Ασκήσεις 4

Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών

1. Έστω S το παραβολοειδές που δίνεται από την εξίσωση $z = x^2 + y^2$. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου, R της S που βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα $z = 0$ και $z = c^2$.

Λύση. Μία παραμέτρηση του παραβολοειδούς είναι η

$$r(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

Υπολογίζουμε τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης:

$$r_u = (1, 0, 2u)$$

$$r_v = (0, 1, 2v)$$

$$E =< r_u, r_u >= 1 + 4u^2$$

$$F =< r_u, r_v >= 4uv$$

$$G =< r_v, r_v >= 1 + 4v^2$$

Παρατηρούμε ότι το χωρίο R είναι ίσο με $r(U)$ όπου U είναι ο δίσκος ακτίνας c:

$$U = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq c^2\}$$

Επομένως έχουμε

$$A(R) = \iint_U \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}dudv =$$

$$= \iint_U \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)}dudv$$

Χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητών $u = \rho\cos\theta$, $v = \rho\sin\theta$ και έχουμε

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

και

$$A(R) = \int_0^{2\pi}\int_0^c \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(1 + 4c^2)^{3/2}}{12}d\theta = \pi\frac{(1 + 4c^2)^{3/2}}{6}$$

2. Δείξτε ότι το εμβαδόν ενός φραγμένου χωρίου R της επιφάνειας $z = f(x,y)$ είναι

$$A = \iint\limits_{Q} \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dx\,dy$$

όπου Q είναι η προβολή του R στο xy επίπεδο.

Λύση. Θεωρούμε την παραμέτρηση της $z = f(x,y)$:

$$r(x,y) = (x,y,f(x,y))$$

Υπολογίζουμε τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης:

$$r_x = (1,0,f_x),\ r_y = (0,1,f_y)$$

$$E = 1+f_x^2,\ F = f_x f_y,\ G = 1+f_y^2$$

Αν Q είναι η ορθογώνια προβολή του R στο xy επίπεδο έχουμε:

$$A = \iint\limits_{Q} \sqrt{E(x,y)G(x,y)-F^2(x,y)}dxdy = \iint\limits_{Q} \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$$

3. Έστω $r : U \to \mathbb{R}^3$ παραμέτρηση επιφανείας με θεμελιώδη μεγέθη:

$$E(u,v) = 1+v^2,\ F(u,v) = -2uv,\ G(u,v) = 1+u^2$$

Υπολογίστε τη γωνία ανάμεσα στις u,v-παραμετρικές καμπύλες σε τυχαίο σημείο της επιφάνειας.

Λύση. Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι καμπύλες $r(u,v_0), r(u_0,v)$ στο σημείο (u_0,v_0) τότε

$$\cos(\theta) = \frac{< r_u(u,v_0), r_v(u_0,v) >}{\|r_u(u,v_0)\|\|r_v(u_0,v)\|} = \frac{F(u_0,v_0)}{\sqrt{E(u_0,v_0)G(u_0,v_0)}} = \frac{-2u_0v_0}{\sqrt{1+u_0^2+v_0^2+u_0^2v_0^2}}$$

4. Έστω $\gamma(s)$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας στον $\mathbb{R}^3$ με πρώτο κάθετο διάνυσμα $N(s)$ και δεύτερο κάθετο διάνυσμα $B(s)$. Ο σωλήνας ακτίνας a γύρω από την γ είναι η επιφάνεια που δίνεται από την παραμέτρηση:

$$r(s,\theta) = \gamma(s) + a(N(s)\cos\theta + B(s)\sin\theta)$$

Σχεδιάστε αυτή την επιφάνεια. Υποθέστε ότι η r είναι 1-1 και δείξτε ότι είναι ομαλή αν η καμπυλότητα της γ είναι μικρότερη από $\frac{1}{a}$ για κάθε s. Δείξτε ότι το εμβαδόν του κομματιού της επιφάνειας που δίνεται από $s_0 < s < s_1$, $0 < \theta < 2\pi$, όπου s_0, s_1 σταθερές, είναι $2\pi a(s_1 - s_0)$.

Λύση.

$$\frac{\partial r}{\partial s} = (1 - ak(s)\cos\theta)T(s) + a\tau(s)\cos\theta B(s) - a\tau(s)\sin\theta N(s)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = -a\sin\theta N(s) + a\cos\theta B(s)$$

Αφού τα διανύσματα $T(s), N(s), B(s)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε ότι τα διανύσματα $\frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial \theta}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν $1 - ak(s)\cos\theta \neq 0$. Αν $k(s) < 1/a$ τότε $1 - ak(s)\cos\theta > 0$ επομένως τα $\frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial \theta}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και η επιφάνεια είναι ομαλή.

Μπορούμε επίσης να υπολογίαουμε

$$r_s \times r_\theta = -a(1 - k(s)\cos\theta)(\cos\theta N(s) + \sin\theta B(s))$$

το οποίο είναι μη μηδενικό αν $k(s) < 1/a$. Υπολογίζουμε την πρώτη θεμελιώδη μορφή:

$$< r_s, r_s >= (1-k(s)a\cos\theta)^2 + \tau(s)^2a^2,\ < r_s, r_\theta >= 2\tau(s)a^2,\ < r_\theta, r_\theta >= a^2$$

Επομένως το εμβαδόν του σωλήνα είναι

$$A = \int_{s_0}^{s_1}\int_0^{2\pi} a(1 - k(s)a\cos\theta)d\theta ds = 2\pi a(s_1 - s_0)$$

5. Θεωρούμε την συνήθη παραμέτρηση της σπείρας S:

$$\phi(u,v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u)\ u \in [0, 2\pi), v \in [0, 2\pi)$$

Υπολογίστε τον πίνακα του τελεστή σχήματος

$$-T_pN : T_pS \to T_pS$$

όπου $p = \phi(u,v)$, ως προς την βάση $\{\phi_u, \phi_v\}$.

Λύση. Υπολογίζουμε τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης:

$$\phi_u = (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u)$$

$$\phi_v = (-(a + r\cos u)\sin v, (a + r\cos u)\cos v, 0)$$

$$E =< \phi_u, \phi_u >= r^2,\ F =< \phi_u, \phi_v >= 0,\ G =< \phi_v, \phi_v >= (a + r\cos u)^2$$

Υπολογίζουμε τα θεμελιώδη μεγέθη 2ης τάξης:

$$\phi_{uu} = (-r\cos u\cos v, -r\cos u\sin v, -r\sin u)$$

$$\phi_{uv} = (r\sin u\sin v, -r\sin u\cos v, 0$$

$$\phi_{vv} = (-(a + r\cos u)\cos v, -(a + r\cos u)\sin v, 0)$$

Λαμβάνοντας υπ όψη ότι

$$\|\phi_u \times \phi_v\| = \sqrt{EG - F^2} = r(a + r\cos u)$$

και ότι το κάθετο διάνυσμα δίνεται από

$$N = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$$

έχουμε

$$e =< N, \phi_{uu} >=< \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}, \phi_{uu} >= \frac{[\phi_u, \phi_v, \phi_{uu}]}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{r^2(a + r\cos u)}{r(a + r\cos u)} = r$$

όμοια υπολογίζουμε

$$f = \frac{[\phi_u, \phi_v, \phi_{uv}]}{\sqrt{EG - F^2}} = 0$$

$$g = \frac{[\phi_u, \phi_v, \phi_{vv}]}{\sqrt{EG - F^2}} = \cos u(a + r\cos u)$$

Επομένως ο πίνακας του τελεστή σχήματος είναι:

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r^2(a + r\cos u)^2} \begin{pmatrix} (a + r\cos u)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \cos u(a + r\cos u) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r(a + r\cos u)} \begin{pmatrix} a + r\cos u & 0 \\ 0 & r\cos u \end{pmatrix}$$