Ασκήσεις 5

Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών

Από τις σημειώσεις κεφάλαιο 3: 7,10,13

1. Δείξτε ότι το παραβολοειδές που δίνεται από την εξίσωση $z = x^2 + y^2$ είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια.

2. Υπολογίστε τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης και 2ης τάξης της επιφάνειας $z = f(x, y)$ όπου f συνάρτηση τάξης C^2.

3. Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss και την μέση καμπυλότητα, της επιφάνειας που δίνεται από την παραμέτρηση:

$$r(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$$

Υπολογίστε τις κύριες καμπυλότητες και τις αντίστοιχες κύριες κατευθύνσεις στο σημείο $r(0, 1) = (1, -1, 0)$.

4. Θεωρείστε την επιφάνεια εκ περιστροφής με παραμέτρηση:

$$r : (a, b) \times 2\pi \to \mathbb{R}^3,\ r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

Υποθέστε ότι η f δεν μηδενίζεται και ότι η καμπύλη είναι μοναδιαίας ταχύτητας δηλ. ότι $(f')^2 + (g')^2 = 1$. Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss και την μέση καμπυλότητα.

5. Υπολογίστε την κάθετη καμπυλότητα του κύκλου $(\cos t, \sin t, 1)$ στο παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$.

6. Δείξτε ότι η μέση καμπυλότητα μιάς κανονικής επιφάνειας στο σημείο p δίνεται από

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(\theta)\, d\theta$$

όπου $k_n(\theta)$ είναι η κάθετη καμπυλότητα στο p σε μία κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με σταθερή κατεύθυνση.

Λύσεις στην ιστοσελίδα: http://users.uoa.gr/ ppapazog/teaching/