# Ασκήσεις 1

*Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών*

**1.** Θεωρούμε την καμπύλη $\alpha(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

ι) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση μήκος τόξου, $s(t)$ της $\alpha$ ξεκινώντας από το $t = 0$. Δείξτε ότι $\lim_{t\to\infty} s(t)$ είναι πεπερασμένο.

ιι) Δείξτε ότι η γωνία ανάμεσα στο $\alpha(t)$ και την εφαπτομένη στο σημείο $\alpha(t)$ δεν εξαρτάται από το $t$.

*Λύση* ι) άσκηση 25 στις σημειώσεις.

ιι) $\alpha'(t) = (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t, -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)$. Αν $\theta(t)$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα $\alpha(t), \alpha'(t)$ έχουμε:

$$\cos(\theta(t)) = \frac{< \alpha'(t), \alpha(t) >}{\|\alpha'(t)\|\|\alpha(t)\|} = \frac{-e^{-2t}}{\sqrt{2}e^{-t}e^{-t}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

άρα $\theta(t)$ δεν εξαρτάται από το $t$.

**2.** Δείξτε ότι η καμπύλη $\alpha(t) = (\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t)$ είναι κύκλος. Βρείτε το κέντρο, την ακτίνα του και το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται.

*Λύση*

$$T(t) = \alpha'(t) = (-\frac{4}{5}\sin t, -\cos t, \frac{3}{5}\sin t)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\frac{16}{25}\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25}\sin^2 t} = 1$$

Άρα η $\alpha$ είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας.

$$k(t)N(t) = \alpha''(t) = (-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, \frac{3}{5}\cos t)$$

και

$$k(t) = \|\alpha''(t)\| = 1$$

δηλαδή η καμπυλότητα είναι σταθερή ίση με 1.

Υπολογίζουμε τη στρέψη:

$$N'(t) = \alpha'''(t) = (\frac{4}{5}\sin t, \cos t, -\frac{3}{5}\sin t) = -T(t)$$

επομένως η στρέψη είναι 0. Μία καμπύλη με μηδενική στρέψη είναι επίπεδη. Μία επίπεδη καμπύλη με σταθερή καμπυλότητα $k$ είναι κύκλος ακτίνας $\frac{1}{k}$. Επομένως η ακτίνα του κύκλου είναι 1. Το κέντρο του κύκλου $C$ δίνεται από

$$C = \alpha(0) + N(0) = (\frac{4}{5}, 1, -\frac{3}{5}) + (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}) = (0, 1, 0)$$

Το διάνυσμα

$$T(0) \times N(0) = \frac{-1}{5}(3,0,4)$$

είναι κάθετο σ' αυτό το επίπεδο. Επομένως η εξίσωση του επιπέδου είναι:

$$< (x,y,z) - (0,1,0), (3,0,4) >= 0 \Rightarrow 3x + 4z = 0$$

**3.** Αποδείξτε ότι αν όλα τα κάθετα επίπεδα μιας καμπύλης $\alpha$ περνάνε από ένα σημείο $p_0$ τότε η $\alpha$ περιέχεται σε μία σφαίρα με κέντρο $p_0$ (υποδ. παραγωγίστε την $< \alpha(s) - p_0, \alpha(s) - p_0 >$).

*Λύση*

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$F(s) =< \alpha(s) - p_0, \alpha(s) - p_0 >$$

Παργωγίζουμε:

$$F'(s) = 2 < \alpha'(s), \alpha(s) - p_0 >$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\alpha'(s)$ είναι κάθετο στο κάθετο επίπεδο της $\alpha$ στο $\alpha(s)$. Αφού το σημείο $p_0$ ανήκει στο κάθετο επίπεδο, η εξίσωση αυτού του επιπέδου είναι

$$< \alpha'(s), (x,y,z) - p_0 >= 0$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο $\alpha(s)$ ικανοποιεί αυτή την εξίσωση, επομένως

$$< \alpha'(s), \alpha(s) - p_0 >= 0$$

για κάθε $s$. Συμπεραίνουμε ότι $F'(s) = 0$ άρα η

$$F(s) =< \alpha(s) - p_0, \alpha(s) - p_0 >= \|\alpha(s) - p_0\|^2$$

είναι σταθερή και η $\alpha(s)$ περιέχεται σε σφαίρα με κέντρο το $p_0$.

**4.** Έστω $\alpha$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και υποθέστε ότι η καμπυλότητα είναι μη μηδενική για κάθε $t$. Δείξτε ότι αν υπάρχει επίπεδο $E$ τέτοιο ώστε το δεύτερο κάθετο διάνυσμα της $\alpha$ , $B(t)$, περιέχεται στο $E$ για κάθε $t$ τότε η $\alpha$ είναι επίπεδη.

*Λύση*

Έστω $v$ διάνυσμα κάθετο στο $E$. Τότε $< B(t), v >= 0$ για κάθε $t$. Παραγωγίζουμε:

$$< B(t), v >' =< -\tau(t)N(t), v >= 0$$

Θα δείξουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι $\tau(t) = 0$ για κάθε $t$. Αν για κάποιο $t$, $\tau(t) \neq 0$ τότε $< N(t), v >= 0$. Συμπεραίνουμε ότι το $v$ είναι κάθετο με τα $B(t), N(t)$ άρα είναι συγγραμικό με το $T(t)$.

Έχουμε επίσης $< N(s), v >= 0$ για κάθε $s$ σε μία γειτονιά του $s$. Αυτό ισχύει επειδή η $\tau$ είναι συνεχής επομένως $\tau(s) \neq 0$ σε μία γειτονιά του $t$. Αλλά τότε $< N(s), v >= 0$ για κάθε $s$ σ' αυτή τη γειτονιά. Επομένως

$$< N(t), v >' =< N'(t), v >=< -k(t)T(t) + \tau(t)B(t), v >= 0$$

Άρα $< T(t), v >= 0$. Αλλά αυτό είναι άτοπο αφού τα $v, T(t)$ είναι συγγραμικά. Συμπεραίνουμε ότι $\tau(t) = 0$ για κάθε $t$ επομένως η καμπύλη είναι επίπεδη.

**5.** Δείξτε ότι η καμπύλη

$$\gamma(t) = (\frac{1+t^2}{t}, 1+t, \frac{1-t}{t})$$

είναι επίπεδη.

*Λύση*

Υπολογίζουμε τη στρέψη της $\gamma$:

$$\tau = \frac{< \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) >}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

$$\alpha'(t) = (\frac{t^2-1}{t^2}, 1, \frac{-1}{t^2})$$

$$\alpha''(t) = (\frac{2}{t^3}, 0, \frac{2}{t^3})$$

$$\alpha'''(t) = (\frac{-6}{t^4}, 0, \frac{-6}{t^4})$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (\frac{2}{t^3}, \frac{-2}{t^3}, \frac{-2}{t^3})$$

$$< \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) >=< (\frac{2}{t^3}, \frac{-2}{t^3}, \frac{-2}{t^3}), (\frac{-6}{t^4}, 0, \frac{-6}{t^4}) >= 0$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η στρέψη της $\gamma$ είναι 0, άρα η $\gamma$ είναι επίπεδη.

**6.** Έστω $\alpha$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και υποθέστε ότι η καμπυλότητα είναι μη μηδενική για κάθε $t$. Ορίζουμε μία νέα καμπύλη με $\gamma(t) = \alpha'(t)$. Δείξτε ότι η $\gamma$ είναι κανονική καμπύλη και ότι η καμπυλότητα της δίνεται απ΄ τον τύπο:

$$(1 + \frac{\tau^2}{k^2})^{1/2}$$

όπου $k, \tau$ είναι αντίστοιχα η καμπυλότητα και η στρέψη της $\alpha$.

*Λύση*

$\gamma'(t) = \alpha''(t) = k(t)N(t)$ όπου $k, N$ είναι αντίστοιχα η καμπυλότητα και το πρώτο κάθετο διάνυσμα της $\alpha$. Αφού $k(t) \neq 0$ έχουμε $\gamma'(t) \neq 0$ και η $\gamma$ είναι κανονική.

Η καμπυλότητα της $\gamma$ δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

Αντικαθιστούμε $\gamma(t) = \alpha'(t)$ και έχουμε:

$$\frac{\|\alpha''(t) \times \alpha'''(t)\|}{\|\alpha''(t)\|^3}$$

Έχουμε

$$\alpha''(t) = kN, \quad \alpha'''(t) = k'N - k^2T + k\tau B$$

και

$$\|\alpha''(t) \times \alpha'''(t)\| = \|k^3B + k^2\tau T\| = k^2\sqrt{k^2 + \tau^2}$$

Επομένως η καμπυλότητα της $\gamma$ δίνεται από τον τύπο:

$$(1 + \frac{\tau^2}{k^2})^{1/2}$$