Ασκήσεις 3

Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών

Από τις σημειώσεις κεφάλαιο 2: 1,3,4

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$r : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^3,\ r(u,v) = (u, 2u, uv^2)$$

είναι παραμέτρηση επιφανείας.

Λύση

Η r είναι C^1 αφού οι μερικές παράγωγοι των u, u^2, uv^2 είναι συνεχείς. Το διαφορικό της r δίνεται από τον πίνακα:

$$Dr(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι αυτός ο πίνακας έχει τάξη 2 για κάθε $(u,v) \in (0,\infty)\times(0,\infty)$. Επίσης $r(u_1,v_1) = r(u_2,v_2) \Rightarrow (u_1,v_1) = (u_2,v_2)$ άρα η r είναι 1-1. Η αντίστροφη απεικόνιση δίνεται από

$$r^{-1}(x,y,z) = (x, \sqrt{\frac{z}{x}})$$

η οποία είναι συνεχής αφού για κάθε $(x,y,z) \in r(U)$ ισχύει ότι $x \neq 0$ (και $x, z > 0$). Συμπεραίνουμε ότι η r είναι παραμέτρηση επιφανείας.

2. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x,y,z) = (x+y+z-1)^2$. Για ποιές τιμές του c είναι το σύνολο

$$S = \{(x,y,z) : f(x,y,z) = c\}$$

κανονική επιφάνεια;

β) Ίδια ερώτηση για τη συνάρτηση $g(x,y,z) = xyz^2$.

Λύση

α) Ο πίνακας *Jacobi* της f είναι ο

$$(2(x+y+z-1) \quad 2(x+y+z-1) \quad 2(x+y+z-1))$$

Αν $c > 0$ τότε για κάθε $(x,y,z) \in S$ ο πίνακας *Jacobi* είναι ο

$$(2\sqrt{c} \quad 2\sqrt{c} \quad 2\sqrt{c}) \neq (0 \quad 0 \quad 0)$$

άρα η S είναι κανονική επιφάνεια. Για $c = 0$ έχουμε

$$(x,y,z) \in S \Leftrightarrow x+y+z-1 = 0$$

άρα η S είναι επίπεδο. Επομένως και σ' αυτήν την περίπτωση η S είναι κανονική επιφάνεια.

β) Ο πίνακας *Jacobi* της g είναι ο

$$(yz^2 \quad xz^2 \quad 2xyz)$$

Αν $c \neq 0$ για κάθε $(x, y, z) \in S = g^{-1}(c)$ ο πίνακας αυτός είναι μη μηδενικός άρα η S είναι κανονική επιφάνεια.

Αν $c = 0$ τότε

$$S = \{(x, y, z) : xyz^2 = 0\}$$

άρα το σύνολο S είναι η ένωση των επιπέδων $x = 0$, $y = 0$ και $z = 0$. Βλέπουμε ότι αυτό το σύνολο δεν είναι κανονική επιφάνεια, π.χ. δεν υπάρχει χάρτης που η εικόνα του να περιέχει το σημείο $(0, 0, 0) \in S$.

Μία πιο αυστηρή αιτιολόγηση ότι το S δεν είναι επιφάνεια παίρνουμε υπολογίζοντας τον χώρο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων $\mathbb{E}_p$ στο σημείο $p = (0, 0, 0)$. Ο χώρος $\mathbb{E}_p$ αποτελείται από όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα στο p καμπύλων του S που περνάνε από το p. Επομένως ο $\mathbb{E}_p$ περιέχει τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$ και $z = 0$ αφού κάθε σημείο αυτών των επιπέδων μπορούμε να το δούμε σαν εφαπτόμενο διάνυσμα κάποιας επίπεδης καμπύλης του S, πχ το σημείο $(0, y, z)$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $\alpha(t) = (0, yt, zt) \in S$, δηλ $\alpha'(0) = (0, y, z)$. Αλλά αν η S ήταν κανονική επιφάνεια ο $\mathbb{E}_p$ θα ήταν ίσος με ένα επίπεδο. Συμπεραίνουμε ότι η S δεν είναι κανονική επιφάνεια.

3. Θεωρούμε την παραμέτρηση του παραβολοειδούς

$$r(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

α) Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $p = (1, 2, 5)$.

β) Βρείτε τη βάση του εφαπτόμενου χώρου στο p που αντιστοιχεί στην παραπάνω παραμέτρηση.

γ) Δείξτε ότι το διάνυσμα $w = (2, -1, 0)$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στο p και γράψτε το σα γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης που βρήκατε στο β).

δ) Βρείτε μία καμπύλη $\alpha(t)$ στο παραβολοειδές τ.ω. $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = w$.

Λύση

α) $r_u = (1, 0, 2u)$, $r_v = (0, 1, 2v)$. Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο στο $(1, 2, 5) = r(1, 2)$ είναι το επίπεδο

$$E = \{(1, 2, 5) + t(1, 0, 2) + s(0, 1, 4)\}$$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι η $< (1, 0, 2), (0, 1, 4) >$ είναι η βάση του εφαπτόμενου χώρου στο p που αντιστοιχεί στην r.

γ) $w = (2, -1, 0) = 2(1, 0, 2) - (0, 1, 4)$ άρα το w είναι εφαπτόμενο διάνυσμα του παραβολοειδούς στο p.

δ) Το διαφορικό της r στο p δίνεται από

$$J_p r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = w$$

Αν $\beta(t) = (1,2) + (2t, -t)$ τότε η καμπύλη

$$\alpha(t) = r(\beta(t)) = (1+2t, 2-t, (1+2t)^2 + (2-t)^2)$$

έχει $\alpha'(0) = w$.