# Ασκήσεις 2

*Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών*

**1.** Έστω $\alpha$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας τ.ω. $k(t) \neq 0$. Δείξτε ότι αν $\beta$ είναι η προβολή της $\alpha$ στο εγγύτατο επίπεδο στο $t$ τότε η καμπυλότητα της $\alpha$ στο $t$, $k(t)$, είναι ίση με την καμπυλότητα της $\beta$ στο $t$.

*Λύση*

Θεωρούμε την κανονική μορφή της $\alpha$ στο $t$:

$$\alpha(t+h) = \alpha(t) + (h - \frac{k(t)^2}{6}h^3)T(t) +$$

$$+(\frac{k(t)}{2}h^2 + \frac{k'(t)}{6}h^3)N(t) +$$

$$+\frac{k(t)\tau(t)}{6}h^3 B(t) + \epsilon(h)h^3$$

Προβολή της $\alpha$ στο εγγύτατο επίπεδο στο $t$ είναι μία καμπύλη $\beta$ τ.ω.

$$\beta(t+h) = \alpha(t) + hT(t) + \frac{k(t)}{2}h^2 N(t) + \delta(h)h^2$$

όπου

$$\lim_{h\to 0} \|\delta(h)\| = 0$$

Επομένως $\beta'(t) = T(t)$ και $\beta''(t) = k(t)N(t)$, άρα η καμπυλότητα της $\beta$ στο $t$ είναι $k(t)$.

$\square$

**2.** Έστω $\alpha$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας τ.ω. η στρέψη της $\alpha$ είναι μη μηδενική. Δείξτε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε την καμπυλότητα της $\alpha$ από το δικάθετο διάνυσμα $B(s)$ της $\alpha$.

*Λύση*

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

άρα

$$|\tau(s)| = \|B'(s)\|$$

Επίσης

$$B'(s) \times B(s) = -\tau(s)T(s)$$

άρα

$$T(s) = \pm\frac{1}{\|B'(s)\|}B'(s) \times B(s)$$

Επομένως

$$k(s) = \|T'(s)\| = (\frac{1}{\|B'(s)\|}B'(s) \times B(s))'$$

$\square$

**3.** Έστω $\alpha$ ομαλή καμπύλη τέτοια ώστε όλες οι διχοτόμοι πρώτου και δεύτερου κάθετου διανύσματος περνούν από σταθερό σημείο. Να δείξετε ότι η $\alpha$ είναι τμήμα κύκλου.

*Λύση.* Έστω ότι όλοι οι διχοτόμοι περνούν από το σημείο $p$. Τότε για κάθε $s$ υπάρχει $f(s) \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$p = \alpha(s) + f(s)(N(s) + B(s))$$

Παρατηρώ ότι

$$f(s) = < p - \alpha(s), N(s) >$$

επομένως η $f(s)$ είναι διαφορίσιμη.

$$p = \alpha(s) + f(s)(N(s) + B(s)) \Rightarrow 0 = (\alpha(s) + f(s)(N(s) + B(s)))' =$$

$$= T(s) + f'(s)(N(s) + B(s)) + f(s)(-k(s)T(s) + \tau(s)B(s) - \tau(s)N(s))$$

Αφού τα διανύσματα $T(s), B(s), N(s)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύμαμη με τις εξισώσεις:

$$1 - f(s)k(s) = 0$$

$$f'(s) - f(s)\tau(s) = 0$$

$$f'(s) + f(s)\tau(s) = 0$$

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες ισότητες έχω ότι $f'(s) = 0$ άρα η $f$ είναι σταθερή. Από την πρώτη εξίσωση τώρα έχω ότι η $k(s)$ είναι σταθερή και από τη δεύτερη εξίσωση παίρνω ότι $\tau(s) = 0$. Αλλά μία καμπύλη με σταθερή καμπυλότητα και μηδενική στρέψη είναι τμήμα κύκλου.

$\square$

**4.** Δώστε μία παραμέτρηση του γραφήματος μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και χρησιμοποιείστε τη για να δείξετε ότι η καμπυλότητα δίνεται από τον τύπο

$$k(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}$$

*Λύση.* Μία παραμέτρηση του γραφήματος της $f$ δίνεται από:

$$\alpha(t) = (t, f(t))$$

Έχουμε

$$\alpha'(t) = (1, f'(t)), \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = ((1 + f'(t)^2)^{-1/2}, (1 + f'(t)^2)^{-1/2} f'(t))$$

$$T'(t) = (-f'(t)f''(t)(1+f'(t)^2)^{-3/2}, (1+f'(t)^2)^{-1/2}f''(t)-f'(t)^2f''(t)(1+f'(t)^2)^{-3/2})$$

$$\|T'(t)\| = \frac{|f''(t)|}{1+f'(t)^2}$$

Έχουμε όμως ότι η καμπυλότητα δίνεται από

$$k(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|}$$

άρα

$$k(t) = \frac{|f''(t)|}{(1+f'(t)^2)^{3/2}}$$

$\square$

**5.** Έστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας τ.ω. $k(s) < 1$ για κάθε $s \in I$ (όπου $k(s)$ είναι η καμπυλότητα της $\alpha$). Ορίζουμε μία νέα καμπύλη (την ‘παράλληλη’ της $\alpha$) με:

$$\beta(t) = \alpha(t) + N(t)$$

Δείξτε ότι η $\beta$ είναι κανονική καμπύλη και η καμπυλότητά της είναι

$$\frac{k(t)}{1-k(t)}$$

*Λύση*

$$\beta'(t) = (1-k(t))T(t)$$

όπου $T(t)$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της $\alpha$. Έχουμε ότι

$$1 - k(t) > 0$$

άρα η $\beta$ είναι κανονική.

$$\|\beta'(t)\| = |1-k(t)|$$

$$\beta''(t) = k'(t)T(t) + k(t)(1-k(t))N(t)$$

Επομένως η καμπυλότητα της $\beta$ είναι ίση με

$$\frac{\beta'(t)\times\beta''(t)}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{k(t)}{1-k(t)}$$