Ασκήσεις 2

Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών

Από τις σημειώσεις κεφάλαιο 1: 18,21,22

1. Έστω α καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας τ.ω. $k(t) \neq 0$. Δείξτε ότι αν β είναι η προβολή της α στο εγγύτατο επίπεδο στο t τότε η καμπυλότητα της α στο t, $k(t)$, είναι ίση με την καμπυλότητα της β στο t.

2. Έστω α καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας τ.ω. η στρέψη της α είναι μη μηδενική. Δείξτε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε την καμπυλότητα της α από το δικάθετο διάνυσμα $B(s)$ της α.

3. Έστω α ομαλή καμπύλη τέτοια ώστε όλες οι διχοτόμοι πρώτου και δεύτερου κάθετου διανύσματος περνούν από σταθερό σημείο. Να δείξετε ότι η α είναι κύκλος.

4. Δώστε μία παραμέτρηση του γραφήματος μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και χρησιμοποιείστε τη για να δείξετε ότι η καμπυλότητα δίνεται από τον τύπο

$$k(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}$$

5. Έστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας τ.ω. $k(s) < 1$ για κάθε $s \in I$ (όπου $k(s)$ είναι η καμπυλότητα της α). Ορίζουμε μία νέα καμπύλη (την ‵παράλληλη′ της α) με:

$$\beta(t) = \alpha(t) + N(t)$$

Δείξτε ότι η β είναι κανονική καμπύλη και η καμπυλότητά της είναι

$$\frac{k(t)}{1 - k(t)}$$

Λύσεις στην ιστοσελίδα: http://users.uoa.gr/ ppapazog/teaching/