
- On Liberty (1859)
- Utilitarianism (1861)

Σχέση με καντιανισμό

Δέσμευση στον νατουραλισμό – ο νούς είναι μέρος του φυσικού κόσμου. Πώς είναι δυνατή η γνώση;

Σκεπτικισμός

Η καντιανή λύση: συνθετικές a priori αρχές – απόρριψη του νατουραλισμού.

Mill: αποδοχή ενός ριζικού εμπειρισμού. ΟΛΗ η γνώση βασίζεται στην εμπειρία – απόρριψη του a priori. Ο σκεπτικισμός δεν εγείρεται καν. Η εμπειρική γνώση (αναπάντητη και μη σοβαρή) είναι δυνατή μέσω της επαγωγής. (με απαρίθμηση) Πρωταρχικές και καθ' όλα νόμιμες προδιαθέσεις για γενίκευση με βάση την εμπειρία + μνήμη. Όλη η επιστήμη εγείρεται στη βάση αυτών των δύο.

Ο Mill και η κριτική του Hume στην επαγωγή.

Mill: induction είναι μια πρωταρχική συναγωγική πρακτική και παραμένει τέτοια όταν αναστοχαστούμε περί αυτής.

Τα μαθηματικά και η λογική εμπεριέχουν πραγματικές συναγωγές – οδηγούν σε νέα γνώση. ΟΛΗ η πραγματική γνώση στηρίζεται στην εμπειρία. Άρα δεν υπάρχει a priori γνώση. Οι νόμοι της λογικής είναι εμπειρικοί νόμοι, π.χ. ο νόμος της μη αντίφασης ή αρχή του αποκλειόμενου τρίτου.

Οι νόμοι της λογικής, ως οι πιο γενικοί νόμοι της επιστήμης, θεμελιώνονται εμπειρικά.

Το επιχείρημα: αν η λογική δεν περιείχε πραγματικές συναγωγές, τότε οι παραγωγικοί συλλογισμοί θα έπεφταν θύματα της petitio principii – θα έκαναν λήψη

του ζητουμένου – και δεν θα παρήγαγαν νέα γνώση. Αλλά η παραγωγική λογική παράγει νέα γνώση. Άρα πρέπει να περιέχει πραγματικές συναγωγές.

ΚΡΙΤΙΚΗ: παράγει η λογική νέα γνώση;

Το ίδιο ισχύει και για τα μαθηματικά και τη γεωμετρία.

Γεωμετρία: Τα αξιώματα είναι εμπειρικά θεμελιωμένα. Αν και τα γεωμετρικά αντικείμενα είναι ιδανικά ή φανταστικά όρια υλικών αντικειμένων.

Αριθμητική: Όπως η λογική και η γεωμετρία, είναι μία φυσική επιστήμη, η οποία αφορά μια κατηγορία νόμων της φύσης: αυτούς που αφορούν αθροίσματα (aggregates). Τα νούμερα δηλώνουν αθροίσματα, όπου τα αθροίσματα είναι φυσικές οντότητες – όχι αφηρημένες οντότητες.

$2+3=5$: είναι μια πραγματική πρόταση – επαγωγικά θεμελιωμένη.

Οι μαθηματικές προτάσεις (ισότητες) είναι πραγματικοί ορισμοί. Αλλά η αλήθεια τους καθορίζεται εμπειρικά, μέσω επαγωγικής γενίκευσης.

Άρνηση της θέσης ότι οι μαθηματικές προτάσεις είναι αναλυτικές.

$3=2+1$: ένας πραγματικός ορισμός του αριθμού τρία.

Υπάρχουν συλλογές αντικειμένων που δημιουργούν την εντύπωση •••, αλλά

μπορούν να διαχωριστούν σε δύο τμήματα ως εξής: •• •

Ποιο είναι το περιεχόμενο των μαθηματικών προτάσεων; Έσχατα, ο κόσμος.

Συλλογές αντικειμένων ή υλικά αντικείμενα.

«Όλοι οι αριθμοί είναι αριθμοί κάτινος; δεν υπάρχουν αριθμοί σε αφαίρεση. (...)

Αλλά αν και είναι αριθμοί κάτινος, μπορεί να είναι αριθμοί οποιουδήποτε.» Έτσι ο

Μιλλ επιχειρεί να διασώσει την γενικότητα και καθολικότητα των μαθηματικών, χωρίς να τα αποκόψει από τον κόσμο.

Αλλά οι μαθηματικές οντότητες δεν συναντώνται στον κόσμο. Ο Μιλλ αρνείται ότι οι μαθηματικές οντότητες είναι νοητικές κατασκευές. Επίσης αρνείται ότι είναι αφηρημένες οντότητες. Αναφέρονται σε πραγματικά αντικείμενα.

Οι μαθηματικές προτάσεις περιέχουν προσεγγίσεις και εξιδανικεύσεις. Έτσι, αυστηρά μιλώντας, είναι ψευδείς. Αλλά, προσεγγιστικά αληθείς, παρά ταύτα.

Ψυχολογική εξήγηση της υποτιθέμενης αναγκαιότητας των μαθηματικών αληθειών. Η εξοικείωση δημιουργεί την ψευδαίσθηση της αναγκαιότητας. Οι μαθηματικές αλήθειες είναι αναθεωρήσιμες. Το ότι δεν μπορούμε να συλλάβουμε την άρνησή τους, δεν σημαίνει ότι είναι αναγκαία αληθείς.

Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής ως περίπτωση της επαγωγής με απαρίθμηση.

| |
|--|
| Η ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΠΙΟ ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ – ΚΑΛΥΠΤΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ. |
|--|

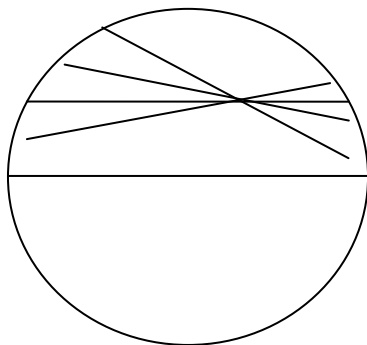
Poincaré

Η ‘παραμόρφωση’ του χώρου στο Belvedere μας οδηγεί σε μια άλλη υπέροχη ξυλογραφία του Escher, το *Όριο Κύκλου III*.

Ο Escher εμπνεύστηκε το έργο αυτό από ένα σχήμα του μαθηματικού H S M Coxeter. Αποτελεί μια από τις πολλές και όμορφες αναπαραστάσεις της υπερβολικής (Λομπατσέφσκιας) γεωμετρίας. Η μη-ευκλείδεια αυτή γεωμετρία αρνείται το πέμπτο αξίωμα του Ευκλείδη και αξιώνει ότι άπειρες παράλληλες μπορούν να αχθούν από σημείο εκτός ευθείας. Το γεωμετρικό σύστημα αυτό είναι μαθηματικά συνεπές. Καλύτερα, στο βαθμό που η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι συνεπής, είναι και η υπερβολική γεωμετρία. Στον υπερβολικό χώρο, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές γωνίες. Ο χώρος είναι καμπύλος, με σταθερή αρνητική καμπυλότητα. Αλλά μπορούμε να συλλάβουμε έναν τέτοιο χώρο; Ακόμα και εάν είναι μαθηματικά δυνατός, είναι φυσικά δυνατός; Η ιστορία είναι μακρά και δεν μπορεί να ειπωθεί τώρα. Ας σημειώσουμε μόνο ότι σύμφωνα με την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας του Αϊνστάιν, ο χώρος δεν είναι Ευκλείδειος. Δεν είναι καν χώρος σταθερής καμπυλότητας. Η καμπυλότητά του είναι μεταβλητή και εξαρτάται από την κατανομή της μάζας. Αυτό που κάποτε θεωρείτο αδύνατο (δηλ, ο χώρος να μην είναι Ευκλείδειος) δεν είναι απλά δυνατό αλλά και ενεργεία (πραγματικό).

Όταν το πρόβλημα της γεωμετρίας του χώρου συζητήθηκε έντονα, στα τέλη του δέκατου ένατου αιώνα, ο μαθηματικός και φιλόσοφος Henri Poincaré πρότεινε το ακόλουθο νοητικό πείραμα. Φαντασθείτε έναν επίπεδο δισδιάστατο δίσκο στον οποίο κατοικούν επίπεδα όντα. Τα όντα αυτά δεν έχουν την τρίτη διάσταση αλλά μπορούν να κινούνται ελεύθερα πάνω στον δίσκο. Τα όντα αυτά είναι νοήμονα, έχουν αναπτύξει αρκετά την επιστήμη και διαθέτουν μετρητικές συσκευές. Αποφασίζουν να προσδιορίσουν την γεωμετρία του χώρου τους. Πως θα προχωρήσουν; Ασφαλώς εμπειρικά. Θα χαράξουν μακρά τρίγωνα για να διαπιστώσουν ποιο είναι το άθροισμα των γωνιών τους. Θα πάρουν σημείο εκτός ευθείας και θα επιδιώξουν να βρουν πόσες παράλληλες προς μια ευθεία εκτός αυτού του σημείου μπορούν να αχθούν. Πράγματι, ξεκινούν την περιπέτειά τους. *Μια σκηνοθετική παρένθεση.* Εμείς που παρατηρούμε απ' έξω αυτές τους τις προσπάθειες γνωρίζουμε ήδη ποια είναι η γεωμετρία του χώρου τους. Πρόκειται για έναν φραγμένο επίπεδο (δηλ. Ευκλείδειο) χώρο. Τελικά, τα όντα αυτά ζουν πάνω σε έναν επίπεδο δίσκο. Αυτά τα όντα όμως, οι συμμετέχοντες στο δράμα, δεν γνωρίζουν τίποτα σχετικό. Ξεκινούν εμπειρικά, σχεδόν από το μηδέν. Τα όντα αυτά έχουν μια ατυχία. Ο κόσμος τους υπόκειται σε ένα θερμικό πεδίο που θερμαίνει τα πάντα. Υποθέτουμε πλήρη και ομοιόμορφη θερμική αγωγιμότητα και αυτόματη προσαρμοστικότητα, έτσι ώστε το θερμικό πεδίο να μην είναι καθόλου αντιληπτό. Καμία συσκευή δεν μπορεί να το ανιχνεύσει. Μέρος του σεναρίου είναι η εξής υπόθεση. Η θερμοκρασία σε κάθε σημείο του χώρου τους είναι μεταβλητή και καθορίζεται από την συνάρτηση R^2-r^2 , όπου R είναι η ακτίνα του δίσκου και r είναι η απόσταση ενός σημείου από το κέντρο του δίσκου. Άρα, η θερμοκρασία στο κέντρο είναι μέγιστη ενώ στην περιφέρεια του δίσκου είναι μηδέν. Ευτυχώς για τους ντόπιους, οι νόμοι της φύσης στον κόσμο τους δεν τους επιτρέπουν να αισθανθούν αυτές τις διαφορές θερμοκρασίας κατά την κίνησή τους από το κέντρο στην περιφέρεια. Δυστυχώς για αυτούς, ως αποτέλεσμα αυτού του θερμικού πεδίου, τα πάντα (αυτοί οι ίδιοι, οι χάρακες που χρησιμοποιούν κλπ.) συρρικνώνονται ομοιόμορφα καθώς μετακινούνται από το κέντρο στην περιφέρεια. *Τέλος σκηνοθετικής παρένθεσης.* Τι θα διαπιστώσουν οι ντόπιοι όσον αφορά την γεωμετρία του χώρου τους. Για προφανείς λόγους δεν θα μπορέσουν να φθάσουν ποτέ στην περιφέρεια του δίσκου. Μπορεί να την πλησιάζουν οριακά, αλλά λόγω της συνεχούς σμίκρυνσής τους, δεν θα την φθάσουν ποτέ. Εύλογα, λοιπόν, συμπεραίνουν ότι ο χώρος στον οποίο ζουν είναι άπειρος. Ορίζουν σημείο εκτός ευθείας και φέρουν

παράλληλες προς αυτήν. (Ας υποθέσουμε ότι η εν λόγω ευθεία είναι η διάμετρος του δίσκου.) Παράλληλες, γνωρίζουν, είναι οι ευθείες που δεν τέμνονται όσο και να επεκταθούν. Στέλνουν, λοιπόν, πολλούς επιστήμονες (εξοπλισμένους με συστήματα ενδο-επικοινωνίας) στο εν λόγω σημείο και άγουν ευθείες. Για προφανείς λόγους (δείτε παραπάνω) ένας απεριόριστος αριθμός αυτών των ευθειών δεν θα συναντήσουν την διάμετρο, όσο και να επεκταθούν. Εύλογα, συμπεραίνουν ότι ο χώρος τους είναι Λομπατσέφσκιος και όχι Ευκλείδειος.



Όταν επιστρέφουν οργανώνουν μια επιστημονική σύνοδο στην οποία ανακοινώνουν τα πορίσματά τους. Σε αυτή συμμετέχει και ένας νεαρός επιστήμων (που δεν πήρε μέρος στη αποστολή) ονόματι Λοπέρνικος. ‘Ανοησίες’ κραυγάζει. Και συνεχίζει: ‘Ο χώρος μας είναι πεπερασμένος και Ευκλείδειος. Απλώς υπάρχει ένα θερμικό πεδίο σε λειτουργία το οποίο συρρικνώνει

ομοιόμορφα τα πάντα κλπ. κλπ.’. Η κοινότητα εισέρχεται σε κρίση. Ποιος έχει δίκιο; Το ότι εμείς ως εξωτερικοί παρατηρητές γνωρίζουμε ότι ο Λοπέρνικος έχει το δίκιο με το μέρος του είναι άσχετο. Το πρόβλημα είναι πως οι συμμετέχοντες θα επιλύσουν τη διαφορά. Η απάντηση του Poincaré ήταν ότι η γεωμετρία του χώρου δεν είναι κάτι που ανακαλύπτεται εμπειρικά. Υπεστήριξε ότι είναι θέμα σύμβασης ποια γεωμετρία θα επιλεγεί, όπου το κριτήριο για την σύμβαση είναι η απλότητα του συνολικού μας θεωρητικού συστήματος.

Το *Όριο Κύκλου III* είναι μια εξαιρετική απεικόνιση του φανταστικού κόσμου που περιγράψαμε. (Πράγματι, η ξυλογραφία στηρίζεται σε ένα ελαφρώς παραλλαγμένο μοντέλο της υπερβολικής γεωμετρίας το οποίο κατασκευάστηκε από τον Poincaré.) Φανταστείτε ότι είστε εντός του κόσμου αυτού όπως τα ψάρια του Escher. Καθώς μετακινείστε προς την περιφέρεια θα συρρικνώνεστε ακριβώς όπως τα ψάρια της ξυλογραφίας. Για να φτάσετε στην περιφέρεια θα διανύσετε μια άπειρη απόσταση. Τα τρίγωνα που θα χαράξετε θα έχουν άθροισμα γωνιών μικρότερο από δύο ορθές, όπως ακριβώς στην ξυλογραφία, κλπ. Απλώς, εάν είσαстан μέσα στην εικόνα, δεν θα διαπιστώνατε τίποτα παράξενο. Το *Όριο Κύκλου III* αναδεικνύει την σχετικότητα της αδυνατότητας.