

Ασκήσεις 4

Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών

Από τις σημειώσεις κεφάλαιο 3: 5,9

1. Έστω S το παραβολοειδές που δίνεται από την εξίσωση $z = x^2 + y^2$. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου, R της S που βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα $z = 0$ και $z = c^2$.

2. Δείξτε ότι το εμβαδόν ενός φραγμένου χωρίου R της επιφάνειας $z = f(x, y)$ είναι

$$A = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

όπου Q είναι η προβολή του R στο xy επίπεδο.

3. Έστω $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ παραμέτρηση επιφάνειας με θεμελιώδη μεγέθη:

$$E(u, v) = 1 + v^2, \quad F(u, v) = -2uv, \quad G(u, v) = 1 + u^2$$

Υπολογίστε τη γωνία ανάμεσα στις u, v -παραμετρικές καμπύλες σε τυχαίο σημείο της επιφάνειας.

4. Έστω $\gamma(s)$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας στον \mathbb{R}^3 με πρώτο κάθετο διάνυσμα $N(s)$ και δεύτερο κάθετο διάνυσμα $B(s)$. Ο σωλήνας ακτίνας a γύρω από την γ είναι η επιφάνεια που δίνεται από την παραμέτρηση:

$$r(s, \theta) = \gamma(s) + a(N(s) \cos \theta + B(s) \sin \theta)$$

Σχεδιάστε αυτή την επιφάνεια. Υποθέστε ότι η r είναι 1-1 και δείξτε ότι είναι ομαλή αν η καμπυλότητα της γ είναι μικρότερη από $\frac{1}{a}$ για κάθε s . Δείξτε ότι το εμβαδόν του κομματιού της επιφάνειας που δίνεται από $s_0 < s < s_1$, $0 < \theta < 2\pi$, όπου s_0, s_1 σταθερές, είναι $2\pi a(s_1 - s_0)$.

Λύσεις στην ιστοσελίδα: <http://users.uoa.gr/~ppapazog/teaching/>