Ασκήσεις 5

Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών

1. Δείξτε ότι το παραβολοειδές που δίνεται από την εξίσωση $z = x^2 + y^2$ είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια.

Λύση

Μία παραμέτρηση του παραβολοειδούς δίνεται από

$$r(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

Θεωρούμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που παίρνουμε από την παραμέτρηση

$$N(u,v) = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}(-2u, -2v, 1)$$

Το N είναι μοναδιαίο διαφορίσιμο κάθετο διανυσματικό πεδίο του παραβολοειδούς, επομένως το παραβολοειδές είναι προσανατολίσιμο.

2. Υπολογίστε τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης και 2ης τάξης της επιφάνειας $z = f(x,y)$ όπου f συνάρτηση τάξης C^2.

Λύση

Έχουμε την παραμέτρηση

$$r(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

$$r_x = (1, 0, f_x), \;\; r_y = (0, 1, f_y)$$

$$E = 1 + f_x^2, \; F = f_x f_y, \; G = 1 + f_y^2$$

$$r_{xx} = (0, 0, f_{xx}), \; r_{xy} = (0, 0, f_{xy}), \; r_{yy} = (0, 0, f_{yy})$$

$$\|r_x \times r_y\| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που αντιστοιχεί σ' αυτή την παραμέτρηση δίνεται από

$$N = \frac{r_x \times r_y}{\|r_x \times r_y\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1)$$

$$e = < N, r_{xx} > = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

$$f = < N, r_{xy} > = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

$$g = < N, r_{yy} > = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

3. Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss και την μέση καμπυλότητα, της επιφάνειας που δίνεται από την παραμέτρηση:

$$r(u,v) = (u+v, u-v, 4uv)$$

Υπολογίστε τις κύριες καμπυλότητες και τις αντίστοιχες κύριες κατευθύνσεις στο σημείο $r(0,1) = (1,-1,0)$.

Λύση

$$r_u = (1,1,4v), \ \ r_v = (1,-1,4u)$$

Υπολογίζουμε τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης:

$$E = 2+16v^2, \ F = 16uv, \ G = 2+16u^2$$

$$\|r_u \times r_v\| = \sqrt{EG-F^2} = 2\sqrt{1+8u^2+8v^2}$$

$$r_{uu} = (0,0,0) \ r_{uv} = (0,0,4), \ r_{vv} = (0,0,0)$$

Υπόλογίζουμε τα θεμελιώδη μεγέθη 2ης τάξης:

$$e = \frac{[r_u, r_v, r_{uu}]}{\|r_u \times r_v\|} = 0$$

$$f = \frac{[r_u, r_v, r_{uv}]}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{1}{\|r_u \times r_v\|} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4v \\ 1 & -1 & 4u \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{4}{\sqrt{1+8u^2+8v^2}}$$

$$g = \frac{[r_u, r_v, r_{vv}]}{\|r_u \times r_v\|} = 0$$

Επομένως η καμπυλότητα Gauss δίνεται από

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = -\frac{4}{(1+8u^2+8v^2)^2}$$

Ο πίνακας του τελεστή σχήματος της επιφάνειας, $-T_pN$ στη βάση $\{r_u, r_v\}$ δίνεται από

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4(1+8u^2+8v^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 2+16u^2 & -16uv \\ -16uv & 2+16v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1+8u^2+8v^2} \begin{pmatrix} 2+16u^2 & -16uv \\ -16uv & 2+16v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{1+8u^2+8v^2} \begin{pmatrix} -8uv & 1+8u^2 \\ 1+8v^2 & -8uv \end{pmatrix}$$

Στο σημείο $r(0,1)=(1,-1,0)$ ο πίνακας του τελεστή σχήματος είναι:

$$\frac{2}{9}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

με ιδιοτιμές $k_{1,2}=\pm 3$. Επομένως οι κύριες καμπυλότητες είναι ± 3. Τα ιδιοδιανύσματα δίνονται από τις λύσεις των συστημάτων:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο παραπάνω πίνακας του τελεστή σχήματος είναι ώς προς τη βάση $\{r_u, r_v\}$ και $r_u(0,1)=(1,1,4)$, $r_v(0,1)=(1,-1,0)$. Επομένως οι κύριες κατευθύνσεις στο $r(0,1)=(1,-1,0)$ δίνονται από τα διανύσματα:

$$w_1=\frac{r_u-3r_v}{\|r_u-3r_v\|}=\frac{1}{2\sqrt{5}}(-1,2,2)$$

$$w_2=\frac{r_u+3r_v}{\|r_u+3r_v\|}=\frac{1}{2\sqrt{5}}(2,-1,0)$$

4. Θεωρείστε την επιφάνεια εκ περιστροφής με παραμέτρηση:

$$r:(a,b)\times 2\pi \to \mathbb{R}^3,\ r(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

Υποθέστε ότι η f δεν μηδενίζεται και ότι η καμπύλη είναι μοναδιαίας ταχύτητας δηλ. ότι $(f')^2+(g')^2=1$. Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss και την μέση καμπυλότητα.

Λύση

$$r_u=(f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u))$$
$$r_v=(-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0)$$
$$r_{uu}=(f''(u)\cos v, f''(u)\sin v, g''(u))$$
$$r_{uv}=(-f'(u)\sin v, f'(u)\cos v, 0)$$
$$r_{vv}=(-f(u)\cos v, -f(u)\sin v, 0)$$

επομένως τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης είναι:

$$E=1,\ F=0,\ G=f(u)^2$$

και τα θεμελιώδη μεγέθη 2ης τάξης δίνονται από:

$$e=\frac{[r_u,r_v,r_{uu}]}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{f(u)(f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u))}{f(u)}=f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)$$

$$f=\frac{[r_u,r_v,r_{uv}]}{\sqrt{EG-F^2}}=0$$

$$g = \frac{[r_u, r_v, r_{vv}]}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{f^2(u)g'(u)}{f(u)} = f(u)g'(u)$$

Υπολογίζουμε την καμπυλότητα Gauss:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{g'(u)(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))}{f(u)}$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε αυτόν τον τύπο χρησιμοποιώντας της σχέση: $f'(u)^2 + (g'(u))^2 = 1$. Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη έχουμε:

$$f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u) = 0 \Rightarrow f'(u)f''(u) = -g'(u)g''(u)$$

και αντικαθιστώντας στον τύπο για την καμπυλότητα παίρνουμε:

$$K = \frac{g'(u)(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))}{f(u)} = \frac{-(f'(u))^2 f''(u) - f''(u)(g'(u))^2}{f(u)} = \frac{-f''(u)}{f(u)}$$

Η μέση καμπυλότητα δίνεται από τον τύπο:

$$H = H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2}\frac{(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))f(u) + g'(u)}{f(u)}$$

5.Υπολογίστε την κάθετη καμπυλότητα του κύκλου $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ στο παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$.

Λύση

Έστω $k_n(t)$ η κάθετη καμπυλότητα στο σημείο $p = (\cos t, \sin t, 1)$. Τότε

$$k_n(t) = II_p(\alpha'(t))$$

Θεωρούμε τη συνήθη παραμέτρηση του παραβολοειδούς

$$r(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

Από την άσκηση 2 τα θεμελιώδη μεγέθη 2ης τάξης του παραβολοειδούς δίνονται από

$$e = \frac{2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

$$f = 0$$

$$g = \frac{2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

Έχουμε

$$r_x = (1, 0, 2x), \quad r_y = (0, 1, 2y)$$

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0) = (-\sin t)r_x + (\cos t)r_y$$

επομένως
$$II_p(\alpha'(t)) = \frac{2}{\sqrt{5}}\sin^2 t + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos^2 t = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

6.Δείξτε ότι η μέση καμπυλότητα μιάς κανονικής επιφάνειας στο σημείο p δίνεται από
$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(\theta)\, d\theta$$
όπου $k_n(\theta)$ είναι η κάθετη καμπυλότητα στο p σε μία κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με σταθερή κατεύθυνση.

Λύση

Από τον τύπο του $Euler$,
$$k_n(\theta) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$$
όπου k_1, k_2 είναι οι κύριες καμπυλότητες στο p. Επομένως
$$\int_0^{2\pi} k_n(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi}(k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta)\, d\theta = k_1\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta + k_2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta =$$
$$= k_1\int_0^{2\pi}(\frac{\cos 2\theta + 1}{2})\, d\theta + k_2\int_0^{2\pi}(\frac{1-\cos 2\theta}{2})\, d\theta = k_1\pi + k_2\pi$$
επομένως
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(\theta)\, d\theta = \frac{k_1\pi + k_2\pi}{2\pi} = \frac{k_1 + k_2}{2} = H$$