Fodor, J. (1998). *Concepts: Where Cognitive Science Went Wrong*. Oxford: Clarendon Press.

Fodor, J. (2001). *The Mind doesn't work That Way*. Cambridge, MA: MIT Press.

Fodor, J. (2003). *Hume Variations*. Oxford: Clarendon Press.

Fodor, J. (2004). Having Concepts: A Brief Refutation of the 20th century. *Mind and Language*, 19 (1), 29-47.

Fodor, J. and Lepore, E. (2002). *The Compositionality Papers*. Oxford: Clarendon Press.

Loewer, B. (1997). A Guide to Naturalizing Semantics. Στο B. Hale & C. Wright, *A Companion to the Philosophy of Language*. Oxford: Blackwell Publishers, 108-126.

Loewer, B. & Rey, G. (1991). *Fodor and his Critics*. Oxford: Blackwell Publishers.

Margolis, E. & Laurence, S. (1999). *Concepts: Core Readings*. Cambridge, MA: MIT Press.

Medin, D. L. & Ortony, A. (1989). Psychological Essentialism. Στο S. Vosniadou and A. Ortony, *Similarity and Analogical Reasoning*. Cambridge: CUP (pp. 179-195).

Millikan, R. (1989). Biosemantics. *The Journal of Philosophy*, 86, 281-297.

Παγωνδιωτης, Κ. (1999). Υπάρχει γλώσσα της σκέψης;». Στο Δ. Κατη, Μ. Κονδυλη & Κ. Νικηφοριδου, *Γλώσσα και Νόηση: Επιστημονικές και Φιλοσοφικές προσεγγίσεις*, Αθήνα: Αλεξάνδρεια (σσ. 61-91).

Παγωνδιωτης, Κ. (2001), διδακτορική διατριβή. *Το πρόβλημα των νοητικών αναπαραστάσεων στη γνωσιακή επιστήμη: Προς μια μη-αναπαραστασιακή περιγραφή των νοητικών φαινομένων.*

Peacocke, C. (1992). *A Study of Concepts*. Cambridge, MA: MIT Press.

Peacocke, C. (1998). Implicit Conceptions, the "A Priori" and the Identity of Concepts. *Philosophical Issues*, 9 (Concepts), 121-148.

Prinz, J. J. (2002). *Furnishing the Mind: Concepts and their Perceptual Bases*, Cambridge, MA: MIT Press.

Stich, S. (2006). Propositional Content. Στο E. Lepore & B. Smith, *Oxford handbook of Philosophy of language.* Oxford: OUP.

Η έννοια του αριθμού και ο αριθμός της έννοιας: Μια ανάλυση των *Grundlagen* του Gottlob Frege*

Δημητρα Χριστοπουλου
και Σταθης Ψυλλος**

1. Εισαγωγή

Σε ένα από τα σημαντικότερα και ωραιότερα κείμενα της φιλοσοφίας των μαθηματικών, στο *Die Grundlagen der Arithmetik* (*Τα Θεμέλια της Αριθμητικής*, 1884), ο Gottlob Frege εκθέτει μια συγκεκριμένη φιλοσοφική προσέγγιση για τους φυσικούς αριθμούς αποσκοπώντας στη διόρθωση πολλών –κατά τη γνώμη του– λανθασμένων αντιλήψεων της εποχής του σχετικά με τη φύση της αριθμητικής.

Η αριθμητική, σύμφωνα με τον Frege, έχει θεμελιώδη σημασία γιατί οι νόμοι της είναι κατ' ουσίαν οι νόμοι της σκέψης. Το πεδίο του αριθμήσιμου είναι το ευρύτερο απ' όλα τα πεδία διότι περιλαμβάνει οτιδήποτε μπορεί να νοηθεί. Εάν κανείς απορρίψει κάποιες από τις θεμελιώδεις προτάσεις της αριθμητικής, τότε θα επικρατήσει ολοκληρωτική σύγχυση στην ίδια τη σκέψη. Αυτό τοποθετεί την αριθμητική στο βαθύτερο και πιο θεμελιώδες σημείο από κάθε άλλη επιστήμη καθώς επίσης και από τη γεωμετρία.

Στα *Grundlagen*, ο Frege εκφράζει τη θεμελιώδη σκέψη ότι το περιεχόμενο μιας αριθμητικής πρότασης είναι μια βεβαίωση σχετικά με

* Η έρευνα για το παρόν κείμενο συγχρηματοδοτήθηκε από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και Εθνικούς Πόρους (ΕΠΑΕΚΙΙ) Πυθαγόρας ΙΙ.

** Ο Στάθης Ψύλλος είναι Αναπληρωτής Καθηγητής στο Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Η Δήμητρα Χριστοπούλου είναι μεταδιδακτορική υπότροφος του Ι.Κ.Υ.

μια έννοια (§ 46). Όταν π.χ. διατυπώνουμε την πρόταση «η Αφροδίτη έχει 0 δορυφόρους», εκφράζουμε ένα γεγονός σχετικά με την έννοια «δορυφόρος της Αφροδίτης»· συγκεκριμένα, εκφράζουμε το γεγονός ότι κανένα αντικείμενο δεν υπάγεται στην έννοια αυτή. Ενώ, μέσω της πρότασης «η Γη έχει 1 δορυφόρο» εκφράζουμε το γεγονός ότι ένα ακριβώς αντικείμενο υπάγεται στην έννοια «δορυφόρος της Γης». Στην ίδια παράγραφο, ο Frege εξηγεί ότι στις προτάσεις που αναδεικνύουν τη χρήση του αριθμού σε περιγραφές του ίδιου εξωτερικού φαινομένου, όπως π.χ.: «εδώ βρίσκονται 15 άνθρωποι» και «εδώ βρίσκονται 4 παρέες», αυτό που πραγματικά σηματοδοτεί την αλλαγή είναι η αντικατάσταση μιας έννοιας από μια άλλη. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, οι έννοιες «άνθρωπος» και «παρέα» εναλλάσσονται μεταξύ τους και χαρακτηρίζονται από διαφορετικούς αριθμούς. Συνεπώς, κατά τη διατύπωση μιας αριθμητικής πρότασης, διατυπώνουμε έναν ισχυρισμό για μια έννοια. Σχετικά με αυτόν τον ισχυρισμό, ο Frege μας εφιστά την προσοχή ότι πρόκειται για αντικειμενικό ισχυρισμό, δηλαδή ανεξάρτητο από τους τρόπους που εμείς εξετάζουμε τα πράγματα. Οι έννοιες δεν πρέπει να συγχέονται με τις υποκειμενικές παραστάσεις μας. Η αντικειμενικότητα των εννοιών συνοδεύεται από την αντικειμενικότητα στις μεταξύ τους σχέσεις. Εάν οι έννοιες ήταν υποκειμενικές (όπως οι νοητικές παραστάσεις), τότε η υπαγωγή της μιας στην άλλη θα ήταν επίσης υποκειμενική (§ 47). Αλλά η σχέση υπαγωγής των εννοιών έχει αντικειμενικό χαρακτήρα. Για παράδειγμα, η έννοια «φάλαινα» υπάγεται στην έννοια «θηλαστικό» με τρόπο αντικειμενικό και ανεξάρτητο από την παρατήρηση οποιωνδήποτε και οσωνδήποτε ζώων της συγκεκριμένης κατηγορίας. Συνεπώς, όταν μέσω μιας αριθμητικής πρότασης διατυπώνουμε μια βεβαίωση για μια αντικειμενική έννοια, η πρότασή μας έχει πραγματικό (factual) περιεχόμενο. Θα ήταν επίσης λάθος να θεωρούμε ότι μια έννοια αποκτάται με αφαίρεση από μια σειρά αντικειμένων, διότι μπορούμε να φτάσουμε σε μια έννοια ακόμα και όταν κανένα αντικείμενο δεν υπάγεται σ' αυτήν. Αυτό που, πάντως, αποτελεί ερώτημα σχετικά με μια οποιαδήποτε έννοια είναι το αν κάποιο πράγμα υπάγεται σ' αυτήν (§ 51), διότι σε μια έννοια είναι δυνατόν να εμπίπτουν ή να μην εμπίπτουν αντικείμενα. Για παράδειγμα, η Σελήνη και μόνο υπάγεται στην έννοια «δορυφόρος της Γης». Γι' αυτό και η πρόταση «η Γη έχει 1 δορυφόρο» δηλώνει ότι ένα και μόνο αντικείμενο εμπίπτει στην έννοια «δορυφόρος της Γης». Σύμφωνα λοιπόν με τον Frege, κάθε αριθμητική πρόταση

αποτελεί μια βεβαίωση σχετικά με μια έννοια αλλά και κάθε αριθμός συνδέεται πάντοτε με μια έννοια. Ένας από τους κύριους στόχους αυτής της εργασίας είναι να διασαφηνίσει τον προσδιορισμό του φυσικού αριθμού στα *Grundlagen* ως του «αριθμού της έννοιας F».

Ο Frege αποσκοπεί επίσης να συγκροτήσει την οντολογία της αριθμητικής και να θεμελιώσει την αντικειμενικότητα της αριθμητικής γνώσης. Κινείται, επομένως, ταυτόχρονα στο οντολογικό και στο γνωσιολογικό επίπεδο. Τι είναι οι αριθμοί και πώς εξασφαλίζεται η γνώση τους; Τα δύο αυτά ερωτήματα διαπλέκονται στην προβληματική που αναπτύσσεται στα *Grundlagen*, με τρόπο ασυνήθιστο για τα μέχρι τότε δεδομένα. Ειδικότερα το θέμα της οντολογίας των αριθμών δεν είχε συζητηθεί με τη σαφήνεια που τίθεται από τον Frege. Οι απόψεις που κυριαρχούσαν στην εποχή του για το τι είναι οι αριθμοί δεν απαντούσαν ευθέως στο ερώτημα, έπασχαν δε από γενικότητα και αοριστία. Ήθελαν τους αριθμούς να αποτελούν άλλοτε νοητικές παραστάσεις, ιδέες της ατομικής συνείδησης, υποκειμενικές πεποιθήσεις (ψυχολογισμός), άλλοτε ιδιότητες των φυσικών πραγμάτων και συλλογών (εμπειρισμός), άλλοτε απλά σύμβολα που γράφονταν στο χαρτί (φορμαλισμός) και άλλοτε γενικές εκφράσεις μεγέθους. Από την άλλη πλευρά, επειδή το πρόβλημα της γνώσης ήταν πάντοτε καίριο και φιλοσοφικά επίκαιρο, είχε γίνει αντικείμενο συστηματικού προβληματισμού τόσο γενικότερα όσο και στην ειδικότερη εκδοχή του, δηλαδή την εκδοχή της μαθηματικής γνώσης που ασκούσε μάλιστα έντονο φιλοσοφικό ενδιαφέρον λόγω της βεβαιότητας που έδειχνε να κατέχει. Ο ψυχολογισμός ως κυριαρχούσα τάση εξέταζε τη μαθηματική γνώση ως αποτέλεσμα ψυχολογικών διαδικασιών. Η παράδοση του εμπειρισμού θεωρούσε ότι η γνώση των προτάσεων της αριθμητικής βασίζεται σε εμπειρικά γεγονότα και σε γενικεύσεις. Αντίθετα, η παράδοση του ορθολογισμού αντιμετώπιζε τις αληθείς μαθηματικές προτάσεις ως λογικές και αναγκαίες αλήθειες (π.χ. Leibniz). Ο Kant, από την άλλη πλευρά, είχε εισαγάγει τη γνωστή διάκριση μεταξύ αναλυτικών και συνθετικών προτάσεων και είχε κατατάξει τη μαθηματική γνώση (αριθμητική και γεωμετρική) στην a priori συνθετική γνώση· πίστευε δηλαδή ότι ο νους γνωρίζει την αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων με τη μεσολάβηση των a priori μορφών της καθαρής εποπτείας. Ο Frege ήρθε σε ρήξη με τις αντιλήψεις αυτές, απορρίπτοντας τόσο την προσέγγιση του εμπειρισμού όσο και την καντιανή ερμηνεία των αριθμών ως προϊόντων της σχηματοποίησης και της αριθμητικής γνώσης ως συνθετικής a priori.

Έτσι, ένας δεύτερος στόχος της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει την προσέγγιση των αριθμών από τον Frege ως αντικειμένων και την ερμηνεία της αριθμητικής γνώσης ως γνώσης που θεμελιώνεται στη λογική.

2. Οι προγραμματικές αρχές των *Grundlagen*

Στα *Grundlagen*, ο Frege προσπαθεί να απαντήσει τόσο στο οντολογικό όσο και στο γνωσιολογικό ερώτημα σχετικά με την αριθμητική. Θεμελιώδης στόχος του είναι να εξασφαλίσει την αριθμητική γνώση ως αντικειμενική και να παρουσιάσει τους αριθμούς ως λογικά αντικείμενα. Αλλά προηγουμένως έπρεπε να ξεκαθαρίσει το φιλοσοφικό τοπίο από τις ομιχλώδεις και αόριστες αντιλήψεις που κυριαρχούσαν γύρω από τους αριθμούς και να εξηγήσει τι *δεν* είναι οι αριθμοί. Για τους σκοπούς αυτούς εξέθεσε τρεις βασικές προγραμματικές αρχές:

Α. Διάκριση ψυχολογικού-λογικού, υποκειμενικού-αντικειμενικού

Παρά το γεγονός ότι στους καθημερινούς μας συλλογισμούς το ψυχολογικό και το λογικό συνδέονται πολύ στενά, εάν αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η θεμελίωση της γνώσης, τότε θα πρέπει να διακρίνουμε και να απομονώσουμε το καθαρά λογικό. Πρόθεση του Frege ήταν να αποβληθούν από τη φιλοσοφική και τη λογική έρευνα οι ψυχολογικές μέθοδοι που είχαν παρεισφρύσει. Με βάση την αρχή αυτή, όπως θα δούμε, ο Frege άσκησε κριτική στον ψυχολογισμό, μια τάση με σημαντική επιρροή εκείνη την εποχή. Όμως η αντικειμενικότητα της γνώσης προϋποθέτει επίσης την απαλλαγή από τον υποκειμενισμό. Οι σημασίες των εκφράσεων είναι ανεξάρτητες από τα επιμέρους γνωστικά υποκείμενα και ταυτόχρονα κοινά αναγνωρίσιμες. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να τις διακρίνουμε από τις ατομικές ιδέες και τις υποκειμενικές νοητικές παραστάσεις αν και δεν αποκλείεται να συγκεντρώνουν ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά τους.

Β. Αρχή του πλαισίου

Το νόημα κάθε όρου θα πρέπει πάντοτε να αναζητείται στο πλαίσιο προτάσεων και όχι ανεξάρτητα από αυτές. Κάθε προσπάθεια να προσδιοριστεί το νόημα ανεξάρτητα από το πλαίσιο μιας συγκεκριμένης πρότασης έχει ως αποτέλεσμα τη σύγχυση του νοήματος με τις σχετικές νοητικές εικόνες ή παραστάσεις και, άρα, την παραβίαση της αρχής Α.

Γ. Διάκριση μεταξύ έννοιας και αντικειμένου

Η συγκεκριμένη διάκριση, όπως θα δούμε, αντανακλά τη διάκριση μεταξύ συνάρτησης και ορίσματος.

Με βάση τις τρεις προγραμματικές του αρχές, ο Frege άσκησε δριμύτατη κριτική στις τρέχουσες φιλοσοφικές αντιλήψεις της εποχής του, ιδιαίτερα στον εμπειρισμό, τον ψυχολογισμό και τον υποκειμενισμό.

3. Η κριτική του Frege στις τρέχουσες φιλοσοφικές αντιλήψεις σχετικά με τους αριθμούς

3.1. *Τι δεν είναι οι αριθμοί*

3.1.1. *Αντι-Εμπειρισμός*

Ο Frege εξέφρασε την αντίθεσή του προς τον εμπειρισμό, ιδιαίτερα προς τον εμπειρισμό του Mill, που είχε απήχηση την εποχή που γράφονταν τα *Grundlagen*. Ο Mill υποστήριζε ότι οι αριθμοί, π.χ. τρία, δέκα, είκοσι κ.λπ. δεν συναντώνται ποτέ μόνοι τους αλλά ακολουθούνται πάντοτε από φυσικά αντικείμενα: τρία μήλα, δέκα βότσαλα, είκοσι βιβλία. Οι αριθμητικές προτάσεις στον εμπειρισμό εκφράζουν μια συγκεκριμένη σχέση των αριθμητικών εκφράσεων με τη φυσική πραγματικότητα έτσι ώστε μια αριθμητική έκφραση να συμπεριφέρεται συντακτικά ως επιθετικός προσδιορισμός. Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί αντιμετωπίζονται στη σκέψη του Mill ως ιδιότητες φυσικών πραγμάτων ή φυσικών συλλογών (πρβλ. 1843, III, xxiv, § 5). Οι αριθμητικές προτάσεις δεν περιλαμβάνουν πραγματικές αναφορές σε αριθμούς αλλά μόνο σε εμπειρικά αντικείμενα. Ο Frege διαφώνησε με την ερμηνεία του Mill. Παρατήρησε καταρχήν ότι πολύ συχνά συμβαίνει οι αριθμητικές εκφράσεις να μη συνοδεύουν αισθητά αντικείμενα αλλά αφηρημένα αντικείμενα, όπως π.χ. στις περιπτώσεις «τρεις μέθοδοι επίλυσης» (§ 7), «τρεις θεμελιώδεις αρχές» κ.λπ. Συνεπώς δεν μπορεί να υποστηριχθεί γενικά ότι οι αριθμητικές εκφράσεις *χαρακτηρίζουν* φυσικά αντικείμενα. Όμως υπάρχουν επιπλέον βασικότατοι λόγοι που αποδεικνύουν ότι οι αριθμοί δεν είναι ιδιότητες των φυσικών πραγμάτων, όπως π.χ. είναι το χρώμα (§§ 21-23). Η ιδιότητα ενός χρώματος, π.χ. του κόκκινου, μπορεί να χαρακτηρίζει με σαφή τρόπο την εγκυκλοπαίδεια που έχουμε μπροστά μας αλλά δεν συμβαίνει το ίδιο με μια υποτιθέμενη αριθμητική ιδιότητα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μια φυσική πραγματικότητα, π.χ. ένα φυσικό υλικό ή μια ομάδα πραγμάτων, δεν καθορίζει μονοσήμαντα τον τρόπο με τον οποίο υποδιαιρείται σε μέρη. Γι' αυτό δεν μπορεί να χαρακτηριστεί από έναν μόνο αριθμό. Αναφερόμαστε σε *μία* εγκυκλοπαίδεια ή σε *τριάντα πέντε* τόμους ενώ έχουμε μπροστά μας το ίδιο φυσικό υλικό. Είναι δυνατόν να μιλάμε για *ένα* δεμάτι καλάμια ή για *τριάντα* καλάμια, ενώ αν σπάσουμε τα καλάμια στη μέση, τότε μπορούμε να αναφερθούμε σε *δύο* δεμάτια καλάμια ή σε *εξήντα* καλάμια. Μπορούμε επιπλέον να αναφερθούμε σε *χιλιάδες* μόρια, έχοντας πάντοτε μπροστά μας την ίδια φυσική πραγματικότητα. Σύμφωνα με ένα άλλο παράδειγμα, αναφερόμαστε σε *μία* τράπουλα αλλά και σε *πενήντα δύο* τραπουλόχαρτα, έχοντας και πάλι μπροστά μας την ίδια φυσική πραγματικότητα. Διαφέρει λοιπόν ο τρόπος που εμείς επιλέγουμε να θεωρήσουμε τη δέσμη των παιγνιόχαρτων. Συνεπώς, δεν υπάρχει ένας αλλά πολλοί διαφορετικοί τρόποι να χαρακτηρίσει κανείς αριθμητικά μια φυσική ποσότητα. Οι αριθμοί διαφέρουν από τις ιδιότητες των φυσικών πραγμάτων, αφού ο τρόπος που αυτοί συνδέονται με τα φυσικά πράγματα εξαρτάται από τον διαφορετικό τρόπο θεώρησης των πραγμάτων αυτών. Όπως από την αρχή επισημάνθηκε, ο τρόπος αυτός συνδέεται πάντοτε με μια έννοια στην οποία εμπίπτουν ή δεν εμπίπτουν κάποια πράγματα. Επιπλέον, στις §§ 24-25, ο Frege τόνισε ότι οι αριθμοί δεν είναι οι ίδιοι αισθητά αντικείμενα. Αυτό αποδεικνύεται από το γεγονός ότι είναι δυνατή μια διαφοροποίηση ως προς τον αριθμό, χωρίς αντίστοιχη διαφοροποίηση ως προς το φυσικό υλικό, όπως στο παράδειγμα «*δύο* μπότες», «*ένα* ζευγάρι μπότες». Ένα ζευγάρι μπότες ως ορατό και απτό φαινόμενο είναι ακριβώς το ίδιο με δύο μπότες. Εδώ υπάρχει μια διαφορά ως προς τον αριθμό αλλά καμία φυσική διαφορά.

3.1.2. *Αντι-Ψυχολογισμός*

Μια άλλη τάση της εποχής του προς την οποία ο Frege στάθηκε πολέμιος ήταν ο ψυχολογισμός. Ο Frege άσκησε κριτική στις απόψεις του ψυχολογισμού σύμφωνα με τις οποίες οι αριθμοί είναι νοητικές παραστάσεις, δηλαδή υποκειμενικές καταστάσεις. Χρησιμοποίησε δηλαδή

την προγραμματική αρχή (Α) υποστηρίζοντας ότι πρέπει να διακρίνουμε το λογικό από το ψυχολογικό και το αντικειμενικό από το υποκειμενικό. Αν ο αριθμός 5 ήταν νοητική παράσταση τότε ο καθένας από εμάς θα σχημάτιζε μια διαφορετική παράσταση γι' αυτόν. Μια νοητική παράσταση είναι δυνατόν να διαφέρει, όμως, και στο ίδιο υποκείμενο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Κάτι τέτοιο συμβαίνει, για παράδειγμα, με τη νοητική παράσταση του Πήγασου που είναι διαφορετική σε πολλούς ανθρώπους αλλά και στον ίδιο άνθρωπο σε διαφορετικές στιγμές της ζωής του. Η αριθμητική, όμως, μελετά τους ίδιους τους αριθμούς και όχι τις αναπαραστάσεις τους, όπως και η αστρονομία στοχεύει στη μελέτη των ίδιων των πλανητών και όχι των αναπαραστάσεών τους στη σκέψη.

Εκφράζοντας τον αντι-ψυχολογισμό του, ο Frege υποστήριξε ότι οι ψυχολογικές μέθοδοι παρείσφρυσαν στα φιλοσοφικά επιχειρήματα προκαλώντας τη δυσφορία των μαθηματικών (1884, ελλην. μετάφρ. 1990, 67). Όμως η διερεύνηση των μαθηματικών ιδεών και των μεταβολών που αυτές υπέστησαν μέσα στους αιώνες της μαθηματικής ιστορίας είναι ένα θέμα στο οποίο η ψυχολογία μπορεί να συνεισφέρει αλλά το οποίο δεν έχει καμία σχέση με τη θεμελίωση των μαθηματικών κλάδων. Ο τρόπος προέλευσης μιας νοητικής παράστασης σε καμία περίπτωση δεν συνιστά ορισμό και η αλήθεια μιας πρότασης σε καμία περίπτωση δεν σταματά να ισχύει όταν δε τη σκεφτόμαστε (όπ.π., 68). Μερικές φορές, στα μαθηματικά εγχειρίδια, ο συγγραφέας αισθάνεται υποχρεωμένος να περιγράψει τους τρόπους με τους οποίους οι άνθρωποι έχουν οδηγηθεί σε μια συγκεκριμένη έννοια. Τότε, για διδακτικούς και μόνο λόγους, οι ψυχολογικές περιγραφές αποδεικνύονται χρήσιμες, όμως οι περιγραφές αυτές πρέπει να διακρίνονται με σαφήνεια από τους ορισμούς των εννοιών. Η ψυχολογική προσέγγιση μπορεί να αναζητά τους τρόπους δημιουργίας και εξέλιξης των σκέψεών μας για ένα επιστημονικό αντικείμενο με βάση τη φύση του νου, αλλά αυτό που πρέπει να μας ενδιαφέρει είναι η σταθερότητα των εννοιών στο καθαρό τους σχήμα έτσι όπως αποκρυσταλλώνεται μόνο «*ύστερα από τεράστια διανοητική προσπάθεια –η οποία μπορεί να κρατήσει και αιώνες– και μετά από την απομάκρυνση των άσχετων παραφυάδων που την καλύπτουν από τα μάτια του νου*» (όπ.π., 69). Συνεπώς, η διάκριση των ψυχολογικών στοιχείων από τη λογική θεμελίωση είναι ένα κρίσιμο σημείο για τη φιλοσοφία.

3.1.3. *Αντι-Ιδεαλισμός*

Το υποκειμενικό στοιχείο έπρεπε να αποβληθεί εντελώς από τη φιλοσοφική προσέγγιση της αριθμητικής. Οι αριθμοί δεν αποτελούν ατομικές ιδέες. Η σημασία των αριθμητικών όρων είναι ανεξάρτητη από τα επιμέρους υποκείμενα που τη συλλαμβάνουν. Γενικότερα, οι σημασίες των εκφράσεων, σύμφωνα με τον Frege, έχουν αντικειμενικό χαρακτήρα, ίσως ακόμα και αντικειμενική υπόσταση. Διακρίνονται από τις ατομικές ιδέες αν και δεν αποκλείεται να συγκεντρώνουν κάποια από τα κοινά και σταθερά χαρακτηριστικά των επιμέρους ατομικών ιδεών. Μπορούν επίσης να συλληφθούν από κάθε άνθρωπο. Η διυποκειμενικότητα στην αριθμητική γνώση και στη γνώση γενικότερα θεμελιώνεται ακριβώς στην απομάκρυνση των ψυχολογικών και των εξατομικευτικών στοιχείων από τις σημασίες των αριθμητικών εκφράσεων.

Το ότι ο αριθμός δεν συνιστά αισθητό αντικείμενο, ιδιότητα φυσικού αντικειμένου ή νοητική παράσταση σήμαινε κάτι πολύ ενδιαφέρον για τη δεδομένη χρονική περίοδο, δηλαδή ότι ο Frege απέρριπτε τη θεώρηση των αριθμών ως προϊόντων της a posteriori εποπτείας. Ο αριθμός δεν θεμελιώνεται ούτε στην αισθητηριακή αντίληψη ούτε, γενικότερα, στην εμπειρία. Αλλά ο αριθμός δεν είναι και προϊόν της a priori καθαρής εποπτείας. Ο Frege αντιτάχθηκε επίσης σε μια άλλη τρέχουσα αντίληψη της εποχής του, που προερχόταν αυτή τη φορά από τον Kant (1787, Α΄, εισαγ. ελλην. μετάφρ., 84-91). Σύμφωνα με την καντιανή αντίληψη, οι αριθμοί αποτελούν κατά κάποιον τρόπο προϊόντα της a priori καθαρής εποπτείας. Ο Kant πίστευε ότι η νόηση δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό ενός αριθμού, διότι οι αριθμοί μας *δίνονται* μέσω της σχηματοποίησης. Για να υπάρξει ωστόσο σχηματοποίηση, προϋποτίθεται η συμβολή τόσο της νόησης όσο και της a priori καθαρής εποπτείας του χρόνου. Έτσι, ο Kant υποστήριζε ότι προσεγγίζουμε τους αριθμούς με τη συνεργασία της νόησης και της a priori εποπτείας. Ο Frege αντιτάχθηκε και σ' αυτή την εξήγηση, θεωρώντας ότι η νόηση είναι επαρκής για τον προσδιορισμό των αριθμών. Η αντικειμενικότητα των αριθμών δεν θεμελιώνεται ούτε στις αισθητηριακές εντυπώσεις και στην εμπειρία αλλά ούτε και στην καντιανή εποπτεία. Βασίζεται μόνο στον Λόγο.

3.2. *Τι δεν είναι η αριθμητική γνώση*

3.2.1. *A posteriori*

Ανάλογη ήταν και η κριτική που άσκησε ο Frege στις τρέχουσες αντιλήψεις σχετικά με την αριθμητική γνώση. Καταρχήν, απέρριψε την εμπειρική (a posteriori) γνώση των αληθειών της αριθμητικής, διαφωνώντας με τον εμπειρισμό. Ο Mill (1843, II, vi, §§ 2-3), για παράδειγμα, θεωρούσε ότι οι προτάσεις της αριθμητικής επιβεβαιώνονται εμπειρικά και ότι ακόμα και οι ορισμοί των αριθμών δεν συνιστούν ορισμούς με τη λογική έννοια αλλά βεβαιώνουν φυσικά γεγονότα. Αλλά ο Frege (*Grundlagen*, § 7) θέτει το εύλογο ερώτημα: ποιο είναι άραγε το φυσικό γεγονός που βεβαιώνεται από τον αριθμό 777864; Το ίδιο ερώτημα, άλλωστε, τίθεται προς τους εμπειριστές, για τους αριθμούς 0 ή 1. Επιπλέον, ο Mill υποστήριζε ότι οι αριθμητικοί υπολογισμοί συνδέονται πάντοτε με φυσικά γεγονότα, όπως π.χ. στην περίπτωση «δύο βότσαλα + τρία βότσαλα = πέντε βότσαλα». Αλλά εάν ήταν έτσι, τότε δεν είναι σαφές το πώς θα μπορούσε κάποιος να κάνει υπολογισμούς με ιδιαίτερα μεγάλους αριθμούς, π.χ. της τάξης των δεκάκις δισεκατομμυρίων. Γενικότερα, η ύλη του σύμπαντος δεν θα ήταν αρκετή για να συνοδεύσει καθέναν από τους φυσικούς αριθμούς (τους οποίους τα αξιώματα Peano περιγράφουν) με αντίστοιχα φυσικά αντικείμενα ή γεγονότα. Το λάθος του Mill, σύμφωνα με τον Frege (§ 9), είναι ότι συγχέει τις εφαρμογές μιας αριθμητικής πράξης που είναι συχνά φυσικές εφαρμογές με τη λογική σημασία της αριθμητικής πράξης. Η ίδια η πρόσθεση δεν αντιστοιχεί κατ' ανάγκη σε φυσική σχέση παρά το γεγονός ότι πολλές από τις εφαρμογές της αντιστοιχούν σε διαδικασίες άθροισης μερών φυσικών πραγμάτων. Ιδιαίτερη κριτική άσκησε ο Frege (§ 10) στην άποψη του Mill ότι αριθμητικές προτάσεις, όπως π.χ. «5 + 2 = 7», αποτελούν επαγωγικές αλήθειες που έχουν το status ανώτερου φυσικού νόμου. Κατά τη γνώμη του, η μέθοδος της επαγωγής στην περίπτωση των αριθμητικών νόμων δεν μπορεί να αποδώσει, δεδομένου ότι οι αριθμοί δεν παρουσιάζουν την ομοιομορφία εκείνη που χαρακτηρίζει άλλες περιοχές και που παρέχει αξιοπιστία στην επαγωγική διαδικασία.

Ο Frege εδώ επικαλείται την άποψη του Leibniz ότι οι αριθμοί έχουν το χαρακτηριστικό να είναι ανόμοιοι. Δεν είναι απλώς άνισοι στο μέγεθος αλλά και ανόμοιοι, π.χ. οι άρτιοι μπορούν να διαιρεθούν σε δύο ίσα μέρη, το 3 και το 6 είναι τριγωνικοί αριθμοί, το 8 κυβικός αριθμός κ.λπ. Δύο οποιαδήποτε πράγματα μπορεί να είναι άνισα στο μέγεθος αλλά να παρουσιάζουν ομοιότητα, π.χ. δύο σχήματα που είναι άνισα μπορούν να είναι όμοια μεταξύ τους, αλλά δύο άνισοι αριθμοί ποτέ δεν μπορούν να είναι όμοιοι. Επίσης, ο Frege πιστεύει ότι την επαγωγική γενίκευση στην περίπτωση των αριθμών αποτρέπει εξίσου και η χωροχρονική απομόνωση των αριθμών, διότι στις συνήθεις επαγωγικές γενικεύσεις επικαλούμαστε τη θέση των πραγμάτων στο χώρο και το χρόνο. Ο κυριότερος λόγος, όμως, για τον οποίο οι αριθμητικές αλήθειες δεν πρέπει να θεωρούνται αποτέλεσμα επαγωγικής γενίκευσης είναι ότι η επαγωγή βασίζεται στη θεωρία πιθανοτήτων, αφού δεν μπορεί παρά να αποδείξει μια πρόταση ως τίποτα περισσότερο από πιθανή. Όμως η ίδια η θεωρία πιθανοτήτων βασίζεται στους αριθμητικούς νόμους, συνεπώς η διαδικασία της επαγωγικής γενίκευσης προϋποθέτει αλλά δεν δικαιολογεί τους αριθμητικούς νόμους.

Τα επιχειρήματα του Frege που προαναφέρθηκαν, και ιδιαίτερα το τελευταίο, αποσκοπούν στο να τονίσουν την a priori προέλευση της αριθμητικής γνώσης. Η παράδοση του εμπειρισμού, στην εκδοχή του εμπειρισμού του Mill όπως και αργότερα στην εκδοχή του νατουραλισμού του Quine, χαρακτηρίζει την αριθμητική γνώση ως a posteriori. Έτσι, είτε αυτή η γνώση θεωρηθεί αποτέλεσμα επαγωγικής γενίκευσης (όπως υποστήριζε ο Mill) είτε θεωρηθεί ότι συναποτελεί μαζί με τη γνώση των φυσικών νόμων έναν ενιαίο ιστό πεποιθήσεων (όπως υποστήριζε ο Quine), συνιστά προϊόν της εμπειρίας και υπόκειται σε εμπειρικό έλεγχο. Η άποψη του Frege είναι εντελώς διαφορετική από τις προηγούμενες, αφού γι' αυτόν η γνώση της αριθμητικής δεν εμπεριέχει κανένα εμπειρικό στοιχείο και δεν είναι αναθεωρήσιμη με βάση οποιαδήποτε εμπειρία. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο, έχει ιδιαίτερη σημασία το ενδιαφέρον του για την εφαρμοσιμότητα της αριθμητικής. Αφού η αριθμητική δεν προέρχεται από την εμπειρία, πώς είναι δυνατή η εφαρμογή της στην εμπειρική πραγματικότητα, και μάλιστα με τη γνωστή επιτυχία; Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι ο Frege αποδεσμεύει το θέμα της εφαρμοσιμότητας αφενός από το εμπειρικό περιεχόμενο της γνώσης και αφετέρου και από την καθαρή μορφή της εποπτείας, ερχόμενος σε αντιπαράθεση και με τον Kant.

3.2.2. *Συνθετική*

Τόσο στην παράδοση του εμπειρισμού όσο και στην καντιανή παράδοση, η εφαρμοσιμότητα ενός επιστημονικού πεδίου, π.χ. της αριθμητικής, προϋποθέτει τη *συνθετικότητα*. Η συνθετικότητα των προτάσεων αυτών στον εμπειρισμό έγκειται στο εμπειρικό τους περιεχόμενο, γι' αυτό και χαρακτηρίζονται ως συνθετικές a posteriori. Από την άλλη πλευρά, η συνθετικότητα των μαθηματικών προτάσεων στον Kant έγκειται στο ότι αυτές φέρουν ένα ουσιαστικό περιεχόμενο που καθορίζεται από τις a priori μορφές της καθαρής εποπτείας (1787, Α', εισαγ. ελλην. μετάφρ., 84-91). Έτσι, οι δυνατότητες εφαρμογής της αριθμητικής εξηγούνται στο καντιανό σύστημα με βάση το a priori συνθετικό status των αριθμητικών προτάσεων. Όμως, παρά το γεγονός ότι ο Frege διατήρησε τις διακρίσεις συνθετικού – αναλυτικού και a posteriori - a priori στη φιλοσοφία του, επαναδιατύπωσε τις έννοιες της συνθετικότητας και της αναλυτικότητας και, σε αντίθεση με τον Kant, κατέταξε τις προτάσεις της καθαρής αριθμητικής στις αναλυτικές a priori προτάσεις. Οι αριθμητικές προτάσεις για τον Frege είναι απαλλαγμένες από κάθε συνθετικό περιεχόμενο· παρ' όλα αυτά, είναι εφαρμόσιμες στον κόσμο ακριβώς γιατί εκφράζουν γεγονότα σχετικά με έννοιες. Όπως προαναφέρθηκε, σύμφωνα με τη θεμελιώδη σκέψη του Frege, η αριθμητική πρόταση «ο αριθμός των δορυφόρων της Γης είναι ο 1» είναι εφαρμόσιμη στον κόσμο μας επειδή εκφράζει μια αντικειμενική αλήθεια σχετικά με την έννοια «δορυφόρος της Γης». Συνεπώς, έχει σημασία η διαπίστωση ότι η φιλοσοφία του Frege προκαλεί ρήξη με την προηγούμενή του φιλοσοφική παράδοση ως προς το σημείο αυτό, αφού η δυνατότητα εφαρμογής της αριθμητικής δεν προϋποθέτει τη συνθετικότητα ούτε στην εμπειρική ούτε στην καντιανή της μορφή αλλά προϋποθέτει την εφαρμοσιμότητα των εννοιών.

Αλλά ας δούμε πώς ακριβώς μεταβλήθηκε η έννοια της αναλυτικότητας. Ο Kant θεωρούσε αναλυτικές τις προτάσεις στις οποίες η έννοια του κατηγορήματος εμπεριέχεται στην έννοια του υποκειμένου. Ο Frege θεώρησε αυτό το κριτήριο ως ικανό αλλά όχι αναγκαίο για την αναλυτικότητα, επειδή μια πρόταση μπορεί κάλλιστα να είναι αναλυτική χωρίς η έννοια του κατηγορήματος να εμπεριέχεται στην έννοια του υποκειμένου. Η αναλυτικότητα, σύμφωνα με τον Frege, ορίζεται διαφορετικά: μια πρόταση είναι αναλυτική εάν μπορεί να παραχθεί από λογικές αλήθειες μέσω γενικών νόμων της λογικής και ορισμών, ενώ είναι συνθετική στην αντίθετη περίπτωση. Όπως προαναφέρθηκε, ο Frege απέρριψε καταρχήν την περίπτωση του a posteriori status για τις προτάσεις της αριθμητικής. Του απέμεναν λοιπόν άλλες δύο δυνατότητες: το να θεωρήσει τις προτάσεις αυτές ως a priori αναλυτικές ή το να τις θεωρήσει ως a priori συνθετικές, όπως πίστευε ο Kant. Ο Kant είχε κατατάξει τις αριθμητικές και τις γεωμετρικές προτάσεις στις συνθετικές a priori. Υποστήριζε μάλιστα ότι προτάσεις όπως π.χ. «2 + 2 = 4» είναι συνθετικές και παρουσιάζουν προφάνεια μέσω της εποπτείας (όπ.π., 88). Ο Frege στα *Grundlagen* (§ 5) εξέφρασε επιφυλάξεις σχετικά με αυτόν τον ισχυρισμό, θέτοντας το ερώτημα κατά πόσον θα μπορούσε να ισχυριστεί κάποιος το ίδιο για μια πρόταση με μεγάλους αριθμούς, όπως η «135664 + 37863 = 173527». Διότι εάν υποτεθεί ότι καταφεύγει κανείς στην εποπτεία 37863 δαχτύλων, τότε η εποπτεία αυτή δεν θα ήταν ούτε *κατάλληλη* ούτε *καθαρή* εποπτεία. Αντίθετα, θα οδηγούσε σε μια εμπειρική προσέγγιση των προτάσεων αυτών με την οποία ο ίδιος ο Kant ασφαλώς δεν θα ήταν ικανοποιημένος, διότι θα ερχόταν σε αντίθεση προς τις αρχές του. Γι' αυτό ο Frege συμπεραίνει ότι ο Kant είχε υπ' όψιν του μικρούς αριθμούς όταν θεωρούσε ανάλογες προτάσεις ως συνθετικές και συγχρόνως προφανείς μέσω της εποπτείας. Κάτι τέτοιο, βέβαια, προϋποθέτει ότι είναι δυνατή μια διάκριση μεταξύ μικρών και μεγάλων αριθμών, το οποίο γενικά δεν ισχύει. Ιδιαίτερα, πιστεύει ότι η έννοια της εποπτείας όπως τη χρησιμοποιούσαν πολλοί σύγχρονοί του φιλόσοφοι (ερμηνεύοντας τον Kant) είναι ασαφής έννοια. Για παράδειγμα, ο Hankel (*Theorie der Complexen Zahlensysteme*) για να δικαιολογήσει την προφάνεια των αριθμητικών αληθειών, αναφερόταν στην «καθαρή εποπτεία του μεγέθους» θεωρώντας ότι οι αληθείς αριθμητικές προτάσεις ισχύουν για τα μεγέθη κάθε περιοχής. Ο Frege θεωρούσε ασαφή την έννοια αυτή και παρατήρησε (§ 12) δηκτικά ότι είναι εύκολο να καταφεύγει κανείς στην εσωτερική εποπτεία όταν δεν καταφέρνει να θεμελιώσει τη γνώση. Συνεπώς, κρατώντας αποστάσεις από τον Kant, όπως είχε κάνει και στην περίπτωση του Mill, ο Frege απέρριψε το συνθετικό a priori για την περίπτωση της αριθμητικής και κατέταξε τις αριθμητικές αλήθειες στις a priori αναλυτικές. Κατ' αυτή την έννοια, σε σχέση με τις μέχρι τότε φιλοσοφικές παραδόσεις ως προς το status των αληθών προτάσεων της αριθμητικής, ο Frege βρίσκεται πλησιέστερα προς τον Leibniz, ο οποίος τις αντιμετώπιζε ως αλήθειες του Λόγου. Τη συμφωνία του με τον Leibniz εκφράζει ρητά (§ 6), άλλωστε, όταν αναφέρεται στη δυνατότητα απόδειξης των αριθμητικών τύπων στη βάση γενικών νόμων. Με βάση τον ορισμό της αναλυτικότητας του Frege, το γεγονός ότι οι προτάσεις της αριθμητικής είναι αναλυτικές σημαίνει ότι η αλήθειά τους ανάγεται σε λογικές αλήθειες και λογικούς νόμους. Η γνώση τους ανάγεται στη λογική, γι' αυτό και συνιστά a priori γνώση.

Η καθολικότητα του εύρους των αναλυτικών αριθμητικών προτάσεων είναι ερμηνεύσιμη με βάση το ότι απορρέει από τον θεμελιώδη χαρακτήρα των λογικών αληθειών. Οι λογικές αλήθειες έχουν μια ιδιαίτερη θέση στη σκέψη, δεδομένου ότι κάθε προσπάθεια να αρνηθούμε την αλήθειά τους προσκρούει στο νόμο της μη αντίφασης. Επίσης έχουν καθολική εφαρμογή αφού το πεδίο τους περιλαμβάνει *κάθε τι νοητό*. Εδώ πρέπει να υπενθυμίσουμε την άποψη του Frege (§ 14) ότι το πεδίο του αριθμήσιμου είναι το ευρύτερο απ' όλα τα πεδία διότι περιλαμβάνει *κάθε τι που μπορεί να νοηθεί* και ότι οι νόμοι της αριθμητικής είναι πολύ στενά συνδεδεμένοι με τους νόμους της (λογικής) σκέψης. Αυτό συμβαίνει επειδή οι αλήθειες της αριθμητικής απορρέουν από τη λογική. Όπως θα δούμε, δεν αποτελεί σύμπτωση το γεγονός ότι ο ίδιος εκφράζεται για το πεδίο του αριθμήσιμου με τον ίδιο τρόπο που εκφράζεται για τις λογικές αλήθειες.

4. Η λογική προέλευση της γνώσης των αριθμητικών ταυτοτήτων

Μετά την κριτική του προς τις τρέχουσες φιλοσοφικές αντιλήψεις για την αριθμητική, ο Frege προχώρησε στην παρουσίαση και δικαιολόγηση της οντολογικής θέσης ότι οι αριθμοί είναι λογικά αντικείμενα και της γνωσιολογικής θέσης ότι οι αλήθειες της αριθμητικής ανάγονται στη λογική.

4.1. *Έννοια και αντικείμενο*

Προσπάθησε καταρχήν να αποσαφηνίσει την πραγματική φύση του αριθμού με βάση μια θεμελιώδη στη φιλοσοφία του σχέση, τη σχέση μεταξύ αντικειμένου και έννοιας, που είναι αντίστοιχη με τη σχέση μεταξύ ορίσματος και συνάρτησης. Πρόκειται για την προγραμματική αρχή (Γ). Οι έννοιες είναι συναρτησιακοί μηχανισμοί και αυτός είναι ο λόγος που αναπαριστώνται στη γλώσσα με ακόρεστες εκφράσεις της μορφής F( ). Αντιθέτως, τα αντικείμενα είναι πλήρεις οντότητες που αναπαριστώνται στη γλώσσα με κορεσμένες εκφράσεις, δηλαδή τους ενικούς όρους. Το όνομα ενός αντικειμένου συμπληρώνει το κενό σε μια ακόρεστη έκφραση με τέτοιον τρόπο ώστε να προκύψει μια πρόταση με συγκεκριμένη αληθοτιμή. Αν π.χ. στην ακόρεστη έκφραση *__είναι δορυφόρος της Γης*, συμπληρώσουμε το κενό με το όνομα «Σελήνη» τότε προκύπτει μια αληθής πρόταση.

Στη διάκριση μεταξύ αντικειμένων και εννοιών, οι επιμέρους φυσικοί αριθμοί θεωρούνται αντικείμενα. Όμως οι αριθμοί-αντικείμενα συνδέονται πάντοτε με μια έννοια: ένας αριθμός *ανήκει* σε μια έννοια F. Ας σημειωθεί ότι η έκφραση *ο αριθμός* __ *ανήκει στην έννοια F* χρειάζεται να συμπληρωθεί με το όνομα κάποιου αντικειμένου, στην προκειμένη περίπτωση με το όνομα ενός φυσικού αριθμού. Έτσι, ο αριθμός 1 *ανήκει* στην έννοια «δορυφόρος της Γης» ή σύμφωνα με μια άλλη διατύπωση, ο 1 *είναι* ο αριθμός της έννοιας «δορυφόρος της Γης». Κάθε φυσικός αριθμός συνδέεται πάντοτε με μια έννοια με τέτοιον τρόπο ώστε να εκφράζει ένα γεγονός σχετικό με την έννοια αυτή. Συγκεκριμένα, αναδεικνύει πόσα πράγματα εμπίπτουν στην έννοια, άρα η προσέγγιση του φυσικού αριθμού στα *Grundlagen* είναι αυτή του πληθυντικού αριθμού.

4.2. Οι αριθμοί ως αντικείμενα

Στην § 57, ο Frege χαρακτηρίζει ευθέως τους αριθμούς ως *αυθυπόστατα αντικείμενα*. Είναι ίσως η πρώτη φορά που γίνεται ρητά η δήλωση αυτή για τους αριθμούς. Οι αριθμοί αποκτούν –χάρη στον Frege– υπόσταση αντικειμένου. Όμως, αυτό είναι κάτι που υποδηλώνει και η ίδια η συντακτική θέση των αριθμητικών όρων στις προτάσεις της αριθμητικής. Αν και στην καθημερινότητα χρησιμοποιούμε προτάσεις όπου οι αριθμητικοί όροι φαίνεται εκ πρώτης όψεως να έχουν θέση επιθετικού προσδιορισμού (όπως ο εμπειρισμός υποστηρίζει), αυτό μπορεί να αλλάξει με κατάλληλη επαναδιατύπωση των προτάσεων αυτών. Στη νέα διατύπωση, οι αριθμητικοί όροι έχουν θέση ονόματος, δηλαδή ενικού όρου. Σύμφωνα με ένα παράδειγμα που χρησιμοποιεί ο ίδιος, η πρόταση «ο Δίας έχει 4 δορυφόρους» μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως «ο 4 είναι ο αριθμός των δορυφόρων του Δία». Η λέξη «*είναι*» στην τελευταία πρόταση δεν είναι ένα απλό συνδετικό μεταξύ του υποκειμένου και του κατηγορουμένου αλλά σημαίνει «*είναι ταυτόσημος με*». Το γεγονός ότι οι αριθμητικές εκφράσεις μπορούν να πάρουν θέση ονομάτων, δηλαδή ενικών όρων, στις αριθμητικές προτάσεις αποτελεί ένδειξη για το ότι οι αριθμοί είναι αντικείμενα. Αυτό άλλωστε υπαινίσσεται και η παρουσία του οριστικού άρθρου πριν από τον αριθμητικό όρο.

Στην προσέγγιση του Frege, η σύνταξη υποδεικνύει τη δυνατή παρουσία αντικειμένων, αφού αντικείμενο είναι η δυνατή ή ενεργεία αναφορά ενός ενικού όρου. Η διαπίστωση της εμφάνισης ενικών όρων

μέσα σε ατομικές[1] προτάσεις είναι πρότερη κάθε οντολογικού ισχυρισμού περί ύπαρξης αντικειμένων. Στην περίπτωση αυτή, το συντακτικό επίπεδο έχει προτεραιότητα έναντι του οντολογικού. Πρόκειται για την αρχή της *συντακτικής προτεραιότητας* στην οποία αναφέρεται χαρακτηριστικά ο Crispin Wright (1983, 25): «*για τον Frege, είναι η συντακτική κατηγορία που βρίσκεται σε προτεραιότητα ενώ η οντολογική ακολουθεί*». Σύμφωνα με την ίδια ανάγνωση, ωστόσο, η σύνταξη δεν επαρκεί από μόνη της για να δικαιολογήσει την ύπαρξη αντικειμένων εάν δεν εξασφαλιστεί επίσης η αλήθεια των εν λόγω προτάσεων. Η συντακτική λειτουργία των ενικών όρων πρέπει να συνδυάζεται με την αλήθεια των προτάσεων στις οποίες οι ενικοί όροι εμφανίζονται, για να οδηγηθούμε σε ένα οντολογικό συμπέρασμα για την ύπαρξη αντικειμένων. Εάν συγκεκριμένες εκφράσεις λειτουργούν ως ενικοί όροι μέσα σε αληθείς προτάσεις, τότε υπάρχουν πραγματικά αντικείμενα που είναι τα αντικείμενα αναφοράς αυτών των ενικών όρων. Συνεπώς, η σύνταξη μαζί με την αλήθεια μάς καθοδηγούν σε απαντήσεις σχετικά με την ύπαρξη οντοτήτων του κόσμου. Η σχέση γλώσσας και πραγματικότητας στην παρούσα προσέγγιση είναι τέτοια ώστε η συντακτική δομή των αληθών μας προτάσεων να μην μπορεί να μας εξαπατήσει και η πραγματικότητα να μην αποτυγχάνει στη συμπερίληψη όλων αυτών των οντοτήτων που οι (αληθείς) προτάσεις μας περιγράφουν (πρβλ. MacBride 2003, 108). Επομένως, κάθε οντολογικό ερώτημα και κάθε οντολογική θέση (είτε αφορά αφηρημένα αντικείμενα είτε φυσικά αντικείμενα) τίθεται στη βάση της συντακτικής δομής αληθών προτάσεων. Στη βάση αυτή στηρίζεται ο μαθηματικός πλατωνισμός του Frege.

4.3. Πώς μας δίνονται οι αριθμοί;

Εάν οι αριθμοί είναι μη αισθητά και μη χωροχρονικά αντικείμενα για τα οποία δεν διαθέτουμε ούτε αισθητηριακή πρόσληψη ούτε νοητικές παραστάσεις, όπως επισημάνθηκε στην κριτική του Frege προς τον εμπειρισμό, τότε θα πρέπει να υπάρχει κάποιος άλλος τρόπος ώστε οι αριθμοί να *δίνονται* σε μας. Στην § 60, γίνεται η επισήμανση ότι το γεγονός ότι δεν μπορούμε να σχηματίσουμε μια οποιαδήποτε νοητική παράσταση για μια λέξη δεν σημαίνει καθόλου ότι πρέπει να αρνηθού-

1. Ατομικές προτάσεις: οι προτάσεις που δεν εμπεριέχουν άλλες προτάσεις.

με ένα νόημα στη λέξη αυτή. Το να απομονώσουμε μία λέξη και να αναζητούμε για το περιεχόμενό της μια νοητική παράσταση είναι λάθος, γιατί το νόημα δεν ταυτίζεται ούτε με κάποια νοητική παράσταση ούτε με μια ατομική ιδέα. *Οι λέξεις έχουν νόημα μόνο στο πλαίσιο μιας πρότασης*. Είναι φανερό ότι στο σημείο αυτό ο Frege διατυπώνει την αρχή του πλαισίου για να τη χρησιμοποιήσει στη συνέχεια στην περίπτωση των αριθμών. Έτσι, στην § 62, ο ίδιος αναφέρει πως το γεγονός ότι δεν διαθέτουμε καμιά a posteriori ή a priori εποπτεία για έναν αριθμό δεν συνιστά εμπόδιο για να τον θεωρήσουμε ως αυθυπόστατο αντικείμενο. Και δεν συνιστά εμπόδιο, διότι η αναφορά ενός αριθμητικού όρου δεν είναι κάτι που προσδιορίζεται μέσω της εμπειρίας ή μέσω της εποπτείας αλλά στο πλαίσιο μιας αληθούς πρότασης. Αυτό που πρέπει να τονιστεί, επομένως, είναι ότι οι αριθμητικές εκφράσεις, όπως π.χ. «ο αριθμός των δορυφόρων του Δία», συμπεριφέρονται ως ενικοί όροι μέσα σε κατάλληλες αληθείς προτάσεις. Ο συνδυασμός των δύο αυτών προϋποθέσεων, δηλαδή της σύνταξης και της αλήθειας, μας δεσμεύει στην ύπαρξη των αριθμών, ως αντικειμένων αναφοράς των αριθμητικών ενικών όρων.

Ωστόσο, το ερώτημα που τίθεται εδώ είναι ποιες προτάσεις θεωρούνται κατάλληλες για τον προσδιορισμό της αναφοράς των αριθμητικών όρων. Ο Frege τονίζει ότι πρέπει να *αναγνωρίζουμε* έναν αριθμό ως το ίδιο αντικείμενο, κάθε φορά που τον συναντούμε. Συνεπώς, οι καταλληλότερες προτάσεις που μπορούν να λειτουργήσουν ως *αναγνωριστικές* του αριθμού είναι οι αριθμητικές ταυτότητες. Καμία οντότητα δεν στερείται ταυτότητας, όπως θα σχολίαζε αργότερα και ο Quine. Αρκεί λοιπόν να γνωρίζουμε πότε μια ταυτότητα της μορφής «ο αριθμός της έννοιας F είναι ο ίδιος με τον αριθμό της έννοιας G» είναι αληθής. Τότε όμως χρειαζόμαστε την αναγκαία και ικανή συνθήκη για την αλήθεια της αριθμητικής ταυτότητας· με άλλα λόγια, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο ταυτότητας.

Στην § 63, ο Frege υπενθυμίζει ένα σχόλιο του Hume, σύμφωνα με το οποίο η ταυτότητα των αριθμών οφείλει να εκφράζεται με όρους 1-1 αντιστοιχίας, δηλαδή δύο αριθμοί είναι ίσοι όταν ο καθένας τους έχει πάντοτε μια μονάδα που αντιστοιχεί σε μια μονάδα του άλλου. Την παρατήρηση αυτή θα αξιοποιήσει ο Frege για να διατυπώσει ένα κριτήριο ταυτότητας για τους αριθμούς. Προηγουμένως όμως (§§ 63-67) εισάγει παραδείγματα αρχών που παίζουν το ρόλο κριτηρίων ταυτότητας σχετικά με τις διευθύνσεις ευθειών και τα σχήματα τριγώνων:

«Η διεύθυνση της ευθείας a είναι η ίδια με τη διεύθυνση της ευθείας b αν και μόνο αν οι ευθείες a, b είναι παράλληλες.»

$$(\forall a)(\forall b)\ [(D(a) = D(b)) \leftrightarrow (a//b)]$$

(γνωστή ως ισοδυναμία D=).

Επίσης,

«Το σχήμα του τριγώνου ΑΒΓ είναι το ίδιο με το σχήμα του τριγώνου ΔΕΖ αν και μόνο αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.»

Για το ρόλο του κριτηρίου ταυτότητας των φυσικών αριθμών, ο Frege προόριζε (§ 68) την περίφημη ισοδυναμία N= (γνωστή και ως «αρχή του Hume» επειδή χειρίζεται την ταυτότητα των αριθμών με όρους 1-1 αντιστοιχίας):

«Ο αριθμός της έννοιας F είναι ο ίδιος με τον αριθμό της έννοιας G αν και μόνο αν οι έννοιες F και G βρίσκονται σε μία 1-1 αντιστοιχία.»

$$N = (\forall F)(\forall G)\ [(Nx : Fx = Nx : Gx) \leftrightarrow (F\ 1-1\ G)]$$

Έτσι, η ισοδυναμία D= μας δίνει τη δυνατότητα να ταυτοποιούμε, δηλαδή να αναγνωρίζουμε το αντικείμενο «η διεύθυνση της ευθείας a» ως το ίδιο, όταν εμφανίζεται με μια διαφορετική περιγραφή, π.χ. ως «η διεύθυνση της ευθείας b». Ανάλογα, η ισοδυναμία N= μας δίνει τη δυνατότητα να ταυτοποιούμε το αντικείμενο «ο αριθμός της έννοιας F» και να το αναγνωρίζουμε κάθε φορά που εμφανίζεται με μια άλλη περιγραφή, π.χ. ως «ο αριθμός της έννοιας G». Όμως, αυτό που πρέπει ιδιαίτερα να επισημανθεί είναι ότι χάρη στις παραπάνω ισοδυναμίες, μπορούν να προσδιοριστούν τα αντικείμενα αναφοράς των όρων «η διεύθυνση της ευθείας a» και «ο αριθμός της έννοιας F» αντίστοιχα. Ας δούμε, για παράδειγμα, πώς αυτό συμβαίνει στην περίπτωση των αριθμών. Στην περίπτωση αυτή, η αναφορά του αριθμητικού όρου «Nx:Fx» («ο αριθμός της έννοιας F») προσδιορίζεται στο πλαίσιο της αριθμητικής ταυτότητας «Nx:Fx = Nx:Gx» («ο αριθμός της έννοιας F είναι ο ίδιος με τον αριθμό της έννοιας G»). Πράγματι, εάν εξασφαλιστεί ότι η αριθμητική ταυτότητα «Nx:Fx = Nx:Gx» είναι αληθής, τότε οι ενικοί όροι «ο αριθμός της έννοιας F» και «ο αριθμός της έννοιας G» αναφέρονται σε ένα κοινό αντικείμενο. Αλλά για να γνωρίζουμε πότε η αριθμητική ταυτότητα «Nx:Fx = Nx:Gx» είναι αληθής, προϋποτίθεται ο καθορισμός των αναγκαίων και ικανών συνθηκών αληθείας της, κάτι που επιτυγχάνεται ακριβώς μέσω της ισοδυναμίας N= (η εν λόγω ταυτότητα είναι αληθής όταν οι έννοιες F, G μπορούν να τεθούν σε 1-1 αντιστοιχία). Συνεπώς, ένας σημαντικός ρόλος των παραπάνω ισοδυναμιών είναι ο προσδιορισμός των αντικειμένων αναφοράς δεδομένων ενικών όρων μέσω κατάλληλων αληθών προτάσεων-πλαισίων. Γι' αυτό και ονομάζονται πλαισιακοί ορισμοί.

4.4. Αφαιρετικές αρχές

Οι ισοδυναμίες D= και N= χαρακτηρίζονται επίσης ως αφαιρετικές αρχές.[2] Διαφέρουν μεταξύ τους κυρίως ως προς το ότι η D= είναι πρώτης τάξεως ποσοδεικτούμενη ισοδυναμία της οποίας το δεύτερο μέλος εκφράζει μια σχέση παραλληλίας μεταξύ αντικειμένων (ευθειών), ενώ η N= είναι δεύτερης τάξεως ποσοδεικτούμενη ισοδυναμία αφού το δεύτερο μέλος της εκφράζει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ εννοιών. Όπως προαναφέρθηκε, και στις δύο περιπτώσεις οι ισοδυναμίες λειτουργούν ως κριτήρια ταυτότητας για αντικείμενα (διευθύνσεις, αριθμούς) που δεν εντάσσονται στο χωροχρονικό πλαίσιο και δεν προσδιορίζονται μέσω της εμπειρίας, δηλαδή αφηρημένα αντικείμενα. Η ισοδυναμία D= έχει στα *Grundlagen* χαρακτήρα υποδείγματος για τον τρόπο που λειτουργεί μια αφαιρετική αρχή. Ξεκινώντας από τη σχέση παραλληλίας μεταξύ ευθειών, εισάγει την *ειδική*[3] έννοια της διεύθυνσης, μια έννοια στην οποία εμπίπτουν οι διευθύνσεις ως αντικείμενα. Η ισοδυναμία N= από την άλλη πλευρά, ξεκινά από αντιστοιχίες 1-1 μεταξύ εννοιών για να εισαγάγει την ειδική έννοια του φυσικού αριθμού, μια έννοια στην οποία εμπίπτουν οι επί μέρους φυσικοί αριθμοί ως αντικείμενα. Κατά συνέπεια, ο ουσιαστικός ρόλος των αφαιρετικών αρχών είναι να δρουν ως μηχανισμοί εισαγωγής νέων εννοιών. Τόσο η D= όσο και η N= εισάγουν νέες έννοιες (τις έννοιες της διεύθυνσης και του φυσικού αριθμού αντίστοιχα) οι οποίες, υπό κατάλληλες συνθήκες, έχουν ως πραγματώσεις τους αφηρημένα αντικείμενα δηλαδή τις διευθύνσεις και τους φυσικούς αριθμούς αντίστοιχα. Το ιδιαίτερο μάλιστα χαρακτηριστικό της N= είναι ότι ξεκινά (όπως προαναφέρθηκε) από έννοιες και από 2ης τάξης λογικές σχέσεις μεταξύ τους για να εισαγάγει μια νέα έννοια (την έννοια του φυσικού αριθμού).

Από τα παραπάνω, γίνεται φανερή η σημασία της ισοδυναμίας N= για την υποστήριξη της οντολογικής θέσης ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι πραγματικά αντικείμενα. Όπως είδαμε, μέσω της N= καθορίζονται οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες αλήθειας μιας αριθμητικής ταυτότητας και μέσω αυτής προσδιορίζονται τα αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων. Αλλά το τελευταίο υποδεικνύει ίσως κάτι περισσότερο από την οντολογική θέση: ο τρόπος που *μας δίνονται* οι αριθμοί δεν εξαρτάται από την αισθητηριακή αντίληψη, την εμπειρία, την a priori καντιανή εποπτεία ή άλλου τύπου εποπτεία αλλά από ένα λογικό γεγονός που αφορά σε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ εννοιών. Συγκεκριμένα, η γνώση της αριθμητικής ταυτότητας «Nx:Fx = Nx:Gx» που βρίσκεται στην αριστερή πλευρά της ισοδυναμίας N= εξαρτάται από τη γνώση λογικών γεγονότων που εκφράζονται στη δεξιά πλευρά της.

4.5. Η ύπαρξη και η γνώση των αριθμών

Ο Frege ενδιαφερόταν όχι μόνο να εδραιώσει τους φυσικούς αριθμούς ως αντικείμενα αλλά και να θεμελιώσει τη γνώση τους. Τα αξιώματα Peano συνεπάγονται την ύπαρξη άπειρων αντικειμένων αυτού του είδους. Ο Frege έπρεπε λοιπόν να απαντήσει επιπλέον στο ερώτημα πώς θεμελιώνεται η γνώση της αλήθειας των θεμελιωδών νόμων που διέπουν την αριθμητική. Η προσπάθεια εναρμόνισης της οντολογικής και της γνωσιολογικής συνιστώσας στα *Grundlagen* συνιστά μια πολύ πρώιμη μορφή του προβληματισμού που εκφράζει ο Benacerraf στο γνωστό άρθρο του 1973. Εάν οι αριθμοί είναι πραγματικά αντικείμενα, απομονωμένα από το χωροχρονικό σύμπαν και αιτιακώς αδρανή, τότε

---

2. Οι αφαιρετικές αρχές του Frege έχουν τη γενική μορφή:

$$(\forall \alpha_\kappa)(\forall \alpha_\lambda)\ [(\Sigma(\alpha_\kappa) = \Sigma(\alpha_\lambda)) \leftrightarrow (\alpha_\kappa \approx \alpha_\lambda)]$$

όπου α_κ, α_λ είναι εκφράσεις μιας δεδομένης γλώσσας και *M* μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ δύο τέτοιων εκφράσεων. Μια αφαιρετική αρχή επεκτείνει τις εκφραστικές δυνατότητες της αρχικής γλώσσας με την εισαγωγή ενός τελεστή Σ και νέων ενικών όρων της μορφής $\Sigma(\alpha_\kappa)$, $\Sigma(\alpha_\lambda)$. Η ταυτότητα «$\Sigma(\alpha_\kappa) = \Sigma(\alpha_\lambda)$» είναι εκφρασμένη στην επέκταση της γλώσσας. Η αφαιρετική αρχή καθορίζει τις συνθήκες αλήθειας ταυτοτήτων της μορφής «$\Sigma(\alpha_\kappa) = \Sigma(\alpha_\lambda)$» στο νέο λεξιλόγιο με βάση την οικεία και καθιερωμένη χρήση προτάσεων της μορφής «$\alpha_\kappa \approx \alpha_\lambda$» εκφρασμένων στο παλαιό λεξιλόγιο. Με άλλα λόγια, μέσω των αφαιρετικών αρχών εισάγουμε νέους ενικούς όρους θεμελιώνοντας την αλήθεια ταυτοτήτων που τους περιέχουν, ξεκινώντας από οικείες σε μας προτάσεις. (Στην περίπτωση της D= , ο τελεστής Σ είναι ο τελεστής: «η διεύθυνση της ευθείας …» ενώ στην περίπτωση της N=, ο τελεστής Σ είναι ο τελεστής «ο αριθμός της έννοιας …»).

3. Κάθε έννοια της οποίας οι επιμέρους πραγματώσεις αποτελούν ένα *είδος* αντικειμένων ονομάζεται *ειδική* έννοια, π.χ. η έννοια του προσώπου, η έννοια του δέντρου, η έννοια της διεύθυνσης, η έννοια του αριθμού.

πώς γνωρίζουμε τις αλήθειες που τα αφορούν; Τον Frege απασχολούσε ένα ανάλογο ερώτημα: εάν οι αριθμοί είναι αυθυπόστατα αντικείμενα που δεν μας δίνονται ούτε μέσω της εμπειρίας ούτε μέσω της καντιανής εποπτείας, τότε πώς γνωρίζουμε τις αλήθειες που τα αφορούν; Ο ίδιος απέκλειε μια εμπειρικού τύπου απάντηση στο γνωσιολογικό ερώτημα, όπως απέκλειε εξίσου μια καντιανού τύπου απάντηση. Κατ' αναλογίαν, ο Benacerraf απέκλειε μια εμπειρικού τύπου απάντηση, μια καντιανού τύπου απάντηση καθώς επίσης και μια γκεντελιανού τύπου απάντηση η οποία θα προϋπέθετε τη λειτουργία της γκεντελιανής εποπτείας στη γνώση των μαθηματικών αληθειών. Αυτό λοιπόν που απασχολούσε τον Frege ήταν να εναρμονίσει τη θέση του ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι αυθυπόστατα αντικείμενα με την απάντηση στο ερώτημα πώς γνωρίζουμε τις αλήθειες της αριθμητικής.

Εδώ τίθενται ουσιαστικά ένα οντολογικό και ένα γνωσιολογικό πρόβλημα: α. το πώς γνωρίζουμε ότι οι φυσικοί αριθμοί υπάρχουν και β. το πώς γνωρίζουμε τις αλήθειες που τους αφορούν. Όπως είδαμε στα προηγούμενα, η ισοδυναμία N= μας βοηθά να απαντήσουμε στο πρώτο, διότι καθορίζει τις συνθήκες υπό τις οποίες η ταυτότητα «Nx:Fx = Nx:Gx» είναι αληθής. Όταν οι έννοιες F και G μπορούν να τεθούν σε μια 1-1 αντιστοιχία, τότε η εν λόγω ταυτότητα είναι αληθής, άρα υπάρχουν τα αντικείμενα αναφοράς των ενικών όρων Nx:Fx, Nx:Gx. Η προσέγγιση της σχέσης μεταξύ γλώσσας και πραγματικότητας που ήδη επισημάνθηκε στην 4.2 μας δίνει τη δυνατότητα να δεχθούμε την ύπαρξη των αριθμών ως αντικειμένων. Αλλά, η ισοδυναμία N= επρόκειτο να εξυπηρετήσει εξίσου και τον γνωσιολογικό στόχο. Μπορούσε να υποδείξει τον τρόπο που γνωρίζουμε τις αλήθειες εκείνες οι οποίες αφορούν τους αριθμούς: οι αληθείς προτάσεις της αριθμητικής θεμελιώνονται στη λογική (2ης τάξης).

Για να κατανοήσουμε καλύτερα πώς η ισοδυναμία N= εξηγεί την αριθμητική γνώση, θα πρέπει, ακολουθώντας τον Frege, να εξετάσουμε το υπόδειγμα των αφαιρετικών αρχών του, δηλαδή την ισοδυναμία D=. Στην περίπτωση αυτή, όπως ο ίδιος επισημαίνει (§ 64), η δεξιά πρόταση («a//b»), που αφορά την παραλληλία δύο ευθειών, μας είναι ιδιαίτερα οικεία, σε αντίθεση με την αριστερή πρόταση («D(a)=D(b)»), που αφορά την ταυτότητα μεταξύ διευθύνσεων. Η έννοια της διεύθυνσης ανακαλύπτεται μέσω μιας διανοητικής δραστηριότητας που μας μεταφέρει από μια γνωστικά οικεία πρόταση για παράλληλες ευθείες σε μια πρόταση για αφηρημένες διευθύνσεις. Αυτός ακριβώς είναι και

ο γνωσιολογικός ρόλος μιας φρεγκιανής αφαιρετικής αρχής. Στην περίπτωση της N= και πάλι, η δεξιά πρόταση της ισοδυναμίας, που τώρα εκφράζει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ εννοιών, μας είναι περισσότερο οικεία, όχι βέβαια για τους γεωμετρικούς λόγους που ίσχυαν στην προηγούμενη περίπτωση αλλά γιατί αποτελεί ένα ζήτημα της λογικής (2ης τάξης).[4] Αυτή τη φορά ανακαλύπτουμε την έννοια του φυσικού αριθμού μέσω μιας διανοητικής δραστηριότητας που μας μεταφέρει από μια γνωστικά οικεία πρόταση της λογικής σε μια αριθμητική ταυτότητα. Επομένως, η γνώση μιας αριθμητικής ταυτότητας στηρίζεται σε μια λογική σχέση μεταξύ δύο εννοιών. Αλλά αυτός ακριβώς ήταν ο στόχος του Frege, δηλαδή το να θεμελιώσει τις αριθμητικές αλήθειες στη λογική. Οι προτάσεις της αριθμητικής είναι γι' αυτόν αναλυτικές, αφού η αλήθειά τους ανάγεται σε λογικές αλήθειες. Συνεπώς, στη φρεγκιανή απάντηση του γνωσιολογικού ερωτήματος, δεν εμπλέκεται η εποπτεία ούτε η εμπειρία αλλά η αναλυτικότητα εξηγεί τη δυνατότητα της αριθμητικής γνώσης. Οι θεμελιώδεις νόμοι της αριθμητικής ήταν για τον Frege «πολύ στενά συνδεδεμένοι» με τους νόμους της σκέψης, δηλαδή της λογικής σκέψης. Χάρη στη N=, ο Frege είχε στα χέρια του ένα εργαλείο με βάση το οποίο μπορούσε καταρχήν να υποστηρίξει ότι η αλήθεια κάθε αριθμητικής ταυτότητας θεμελιώνεται σε μια λογική σχέση μεταξύ εννοιών (1-1 αντιστοιχία). Αυτό που σκόπευε να κάνει στη συνέχεια ήταν να παραγάγει τα αξιώματα Peano, δηλαδή τους θεμελιώδεις νόμους της αριθμητικής, αποδεικνύοντας έτσι ότι η αλήθεια όλων των αριθμητικών προτάσεων ανάγεται στη λογική.

5. Το πρόβλημα του Καίσαρος

Το εγχείρημα του Frege να προσεγγίσει τους φυσικούς αριθμούς ως αντικείμενα των οποίων η ταυτότητα θεμελιώνεται στη λογική προσέκρουσε σε έναν αληθινό σκόπελο, ένα πρόβλημα που παραμένει ανοικτό μέχρι σήμερα για τις φρεγκιανές και νεο-φρεγκιανές προσεγγίσεις της αριθμητικής. Διαπιστώνεται στα *Grundlagen* η διαρκής αναζήτηση ενός κατάλληλου ορισμού για την έννοια του φυσικού αριθμού, μια αναζήτηση που όμως δεν οδηγούσε σε ικανοποιητικό αποτέλεσμα. Ο Frege προσπάθησε αρχικά να δώσει έναν ορισμό της έννοιας

4. Η 1-1 αντιστοιχία μεταξύ δύο εννοιών είναι λογική σχέση 2ης τάξης.

του φυσικού αριθμού με βάση τη μαθηματική επαγωγή, αλλά στη συνέχεια επιδίωξε έναν πλαισιακό ορισμό μέσω της ισοδυναμίας N=. Και στις δύο περιπτώσεις, ωστόσο, οι ορισμοί του δεν απαντούσαν στο ερώτημα εάν ένα δεδομένο αντικείμενο του κόσμου είναι αριθμός ή όχι. Ενας ορισμός θα ήταν κατάλληλος εφόσον λειτουργούσε συγχρόνως ως κριτήριο ταυτότητας και ως κριτήριο εφαρμογής της έννοιας του φυσικού αριθμού. Θα έπρεπε δηλαδή να προσδιορίζει τις αριθμητικές ταυτότητες και επιπλέον να καθορίζει εάν ένα δεδομένο αντικείμενο εμπίπτει στην έννοια του αριθμού. Όπως θα διαπιστώσουμε, τόσο ο επαγωγικός όσο και ο πλαισιακός ορισμός που προτάθηκαν από τον Frege αδυνατούσαν να καλύψουν συγχρόνως τις δύο αυτές προϋποθέσεις. Το κυριότερο πρόβλημα συνίσταται στο γεγονός ότι και οι δύο ορισμοί δεν μπορούν να αποκλείσουν συγκεκριμένες οντότητες του κόσμου (π.χ. τον Ιούλιο Καίσαρα) από το πεδίο εφαρμογής της έννοιας του αριθμού. Ας δούμε όμως τους τρόπους με τους οποίους ο Frege βρέθηκε αντιμέτωπος με το πρόβλημα του Καίσαρος.

5.1. *Η πρώτη εμφάνιση του προβλήματος*

Η αρχική εμφάνιση του προβλήματος συνέβη πολύ πριν ο Frege εισαγάγει την ισοδυναμία N=, όταν ακόμα προσπαθούσε να ορίσει επαγωγικά τον *αριθμό της έννοιας F*. Στην § 55 των *Grundlagen* δοκίμασε να ορίσει τη σημασία της έκφρασης «ο αριθμός n ανήκει στην έννοια F» επαγωγικά με τον παρακάτω τρόπο:

ο αριθμός 0 ανήκει στην έννοια F αν και μόνο αν $\forall x \neg Fx$
(δηλαδή ο αριθμός 0 ανήκει στην έννοια F αν και μόνο αν η πρόταση ότι το x δεν εμπίπτει στην έννοια F είναι αληθής για οποιοδήποτε x)

ο αριθμός 1 ανήκει στην έννοια F αν και μόνο αν $\exists x\,(Fx\ \&\ \forall y\, Fy \rightarrow y = x)$
(δηλαδή ο αριθμός 1 ανήκει στην έννοια F αν και μόνο αν υπάρχει x το οποίο εμπίπτει στην F ενώ για οποιοδήποτε y το οποίο επίσης εμπίπτει στην F συνεπάγεται ότι το x ταυτίζεται με το y)

ο αριθμός n + 1 ανήκει στην έννοια F αν και μόνο αν ∃x (Fx και ο αριθμός n ανήκει στην έννοια «Fy και y ≠ x»)
(δηλαδή ο αριθμός n + 1 ανήκει στην έννοια F αν και μόνο αν υπάρχει x το οποίο εμπίπτει στην έννοια F και είναι τέτοιο ώστε ο αριθμός n ανήκει στην έννοια «εμπίπτει στην F αλλά δεν είναι x»)

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, οι αριθμοί είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν ποσοδεικτικά ως εξής:

$\exists_0 x Fx$ αν και μόνο αν $\forall x \neg Fx$
$\exists_1 x Fx$ αν και μόνο αν $\exists x\,(Fx\ \&\ \forall y\, Fy \rightarrow y=x)$ κ.λπ.

ενώ οι αριθμητικές εξισώσεις είναι δυνατόν να εκφραστούν με τη βοήθεια ποσοδεικτών, όπως στο παράδειγμα:

$1 + 3 = 4$
$(\exists_1 x Fx \vee \exists_3 x Qx \wedge (\neg\exists z Fz \wedge Qz)) \rightarrow (\exists_4 w Fw \vee Qw)$.

Η πρώτη προσπάθεια του Frege να ορίσει τους αριθμούς είχε ως συνέπεια μια ποσοδεικτική διατύπωση των αριθμητικών προτάσεων, έτσι ώστε οι προτάσεις αυτές να μη δεσμεύονται σε αντικείμενα αριθμούς. Στο παραπάνω παράδειγμα, είναι εμφανές ότι η εξίσωση δεσμεύεται οντολογικά μόνο σε φυσικά αντικείμενα. Αυτού του είδους η παρουσίαση των αριθμητικών προτάσεων είναι ωστόσο καθ' όλα συμβατή με τη θέση ότι δεν υπάρχουν καθόλου αριθμοί ή ότι οι αριθμοί δεν είναι αυθύπαρκτα αντικείμενα, μια θέση αντίθετη προς αυτήν που ο Frege επιδίωκε να θεμελιώσει. Σε ό,τι αφορά τον επαγωγικό ορισμό που προαναφέρθηκε, το μόνο που επιτυγχάνεται είναι η εξήγηση της μετάβασης από την έκφραση «ο αριθμός n ανήκει στην έννοια F» στην έκφραση «ο αριθμός n+1 ανήκει στην έννοια F». Στην πραγματικότητα, δεν ορίζεται το νόημα ούτε της μιας ούτε της άλλης έκφρασης (§ 56). Ένα άλλο μειονέκτημα του ορισμού αυτού είναι ότι δεν προσδιορίζει συνθήκες ταυτότητας για τους αριθμούς. Εάν ο αριθμός n ανήκει στην έννοια F και ο αριθμός m ανήκει στην έννοια G, τότε δεν προσδιορίζονται συνθήκες υπό τις οποίες ισχύει n = m. Τέλος, ο επαγωγικός ορισμός δεν μας βοηθά να αποφασίσουμε εάν μια οποιαδήποτε οντότητα, π.χ. ο Ιούλιος Καίσαρ, είναι αριθμός ή όχι. Ετσι, στην § 56 εκφράζεται ήδη η απαρχή ενός προβληματισμού ότι ο επαγωγικός ορισμός δεν εξηγεί *τι είναι* ένας αριθμός. Πρόκειται για την πρώτη διαπίστωση της παρουσίας ενός προβλήματος που ονομάζεται «πρόβλημα του Καίσαρος». Στην πραγματικότητα, κανείς δεν αμφιβάλλει βέβαια για το ότι ο Καίσαρ δεν είναι αριθμός, αλλά αυτό που έχει σημασία είναι ότι ο συγκεκριμένος ορισμός δεν συμβάλλει καθόλου σ' αυτή τη βεβαιότητα. Το πρόβλημα του Καίσαρος κάνει τον Frege να αναλογιστεί ότι θα ήταν ψευδαίσθηση να θεωρήσει κάποιος ότι οι αριθμοί έχουν οριστεί με τον παραπάνω τρόπο.

5.2. Η δεύτερη εμφάνιση του προβλήματος

Στην § 66, ο Frege βρέθηκε ωστόσο αντιμέτωπος και πάλι με το ίδιο πρόβλημα, αυτή τη φορά σε σχέση με την ισοδυναμία D=. Μάλιστα τώρα, οι συνέπειες του προβλήματος ήταν σοβαρότερες απ' ό,τι προηγουμένως, λόγω της μεγάλης σημασίας των ισοδυναμιών D= και N= για το πρόγραμμα του Frege. Έτσι, διαπιστώνεται η ακόλουθη δυσκολία: η ισοδυναμία D= μπορεί να καθορίσει το εάν είναι αληθής μια πρόταση της μορφής «η διεύθυνση της ευθείας a είναι η ίδια με τη διεύθυνση της ευθείας b» αλλά δεν καθορίζει το αν είναι αληθής ή όχι μια πρόταση της μορφής «η Αγγλία είναι η ίδια με τη διεύθυνση του άξονα της Γης». Ο ίδιος προβληματισμός έχει μεγάλη σημασία εάν μεταφερθεί στην περίπτωση της ισοδυναμίας N=. Πράγματι, η N= μπορεί να καθορίσει το εάν είναι αληθής μια πρόταση της μορφής «ο αριθμός της έννοιας F είναι ο ίδιος με τον αριθμό της έννοιας G» αλλά δεν καθορίζει το αν είναι αληθής ή όχι μια πρόταση της μορφής «ο Ιούλιος Καίσαρ είναι ο ίδιος με τον αριθμό της έννοιας F». Για παράδειγμα, η N= δεν μας πληροφορεί για το αν είναι αληθής η πρόταση «ο Ιούλιος Καίσαρ είναι ο ίδιος με τον αριθμό της έννοιας "δορυφόρος της Γης"». Γενικότερα, το πρόβλημα συνίσταται στη δυσκολία να καθοριστούν μέσω των παραπάνω ισοδυναμιών του Frege οι συνθήκες αληθείας των ταυτοτήτων «D(a) = q» και «Nx:Fx = q» όταν η έκφραση «q» δεν είναι της ίδιας μορφής με το πρώτο μέλος της ταυτότητας. Τέτοιου είδους ταυτότητες χαρακτηρίζονται ως «μεικτές» ταυτότητες. Με άλλα λόγια, η D= δεν είναι ικανή να μας πληροφορήσει αν η Αγγλία είναι διεύθυνση κάποιας ευθείας και η N= δεν είναι ικανή να μας πληροφορήσει αν ο Ιούλιος Καίσαρ είναι αριθμός κάποιας έννοιας. Φυσικά, τα εν λόγω παραδείγματα του Frege μπορεί φαινομενικά να δείχνουν ακραία, αλλά αυτό που επιδιώκεται μέσω των παραδειγμάτων είναι η επισήμανση ότι οι ισοδυναμίες δεν συνεισφέρουν καθόλου στη γνώση που διαθέτουμε ότι η Αγγλία *δεν* είναι διεύθυνση και ο Καίσαρ *δεν* είναι αριθμός. Το ότι π.χ. η N= ως πλαισιακός ορισμός δεν μπορεί να απαντήσει στο ερώτημα εάν ένα οποιοδήποτε αντικείμενο, πρόσωπο κ.λπ. συνιστά αριθμό θεωρήθηκε από τον Frege ως σοβαρότατη αδυναμία της N= για το ρόλο του ορισμού. Πρόκειται βέβαια για επανεμφάνιση του προβλήματος που είχε αντιμετωπίσει στην § 56, αλλά στην περίπτωση της N= το ίδιο πρόβλημα παρουσιάζει, όπως θα δούμε, μεγαλύτερη βαρύτητα.

Επισημάνθηκε στην προηγούμενη ενότητα ότι μέσω των πλαισιακών ορισμών του, ο Frege επιδίωκε να εξασφαλίσει το οντολογικό status των διευθύνσεων και των φυσικών αριθμών ως πραγματικών αντικειμένων. Η N= επρόκειτο να παίξει το ρόλο ενός κριτηρίου ταυτότητας με βάση το οποίο, οι συνθήκες αλήθειας της αριθμητικής ταυτότητας «Nx:Fx = Nx:Gx» γίνονται γνωστές. Οποτεδήποτε ισχύει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ δύο εννοιών F και G, η αριθμητική ταυτότητα «Nx:Fx = Nx:Gx» είναι αληθής και κατά συνέπεια, υπάρχει το κοινό αντικείμενο αναφοράς των ενικών αριθμητικών όρων Nx:Fx, Nx:Gx. Μέσω της ισοδυναμίας, ο Frege πίστευε ότι ήταν σε θέση να εξασφαλίσει την ύπαρξη της αναφοράς των αριθμητικών όρων που εμφανίζονται σε μια αληθή αριθμητική ταυτότητα και να παρουσιάσει τους αριθμούς ως αντικείμενα. Όμως η παρουσία του προβλήματος του Καίσαρος έδειξε ότι η ισοδυναμία N= δεν ήταν κατάλληλη για να εξυπηρετήσει τις επιδιώξεις του Frege. Πράγματι, παρά το γεγονός ότι αυτή είχε εισαχθεί ως το μέσο εισαγωγής της έννοιας του φυσικού αριθμού, δεν προσδιορίζει *ποια αντικείμενα* είναι τα αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων. Ακριβέστερα, δεν προσδιορίζει με *μοναδικό* τρόπο τα αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων, αφού δεν μπορεί να αποκλείσει συγκεκριμένες οντότητες από το ρόλο των αντικειμένων αναφοράς. Έτσι, ο Frege αντιμετώπισε για δεύτερη φορά το πρόβλημα που είχε συναντήσει και στον επαγωγικό ορισμό του.

Το πρόβλημα του Καίσαρος συνίσταται κυρίως στο ότι η N= αδυνατεί να λειτουργήσει ως κριτήριο εφαρμογής της έννοιας του αριθμού. Ως κριτήριο εφαρμογής, θα έπρεπε να παρέχει τη δυνατότητα για να διαπιστώνουμε κατά πόσον ένα δεδομένο αντικείμενο εμπίπτει ή δεν εμπίπτει στην έννοια του αριθμού, δηλαδή κατά πόσον ένα οποιοδήποτε αντικείμενο είναι ή δεν είναι αριθμός. Όμως, η N= δεν μπορεί να αποκλείσει οποιεσδήποτε οντότητες από το πεδίο εφαρμογής της έννοιας του αριθμού, παρεκτός και αν άλλα μέσα (ανεξάρτητα από τη N=) ληφθούν υπ' όψιν. Θα μπορούσε π.χ. κάποιος να αναρωτηθεί γιατί το πρόβλημα είναι τόσο σοβαρό, δεδομένου ότι κανένας αριθμός δεν πέρασε τον Ρουβίκωνα και κανένας αριθμός δεν διαθέτει χαρακτηριστικά όπως π.χ. το να είναι ρωμαίος αυτοκράτορας. Αλλά το κρίσιμο σημείο στο πρόβλημα του Καίσαρος είναι ότι το *κριτήριο αναγνώρισης* των αριθμών για τον Frege δεν έπρεπε να είναι κάποιο εμπειρικό γεγονός ή κάποιο σύνολο ιδιοτήτων επιβεβαιώσιμο από την εμπειρία ή από την καντιανή εποπτεία. Το μέσον αναγνώρισης των αριθμών έπρεπε να είναι αποκλειστικά και μόνο η ισοδυναμία N= η οποία και εισάγει τα εν λόγω αντικείμενα. Η N= ως πλαισιακός ορισμός των φυσικών αριθμών όφειλε από μόνη της να διακρίνει τα αντικείμενα που είναι αριθμοί από εκείνα που δεν είναι αριθμοί. Βεβαίως, το πρόβλημα γίνεται περισσότερο εμφανές στην εφαρμοσμένη αριθμητική και στην επιστήμη γενικότερα, όπου το λεξιλόγιο της θεωρίας είναι μεικτό, δηλαδή περιλαμβάνει όρους τόσο για αριθμούς όσο και για φυσικές οντότητες. Κατά συνέπεια, το γεγονός ότι η N= δεν έχει τη δυνατότητα να αποκλείει μια σειρά από οντότητες από αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων αποδεικνύει την αδυναμία της να εισαγάγει και να αναδείξει κατά μοναδικό τρόπο τα αντικείμενα εκείνα που είναι πράγματι οι φυσικοί αριθμοί 1, 2,… κ.λπ.

Ωστόσο, το πρόβλημα του Καίσαρος έπληττε επιπλέον και τον γνωσιολογικό στόχο του Frege που ήταν να δικαιολογήσει τη γνώση των αριθμών, ανάγοντάς την στη λογική. Αυτό οφείλεται στο ότι δεν ήταν δυνατή η γνώση των ταυτοτήτων «Nx:Fx = q», όπως π.χ. «ο αριθμός των χαρτιών μιας τράπουλας = 52», «ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού συστήματος = 9» κ.λπ. Ενώ το λογικό γεγονός «F 1-1 G» αρκεί για τον προσδιορισμό της αλήθειας μιας αριθμητικής ταυτότητας της μορφής «Nx:Fx = Nx:Gx», το ίδιο λογικό γεγονός δεν μπορεί να συνεισφέρει καθόλου στον προσδιορισμό των συνθηκών αληθείας της μεικτής ταυτότητας «Nx:Fx = q». Όπως προαναφέρθηκε, το πρόβλημα του Καίσαρος εκδηλώνεται με την αδυναμία προσδιορισμού των συνθηκών αληθείας μιας μεικτής ταυτότητας της προηγούμενης μορφής, αλλά αυτό, χωρίς ο ίδιος ο Frege να το αναφέρει ρητά, αποτελεί εμπόδιο για τη λύση γνωσιολογικού χαρακτήρα που επιδιώκεται στα *Grundlagen* μέσω της ισοδυναμίας N=. Το πρόβλημα του Καίσαρος αποτέλεσε εμπόδιο για τη χρήση της ισοδυναμίας N= ως πλαισιακού ορισμού που θα εξασφάλιζε τόσο τον οντολογικό προσδιορισμό των φυσικών αριθμών ως αντικειμένων όσο και την απάντηση στο ερώτημα τι εγγυάται την αριθμητική γνώση.

6. Η στροφή προς τους εκτασιακούς ορισμούς

Το πρόβλημα του Καίσαρος υπήρξε μια ανυπέρβλητη δυσκολία για τον Frege, που τον ανάγκασε τελικά να εγκαταλείψει τις προσπάθειες διατύπωσης πλαισιακών ορισμών μέσω ισοδυναμιών. Γι' αυτόν

το λόγο, στις §§ 68-69 ο Frege στρέφεται προς τη διατύπωση άλλων ορισμών, τόσο για τις διευθύνσεις όσο και για τους αριθμούς. Συγκεκριμένα, ορίζει τη διεύθυνση της ευθείας a ως την *έκταση της έννοιας «παράλληλη προς την ευθεία* a» (P) και τον αριθμό της έννοιας F ως την *έκταση της έννοιας «ισοπληθυκή με την έννοια F»*[5] (N). Επειδή οι εκτάσεις είναι κλάσεις, ο προηγούμενος ορισμός της διεύθυνσης σημαίνει ακριβώς ότι *η διεύθυνση της ευθείας* a *είναι η κλάση όλων των ευθειών που είναι παράλληλες με την ευθεία* a. Για παρόμοιους λόγους, ο προηγούμενος ορισμός του αριθμού σημαίνει ότι *ο αριθμός της έννοιας F είναι η κλάση όλων των εννοιών που είναι ισοπληθυκές με την έννοια F*. Οι αριθμοί ορίζονται ως κλάσεις κλάσεων, δηλαδή ως αντικείμενα.

Με βάση τους προηγούμενους ορισμούς, ο αριθμός που ανήκει στην έννοια F είναι ο ίδιος με τον αριθμό που ανήκει στην έννοια G αν και μόνο αν η έκταση της έννοιας «ισοπληθυκή με την έννοια F» είναι η ίδια με την έκταση της έννοιας «ισοπληθυκή με την έννοια G».[6] Ο Frege είχε απομακρυνθεί αρκετά από το εγχείρημα που ξεκίνησε όταν διατύπωνε την ισοδυναμία N=. Οι ορισμοί που έδωσε στις §§ 68-69 είναι κατάλληλοι ώστε να μπορεί κάποιος να κατανοήσει τι είναι οι αριθμοί. Το ότι «ο n είναι αριθμός» σημαίνει (§ 72) ότι υπάρχει μια έννοια F έτσι ώστε ο n να είναι ο αριθμός της έννοιας F, με τον τρόπο που υποδεικνύεται από το (N).

Μεγάλο ενδιαφέρον ωστόσο στο σημείο αυτό, προκαλεί το γεγονός ότι αφού ο Frege διατύπωσε τους παραπάνω ορισμούς μέσω των εκτάσεων εννοιών, έσπευσε στην § 73 να παραγάγει και πάλι την ισοδυναμία N= από τον ορισμό (N). Αυτό μας κάνει να σκεφτούμε ότι δεν είχε σκοπό να εγκαταλείψει την N= παρά μόνο προσωρινά. Η απόδειξη της N= πραγματοποιείται στην § 73. Όπως προαναφέρθηκε, ο αριθμός της έννοιας F είναι η έκταση της έννοιας «ισοπληθυκή προς την έννοια F» (N). Έτσι, ο Frege συνήγαγε ότι: η έκταση της έννοιας «ισοπληθυκή προς την έννοια F» είναι η ίδια με την έκταση της έννοιας «ισοπληθυκή προς την έννοια G» αν και μόνο αν η έννοια F είναι ισοπληθυκή με

5. Ισοπληθυκές είναι δύο έννοιες αν και μόνο αν βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία μεταξύ τους. Η ισοπληθυκότητα είναι μια λογική έννοια επειδή η 1-1 αντιστοιχία μεταξύ δύο εννοιών δεν προϋποθέτει την έννοια του αριθμού και εκφράζεται με λογικούς όρους στη λογική 2ης τάξης.

6. Εδώ απαιτείται η ταυτότητα εκτάσεων. Ως κριτήριο ταυτότητας των εκτάσεων διατυπώνεται στα *Grundgesetze* η ισοδυναμία «$\forall F \forall G\, [\{x{:}Fx\}=\{x{:}Gx\} \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)]$» (νόμος V).

την έννοια G. Μέσω αντικατάστασης από τον ορισμό (N) προκύπτει ότι ο αριθμός της έννοιας F είναι ο ίδιος με τον αριθμό της έννοιας G αν και μόνο αν η έννοια F είναι ισοπληθυκή προς την έννοια G. Αλλά το τελευταίο σημαίνει ότι: ο αριθμός της έννοιας F είναι ο ίδιος με τον αριθμό της έννοιας G αν και μόνο αν η F είναι 1-1 με την G. Δηλαδή συνάγεται η ισοδυναμία N=.

Όπως φαίνεται από τα προηγούμενα, ο Frege πραγματοποίησε έναν ελιγμό. Άφησε προσωρινά την ισοδυναμία N= για να προχωρήσει στον εκτασιακό ορισμό του αριθμού, αλλά στη συνέχεια παρήγαγε την ισοδυναμία N= από τον εκτασιακό ορισμό. Ας σημειωθεί μάλιστα ότι η μοναδική χρήση του εκτασιακού ορισμού (N) στα *Grundlagen* βρίσκεται στην παραγωγή της N=, ενώ μετά από αυτό, ο Frege συνέχισε να αναφέρεται κανονικά στην N=. Πρόκειται για μια κίνηση που εντυπωσιάζει αλλά η οποία έχει την ερμηνεία της. Ο Frege στόχευε στην απόδειξη των θεμελιωδών νόμων της αριθμητικής. Η επίτευξη αυτού του στόχου ήταν, όπως έχουμε προαναφέρει, κεφαλαιώδους σημασίας για το πρόγραμμα του Frege, διότι θα αποδείκνυε ότι οι προτάσεις της αριθμητικής ανάγονται στη λογική. Ο εκτασιακός ορισμός του αριθμού δεν χρησιμοποιείται ωστόσο στο σχεδίασμα των αποδείξεων των θεμελιωδών νόμων της αριθμητικής που ο ίδιος έδωσε στις §§ 76-83. Η N= ήταν απαραίτητη για την απόδειξη των νόμων της αριθμητικής γι' αυτό και ο Frege την παρήγαγε με τη βοήθεια του εκτασιακού ορισμού του. Όμως, για τον Frege, η N= δεν μπορούσε να χρησιμοποιηθεί από την αρχή και απευθείας ως ορισμός. Ο λόγος που τη θεώρησε ακατάλληλη για το ρόλο του ορισμού ήταν ακριβώς το πρόβλημα του Καίσαρος.

6.1. *Frege εναντίον Hilbert*

Η δυσκολία που εκπροσωπούσε η N= για τον Frege συνδέεται με το status της ως *έμμεσου* ορισμού, ένα status το οποίο έχει επισημανθεί πρόσφατα από τους νεολογικιστές Hale & Wright (2001, 117-50). Μια ουσιαστική διαφορά μεταξύ ενός έμμεσου και ενός άμεσου (ρητού) ορισμού είναι ότι, ενώ ο ρητός ορισμός καθορίζει με σαφήνεια και μονοσήμαντα *ποια* είναι τα αντικείμενα που εμπίπτουν στην οριζόμενη έννοια, ένας έμμεσος ορισμός δεν καθορίζει με μονοσήμαντο τρόπο τα αντικείμενα αυτά. Είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι π.χ. ο Hilbert είχε συλλάβει μια πρώιμη μορφή έμμεσου ορισμού, εισάγοντας τις έννοιες «σημείο», «ευθεία», «επίπεδο» μέσω ενός συστήματος αξιωμάτων για

την ευκλείδεια γεωμετρία. Το σύστημα αξιωμάτων του αποτελεί ένα είδος έμμεσου ορισμού με προφανές χαρακτηριστικό το ότι δεν καθορίζει μονοσήμαντα το πεδίο εφαρμογής των οριζόμενων εννοιών. Με άλλα λόγια, ως σημείο, ως ευθεία και ως επίπεδο είναι δυνατόν να εκληφθούν οποιαδήποτε αντικείμενα τα οποία συνδέονται μεταξύ τους μέσω των σχέσεων που επιβάλλονται από τα αξιώματα. Αυτό είναι κάτι που έκανε έξαλλο τον Frege, όπως αποδεικνύεται από την αλληλογραφία του με τον Hilbert. Ο Frege δεν μπορούσε να αποδεχθεί ότι ένα σύστημα αξιωμάτων μπορεί να αποτελεί ορισμό όπως ο Hilbert υποστήριζε. Ένας ορισμός για τον Frege οφείλει να καθορίζει με μοναδικότητα τα αντικείμενα αναφοράς των όρων τους οποίους εισάγει, αλλά αυτό είναι κάτι που μόνο ένας άμεσος (ρητός) ορισμός επιτυγχάνει. Αντίθετα, για τον Hilbert, το γεγονός ότι το σύστημα αξιωμάτων του δεν καθορίζει κατά μοναδικό τρόπο τα αντικείμενα που εμπίπτουν στις οριζόμενες γεωμετρικές έννοιες δεν αποτελούσε καθόλου πρόβλημα. Το αξιωματικό του σύστημα δεν απέκλειε άλλες οντότητες από το ρόλο του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου, αρκεί οι οντότητες αυτές να συνδέονταν μεταξύ τους με τις κατάλληλες σχέσεις. Συνεπώς, η λειτουργία του αξιωματικού του συστήματος ως έμμεσος ορισμός ήταν τέτοια ώστε να περιχαρακώνει τις οριζόμενες έννοιες, χωρίς να προσδιορίζει με μοναδικότητα τα αντικείμενα που εμπίπτουν σ' αυτές. Η διαφωνία Frege και Hilbert για το θέμα των ορισμών δείχνει ακριβώς ότι ο Frege είχε στο νου του ως πρότυπο τους ρητούς ορισμούς, γι' αυτό και η N= δεν κάλυπτε τις απαιτούμενες από αυτόν προϋποθέσεις. Κατά συνέπεια, το πρόβλημα του Καίσαρος που αντιμετωπίζει η N= είναι ένα σύμπτωμα του γεγονότος ότι η N= δεν λειτουργεί ως άμεσος (ρητός) ορισμός, όπως θα επιθυμούσε ο Frege, αλλά ως έμμεσος ορισμός.

6.2. *Η θεμελιώδης αδυναμία*

Ο Frege λοιπόν στράφηκε σε ρητούς ορισμούς για τους φυσικούς αριθμούς. Έχοντας ορίσει τον αριθμό της έννοιας F ως την *έκταση της έννοιας «ισοπληθυκή με την έννοια F»* (N), στη συνέχεια προχώρησε στις §§ 74-75 διατυπώνοντας ρητά ότι:

το 0 είναι ο αριθμός που ανήκει στην έννοια «μη ταυτόσημο με τον εαυτό του» (N_0 [x: x≠x]).

Επίσης, στην § 76 ορίζεται ο διάδοχος ενός αριθμού:
«ο n ακολουθεί στη σειρά των φυσικών αριθμών αμέσως μετά τον m» σημαίνει ότι υπάρχει μια έννοια F και ένα αντικείμενο x που εμπίπτει σ' αυτή την έννοια, έτσι ώστε ο αριθμός που ανήκει στην έννοια F είναι ο n και ο αριθμός που ανήκει στην έννοια «*εμπίπτει στην F αλλά δεν είναι ταυτόσημο με το x*» είναι ο m.

Στην § 77 περιλαμβάνεται η απόδειξη ότι υπάρχει κάτι που ακολουθεί στη σειρά των φυσικών αριθμών αμέσως μετά τον 0. Επειτα ορίζεται ο 1:

Ο 1 είναι ο αριθμός που ανήκει στην έννοια «ταυτόσημο με το 0»
(N_1 [x: x=ο αριθμός της έννοιας N_0]).

Παρομοίως μπορεί να οριστεί ο 2:

Ο 2 είναι ο αριθμός που ανήκει στην έννοια «ταυτόσημο με το 0 ή ταυτόσημο με το 1»
(N_2 [x: x=ο αριθμός της έννοιας N_0 ή ο αριθμός της έννοιας N_1]) *κ.ο.κ.*

Στη συνέχεια, και έως την § 83, ο Frege παρουσίασε το εννοιολογικό υλικό που του ήταν απαραίτητο για την απόδειξη του θεμελιώδους νόμου της αριθμητικής ότι μετά από κάθε αριθμό n ακολουθεί ένας άλλος αριθμός. Έτσι αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει τελευταίο μέλος στη σειρά των φυσικών αριθμών, άρα οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι.

Είναι γνωστό ότι η χρήση από τον Frege εκτάσεων εννοιών (και, σε τελική ανάλυση, κλάσεων) στους ορισμούς του είχε συγκεκριμένα αποτελέσματα που απέβησαν μοιραία για το πρόγραμμά του. Ο Frege χρησιμοποίησε την αρχή της απεριόριστης συμπερίληψης σύμφωνα με την οποία, όταν δίνεται μια ιδιότητα, μπορούμε να σχηματίσουμε την κλάση όλων των αντικειμένων που ικανοποιούν αυτή την ιδιότητα. Με βάση αυτή την αρχή, ήταν δυνατή η διατύπωση (στα *Grundgesetze*) της πρότασης: «∀F∀G [{x:Fx}={x:Gx} ↔ ∀x(Fx↔Gx)]» ως κριτηρίου ταυτότητας των εκτάσεων, από την οποία όμως προκύπτει το παράδοξο του Russell. Έτσι, ο Frege υπονόμευσε ο ίδιος το πρόγραμμά του εμπλεκόμενος σε ασυνέπειες, από τη στιγμή που αποφάσισε να χρησιμοποιήσει εκτασιακούς ορισμούς και κλάσεις. Όπως είδαμε, αναγκάστηκε να ακολουθήσει αυτή την πορεία έχοντας ήδη έρθει αντιμέτωπος με το πρόβλημα του Καίσαρος, ένα πρόβλημα που τον εμπόδισε να χρησιμοποιήσει απευθείας την ισοδυναμία N= ως πλαισιακό ορισμό της έννοιας του φυσικού αριθμού.

Πέρα όμως από το ίδιο το γεγονός της ασυνέπειας που οδήγησε αναπόφευκτα σε κατάρρευση το πρόγραμμα του Frege, και άλλα προβλήματα έθεταν υπό αμφισβήτηση την προοπτική του λογικισμού που το πρόγραμμα αυτό επαγγελόταν. Ο Frege επιδίωκε την αναγωγή των αληθειών της αριθμητικής στη λογική και την παρουσίαση των αριθμών ως λογικών αντικειμένων. Ωστόσο, οι κλάσεις με τις οποίες ταύτισε τους αριθμούς δεν είχαν καθαρά λογικό status. Συνεπώς, μια διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στη μαθηματική και τη λογική περιοχή ήταν δυσδιάκριτη. Εκτός των άλλων, όπως έχει παρατηρηθεί από τον Wright (1983, 113), η στροφή του Frege προς εκτασιακούς ορισμούς μέσω κλάσεων δεν απέφυγε το πρόβλημα του Καίσαρος, παρά το γεγονός ότι η στροφή πραγματοποιήθηκε ακριβώς γι' αυτόν το λόγο. Το πρόβλημα που πλήττει την N= πλήττει εξίσου και την πρόταση που διατύπωσε ο Frege ως κριτήριο ταυτότητας των κλάσεων «∀F∀G [{x:Fx}={x:Gx} ↔ «∀x(Fx↔Gx)]». Η ταυτότητα των κλάσεων εξηγείται με όρους μιας σχέσης ισοδυναμίας σε έννοιες (η F έχει τις ίδιες ακριβώς πραγματώσεις με την G). Ο ορισμός των αριθμών ως εκτάσεων θα έλυνε το πρόβλημα του Καίσαρος για τους αριθμούς εάν βέβαια το έλυνε και για τις εκτάσεις. Αλλά κάτι τέτοιο δεν φαίνεται εφικτό, όπως αποδεικνύεται από το γεγονός ότι δεν είναι δυνατόν μέσω του προαναφερθέντος κριτηρίου να καθοριστούν συνθήκες αλήθειας για μεικτές προτάσεις της μορφής «{x:Fx}= q». Αποτελεί ειρωνία για τον Frege το γεγονός ότι ταύτισε τους αριθμούς με εκτάσεις εννοιών για να αποφύγει το πρόβλημα του Καίσαρος. Αλλά δεν κατάφερε να το αποφύγει, δεδομένου ότι το ίδιο πρόβλημα εμφανίζεται και στην περίπτωση των εκτάσεων.

Ένα από τα σημεία που προαναφέρθηκαν είναι ουσιαστικής σημασίας για την τύχη του προγράμματος του λογικισμού. Πρέπει να επισημανθεί ότι η μόνη ουσιαστική χρήση του εκτασιακού ορισμού (N) των αριθμών και του ασυνεπούς κριτηρίου ταυτότητας των κλάσεων, κατά την απόδειξη των θεμελιωδών νόμων της αριθμητικής στα *Grundlagen* (§§ 73-83), γίνεται στο σημείο της παραγωγής της N=. Αυτό σημαίνει ότι αν κανείς χρησιμοποιήσει απευθείας τη N= (χωρίς να καταφύγει σε ρητούς ορισμούς και σε εκτάσεις), αποφεύγει τις επικίνδυνες ατραπούς που οδηγούν στις ασυνέπειες όπου ενεπλάκη τελικά ο Frege. Κάτι τέτοιο προϋποθέτει ωστόσο την εξαρχής αποδοχή της N= ως (έμμεσου) ορισμού, παρά το χαρακτηριστικό πρόβλημα που απορρέει από το status της. Αυτή η παρατήρηση αποτελεί το θεμέλιο του προγράμματος του νεολογικισμού που εκπροσωπείται από τους Wright και Hale. Εάν η N= προστεθεί στη λογική 2ης τάξης ως συμπληρωματικό αξίωμα, τότε παρέχει ένα σύστημα από το οποίο μπορούν να παραχθούν τα αξιώματα Peano, μεταξύ των οποίων και το ότι για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει πάντοτε ο επόμενός του.[7] Το σημαντικό μάλιστα είναι ότι υπάρχουν επαρκείς εγγυήσεις για τη συνέπεια αυτού του συστήματος, όπως έχει υποστηριχθεί (Boolos, 1998).

7. Η προοπτική του λογικισμού

Ένα αίτημα που διατρέχει όλη την έκταση των *Grundlagen* είναι η εύρεση ενός κατάλληλου ορισμού της έννοιας του φυσικού αριθμού που να αναδεικνύει το status των αριθμών ως αντικειμένων και συγχρόνως να εξηγεί ως πηγή προέλευσης της αριθμητικής γνώσης τη λογική. Η ισοδυναμία N= που διατυπώθηκε με υπόδειγμα την ισοδυναμία D= εκφράζει το κριτήριο ταυτότητας για τους αριθμούς. Όπως αναλυτικά είδαμε σε προηγούμενη ενότητα, χάρη στην N= ο Frege θα μπορούσε να παρουσιάσει τους αριθμούς ως αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων που εμφανίζονται σε μια αληθή αριθμητική ταυτότητα της μορφής «Nx:Fx = Nx:Gx». Μέσω της N= επίσης, η γνώση των αναγκαίων και ικανών συνθηκών αληθείας της αριθμητικής ταυτότητας «Nx:Fx = Nx:Gx» ανάγεται στη λογική· συγκεκριμένα, σε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ δύο εννοιών F και G, δηλαδή μια καθαρά λογική σχέση. Η θεμελιώδης σημασία της N= για το πρόγραμμα του λογικισμού του Frege επισκιάστηκε ωστόσο από το πρόβλημα του Καίσαρος, που αναδεικνύει την ακαταλληλότητά της να ορίσει τους φυσικούς αριθμούς ως μοναδικά αντικείμενα. Επιπλέον, η γνώση των συνθηκών αληθείας οποιασδήποτε ταυτότητας της μορφής «Nx:Fx = q» ήταν αδύνατη μέσω της N= λόγω του ίδιου προβλήματος. Η διαπίστωση από τον Frege ότι η εκπλήρωση των στόχων (οντολογικού και γνωσιολογικού) των *Grundlagen* δεν μπορούσε να προωθηθεί μέσω ενός πλαισιακού ορισμού όπως η N= τον οδήγησε στη χρήση εκτάσεων εννοιών (άρα κλάσεων) για τον ορισμό των αριθμών, πράγμα το οποίο τον ενέπλεξε τελικά στις μοιραίες ασυνέπειες.

7. Το σημαντικό αυτό αποτέλεσμα ονομάζεται, μετά από πρόταση του Boolos, «Frege's Theorem». Η απόδειξη εκτίθεται από τον Wright (1983, 158-69).

Οι σύγχρονοι υποστηρικτές του λογικισμού του Frege, γνωστοί και ως νεοφρεγκιανοί (Hale & Wright, 2001, 4), στην προσπάθειά τους να ανασυγκροτήσουν το πρόγραμμά του, θεωρούν ότι ο ίδιος δεν έπρεπε να κάνει το βήμα που τον οδήγησε στη δυσάρεστη περιπέτεια. Του καταλογίζουν μια κάποια βιασύνη και ίσως μια υπερεκτίμηση του προβλήματος του Καίσαρος. Πιστεύουν δηλαδή ότι δεν έπρεπε να προχωρήσει στη διατύπωση εκτασιακών ορισμών αφού είχε τη δυνατότητα να παραγάγει απευθείας τα αξιώματα Peano (τους θεμελιώδεις νόμους) της αριθμητικής από την N= στη λογική 2ης τάξης.

Είναι αλήθεια ότι η υιοθέτηση αυτής της δεύτερης επιλογής καθιστά τον λογικισμό λιγότερο ακραίο από αυτόν που επιδίωκε ο Frege. Αυτό οφείλεται στο ότι η ισοδυναμία N= δεν συνιστά *ορισμό* με την αυστηρή σημασία αλλά έχει το status ενός έμμεσου ορισμού, όπως υποστηρίζει το πρόγραμμα του νεολογικισμού. Ένας έμμεσος ορισμός δεν μεταφράζει το νόημα ενός όρου σε ήδη γνωστές εκφράσεις όπως κάνει ένας ρητός ορισμός αλλά εγκαθιστά ένα μοντέλο χρήσης της οριζόμενης έκφρασης. Αυτό το επιτυγχάνει μέσω μιας αληθούς πρότασης που καθιστά οικείο το νόημα του όρου σε οποιονδήποτε δεν διέθετε τον όρο αυτό στο μέχρι τότε λεξιλόγιό του.

Ωστόσο, η διευκρίνιση του status της N= καθιστά σαφή κάποια όρια σχετικά με τις επιδιώξεις ενός λογικιστικού προγράμματος. Είδαμε ότι ο Frege επιδίωκε αφενός να παρουσιάσει τους φυσικούς αριθμούς ως αντικείμενα και αφετέρου να αποδείξει ότι οι προτάσεις της αριθμητικής είναι λογικές αλήθειες ή ανάγονται σε λογικές αλήθειες. Η επίτευξη των δύο αυτών στόχων εξακολουθούσε να παραμένει σε εκκρεμότητα μετά την εμφάνιση των ασυνεπειών στο πρόγραμμά του. Εκτός από τις ασυνέπειες ενώπιον των οποίων τελικά βρέθηκε, είχε χρησιμοποιήσει ήδη εργαλεία χωρίς καθαρά λογικό status, π.χ. κλάσεις. Επομένως, για να ξεκαθαρίσει το τοπίο, το πρόγραμμα του λογικισμού του Frege έπρεπε να απαλλαγεί από τα αδύνατα σημεία του. Καταρχήν έπρεπε να απαλλαγεί από τη χρήση κλάσεων και από τους εκτασιακούς ορισμούς των αριθμών. Επίσης, δεδομένου ότι η N= στη λογική 2ης τάξης ήταν ικανή να εξασφαλίσει τη θεμελίωση των νόμων της αριθμητικής, έπρεπε να αναδειχθεί ως η βασική αρχή του λογικισμού. Επίσης, έπρεπε να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό οι αλήθειες της αριθμητικής μπορούσαν να αναχθούν στη λογική 2ης τάξης. Εδώ ακριβώς η επιδίωξη του νεολογικισμού είναι μετριοπαθέστερη από εκείνη του Frege, δεδομένου ότι ο Wright (1983, 135-53) από την αρχή διαπίστωσε ότι το status της N= ως έμμεσου και όχι ως ρητού ορισμού *δεν εξασφαλίζει τη δυνατότητα μετάφρασης κάθε αριθμητικής ταυτότητας σε μια λογική αλήθεια*. Όμως, παρά το γεγονός αυτό, είναι δυνατή μια μετριοπαθέστερη εκδοχή του λογικισμού η οποία βασίζεται στο γεγονός ότι τα αξιώματα της αριθμητικής, και κατ' επέκταση οι αληθείς προτάσεις της αριθμητικής, απορρέουν από την ισοδυναμία N= στη λογική 2ης τάξης. Κατ' αυτή την έννοια, διασώζεται σε έναν σημαντικό βαθμό η προοπτική του λογικισμού. Σε κάθε περίπτωση, ωστόσο, διασώζεται το a priori status της αριθμητικής γνώσης. Η γνώση των αξιωμάτων της αριθμητικής θεμελιώνεται στη γνώση της N=, η οποία ως έμμεσος ορισμός συνιστά μια a priori αρχή. Έτσι, ανεξάρτητα από το πόσο ισχυρή είναι η διάσταση του λογικισμού στην προτεινόμενη από τους νεολογικιστές προσέγγιση, αυτό που εξασφαλίζεται κυρίως είναι ο a priori χαρακτήρας της γνώσης της αριθμητικής.

Σε ό,τι αφορά το πρόβλημα του Καίσαρος, το status της N= ως έμμεσου ορισμού φαίνεται να ευθύνεται γι' αυτό. Το πρόβλημα του Καίσαρος συνιστά ένα γενικότερο πρόβλημα που χαρακτηρίζει τους έμμεσους ορισμούς και που εκφράζει τη μη εξασφάλιση της μοναδικότητας του νοήματος της οριζόμενης έκφρασης. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι επιλογές του νεολογικισμού από τη μια εξασφαλίζουν τη συνέπεια του προγράμματός του και από την άλλη κληρονομούν το πρόβλημα του Καίσαρος, ένα πρόβλημα που παραμένει ανοιχτό μέχρι σήμερα. Η μη μοναδικότητα που εμφανίζεται στον καθορισμό του αντικειμένου αναφοράς του αριθμητικού όρου Nx:Fx είναι ένα θέμα που συνεχίζει να απασχολεί τους νεολογικιστές στο βαθμό που ο έτερος στόχος του Frege, η ανάδειξη των φυσικών αριθμών ως μοναδικών αντικειμένων, εξακολουθεί να τίθεται με ουσιαστικό τρόπο. Στο βαθμό όμως που το πρόβλημα του Καίσαρος αποτελεί εγγενές χαρακτηριστικό των έμμεσων ορισμών, άρα και της N=, θα έπρεπε το θέμα της *μοναδικότητας* να αντιμετωπιστεί από μια ευρύτερη οπτική γωνία. Κάτι τέτοιο υποδεικνύει άλλωστε και η ύπαρξη διαφορετικών ισόμορφων μοντέλων της αριθμητικής. Επομένως, μια διέξοδος στο πρόβλημα της μοναδικότητας είναι η υποστήριξη της θέσης ότι η N= ως έμμεσος ορισμός δεν καθορίζει με μονοσήμαντο τρόπο τα αντικείμενα αναφοράς για τους όρους Nx:Fx, Nx:Gx αλλά εκφράζει τον τύπο της δομής των φυσικών αριθμών, μιας δομής την οποία συγκεκριμένες ακολουθίες αντικειμένων ικανοποιούν. Κατ' αυτή την έννοια, το αίτημα για το χαρακτηρισμό των φυσικών αριθμών ως αντικειμένων εκπληρώνεται αλ-

λά με μια λιγότερο παγιωμένη μορφή από αυτήν που είχε αρχικά επιδιωχθεί από τον Frege. Οι αριθμοί δεν καθορίζονται ως μοναδικά οριστικοποιημένα αντικείμενα μιας αποκρυσταλλωμένης μαθηματικής πραγματικότητας, αλλά παραμένουν αντικείμενα μιας πραγματικότητας της οποίας οι διαφορετικές εκφάνσεις αποκαλύπτονται στα υπάρχοντα μοντέλα της αριθμητικής.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Benacerraf, P. (1973). Mathematical Truth. *Journal of Philosophy*, 70, 661-680.

Boolos, G. (1987). The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic. Στο Boolos (1998). *Logic, Logic and Logic* (pp. 183-201). Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Burgess, J.P. (1984). Review of Wright (1983). *Philosophical Review*, 93, 638-40.

Demopoulos, W. (1995). *Frege's Philosophy of Mathematics*. Harvard: Harvard University Press

Frege, G. (1884). *The Foundations of Arithmetic* [μτφρ. Ρουσσόπουλου, Γ. (1990). *Τα Θεμέλια της Αριθμητικής*. Αθήνα: Νεφέλη].

Hale, B. (1987). *Abstract Objects*. N. York: Blackwell.

Hale, B. & Wright, C. (2001). *The Reason's Proper Study*. Oxford: Clarendon Press.

Hodes, H. (1984). Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic. *Journal of Philosophy*, 81, 123-49.

Kant, I. (1787). *Η Κριτική του Καθαρού Λόγου* [μτφρ. Γιανναρά, Α. (1977). Αθήνα: Παπαζήσης].

MacBride, F. (2003). Speaking with Shadows: A study of Neo-Logicism. *British Journal of Philosophy of Science*, 554, 120-1.

Mill, J. S. (1843). *A System of Logic*. London: Longmans (8th edition) 1936.

Resnik, D. (1974). The Frege-Hilbert Controversy. *Philosophy and Phenomenological Research*, 34, 386-403.

Shapiro, S. (2000). *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Wright, C. (1983). *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen: Aberdeen University Press

Χριστοπουλου, Δ. και Ψυλλος, Σ. (2005). Νεο-λογικισμός: Προβλήματα και Προοπτικές, *Νεύσις*, 14, 152-73.